This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

NAT 5084

HARVARD UNIVERSITY.

LIBRARY

OF THE

MUSEUM OF COMPARATIVE ZOÖLOGY.

123

Exchange.

September 2, 1901 — May 26, 1902.

123

Mittheilungen

der

Naturforschenden Gesellschaft

in Bern

aus dem Jahre 1899.

Nr. 1463-1477.

Redaktion: J. H. GRAF.

BERN.
Druck und Verlag von K. J. Wyss.
1900.

Verlag von K. J. WYSS in Bern.

BIBLIOGRAPHIE
der
Schweizerischen Landeskunde.

Unter Mitwirkung
der
hohen Bundesbehörden, eidgen. und kant. Amtsstellen
und zahlreicher Gelehrter
herausgegeben von der
Centralkommission für schweizerische Landeskunde.

In deutscher und französischer Ausgabe.

Bis jetzt erschienen :

Fascikel Ia: *Bibliographische Vorarbeiten der landeskundlichen Litteratur und Kataloge der Bibliotheken der Schweiz.* Zusammengestellt von Prof. Dr. J. H. Graf. Bern 1894. 69 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

Fascikel I b, enthaltend: *Bibliographie der Gesellschaftsschriften, Zeitungen und Kalender der Schweiz,* von Prof. J. L. Brandstetter in Luzern. 380 Seiten. Preis Fr. 3.—

Fascikel II a: *Landesvermessung und Karten der Schweiz, ihrer Landstriche und Kantone.* Herausgegeben vom eidgen. topographischen Bureau. Redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf. Bern 1892. 193 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel II b: *Karten kleinerer Gebiete der Schweiz.* Herausgegeben vom eidg. topograph. Bureau. Redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf, Bern 1892. 164 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel II c: *Stadt- und Ortschaftspläne, Reliefs und Panoramen der Schweiz.* Herausgegeben vom eidg. topograph. Bureau. Redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf. Bern 1893. 173 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel II d, enthaltend: *Generalregister, Ergänzungen und Nachträge zu den Fascikeln II a—c* (Landesvermessung, Kataloge der Kartensammlungen, Karten, Reliefs und Panoramen). Im Auftrage des eidgen. topograph. Büreaus redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf. 220 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel III: *Landes- und Reisebeschreibungen.* Ein Beitrag zur Bibliographie der schweizer. Reiselitteratur, 1479—1890. Zusammengestellt von A. Wäber, Bern. 462 Seiten 8°. Preis Fr. 4.—

Fascikel IV b: *Die Fauna der italienischen Schweiz.* Redigirt von Prof. Dr. A. Lenticchia. Como 1894. 19 Seiten 8°. Preis 50 Cts.

Fascikel IV 3: *Balneologie und Climatotherapie.* Versuch einer schweiz. Bibliographie der Litteratur auf den Gebieten des Badewesens, der Heilquellen, der climaterischen Kurorte u. s. w. Von B. Reber in Genf. 130 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel IV 6: *Fauna helvetica:* Heft 2: Seenfauna. Zusammengestellt von Prof. D. F. Zschokke. Bern 1897. 30 Seiten. 60 Cts.

Fascikel IV 6: *Fauna helvetica.* Heft 4: Vögel. Zusammengestellt von Prof. Dr. Theophil Studer. Bern 1895. 57 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

(Fortsetzung auf Seite 3 des Umschlags.)

Mittheilungen

der

Naturforschenden Gesellschaft

in Bern

aus dem Jahre 1899.

Nr. 1463-1477.

Redaktion: J. H. GRAF.

BERN.
Druck und Verlag von K. J. Wyss.
1900.

SEP 2 1901

Jahresbericht

über die

Thätigkeit der bernischen Naturforschenden Gesellschaft

im Zeitraum vom 1. Mai 1898 bis 30. April 1899.

Hochgeehrte Herren!

Das hinter uns liegende Vereinsjahr war für unsere Gesellschaft besonders bedeutungsvoll durch die am 1.—3. August des verflossenen Jahres in Bern und Grindelwald abgehaltene Jahresversammlung der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft. Es ist hier nicht der Ort, einen näheren Bericht zu geben über den Verlauf dieses vom herrlichsten Wetter begünstigten Festes und über die zahlreichen wissenschaftlichen Mittheilungen, welche in den allgemeinen und in den Sectionssitzungen vorgelegt worden sind. Nur so viel sei hier bemerkt, dass Dank dem zahlreichen Besuche und den Beiträgen von Seiten der Behörden der finanzielle Abschluss, mit einem Defizit von nur 100 Fr., für unsere Kasse ein relativ günstiger genannt werden kann.

Auch unser Mitgliederbestand erfuhr bei Gelegenheit der Naturforscherversammlung einen Zuwachs: ein Circular, welches im Juli versandt wurde, hatte 17 Neu-Anmeldungen zur Folge. Im Ganzen weist das Jahr 1898/99 20 Aufnahmen und 6 Austritte auf.

Sitzungen wurden im Ganzen 11 abgehalten, worunter zwei Demonstrationsabende. In denselben haben sich folgende Herren durch Vorträge, kleinere Mittheilungen oder Vorweisungen betheiligt: Herr Asher (1), Baltzer (1), v. Fellenberg (4), Ed. Fischer (3), L. Fischer (1), Göldi (2), Graf (1), Gruner (2), v. Jenner (1), Kaufmann (1), v. Kostanecki (2), Moser (1), Schaffer (2), Schücking (1), Sidler (1), Steck (2), Studer-Steinhäuslin (2), Th. Studer (4).

Von diesen Mittheilungen entfallen auf Zoologie 8, auf Botanik 6, auf Mineralogie, Geologie, Palaeontologie 6, auf Chemie und Nahrungsmitteluntersuchung 4, auf Mathematik und Geschichte der Mathematik 2, auf Physiologie 2, auf Physik 2, auf Anthropologie 1, auf Astronomie 1.

Eine auswärtige Sitzung wurde im Hinblick auf die Versammlung der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft im letzten Sommer nicht abgehalten.

Am schweizerischen Aerztetag in Bern, bei dem 25jährigen Jubiläum der bernischen geographischen Gesellschaft, sowie bei der Be-

erdigung des Herrn Professor F. Lang in Solothurn war unsere Gesellschaft durch Delegirte vertreten; zur Einweihung der ersten Theilstrecke der Jungfraubahn wurde ein Gratulationstelegramm abgeschickt.

Ueber den Lesezirkel berichtet der Geschäftsführer, Herr Dr. Th. Steck: Mit dem 1. Mai hat der Lesezirkel die 10 ersten Jahre seines Bestehens überschritten. Da eine Neuauflage des schon seit einiger Zeit vergriffenen Reglementes nothwendig geworden, wurden den Erfahrungen der abgelaufenen Dekade entsprechend eine Anzahl Bestimmungen des ursprünglichen Reglementes abgeändert. Die wichtigste Aenderung betrifft den Wegfall der Bussen für solche, die die Mappen über die vorgesehene Frist hinaus behalten. Theilnehmer, welche sich nach dieser Richtung hin gegen das Reglement verfehlen, können künftig auf Antrag des Geschäftsführers vom Vorstande der Gesellschaft für kürzere oder längere Zeit von der Theilnahme am Lesezirkel ausgeschlossen werden. — Eine Einladung zur Theilnahme am Lesezirkel, die im November mit dem neuen Reglement an alle Mitglieder versandt wurde, hatte die Anmeldung von 18 neuen Theilnehmern zur Folge. Dadurch ist nun die Zahl derselben auf 41 gestiegen. Die Zahl und Auswahl der zirkulirenden Zeitschriften hat sich gegenüber dem letzten Jahre nicht verändert. Dem Geschäftsführer wurde in der Sitzung vom 29. April für die Besorgung des Lesezirkels eine Honorirung von 50 Fr. jährlich zugesprochen.

Wie schon früher, so war auch im verflossenen Jahre unsere Gesellschaft um die Erhaltung von erratischen Blöcken besorgt. Es galt dies insbesondere einigen Blöcken in der Gegend von Nidau und einem solchen am Bintel bei Wimmis. Bei dem letztern wurde Ankauf zu Handen des naturhistorischen Museums beschlossen.

Zum Präsidenten für das Vereinsjahr 1899/1900 wurde Herr Professor St. v. Kostanecki, zum Vicepräsidenten Herr Professor Brückner gewählt.

Der Präsident: **Ed. Fischer.**

Sitzungs-Berichte.

932. Sitzung vom 14. Januar 1899.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Hr. Ed. Fischer. Anwesend: 24 Mitglieder.

1. Hr. E. Göldi spricht über die **Fischfauna des Amazonenstromes.**
2. Hr. Th. Studer weist einen Abguss von **Archäopteryx** vor.
3. Hr. Ed. v. Fellenberg berichtet über den sog. **fossilen Baumstamm,** der a. 1887 bei Guttannen in einem Gneissblock gefunden wurde und sich bei genauerer Untersuchung als eine Einlagerung von Hornblende erwiesen hat.

933. Sitzung vom 28. Januar 1899.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Hr. Ed. Fischer: Anwesend: 33 Mitglieder.

1. Hr. P. Gruner spricht über **Beugungserscheinungen** und deren Beziehungen zu den Dämmerungsfarben und zu dem Alpenglühen.
2. Hr. Dr. Schücking aus Pyrmont, eingeführt durch Herrn Kronecker, macht eine Mittheilung über: **die belebende Wirkung des Natriumsaccharates auf das Herz.**

Er setzte auseinander, wie dieses bisher noch wenig bekannte Präparat, dessen physiologische und pharmakologische Wirkungen noch nicht untersucht worden, in sehr kleiner Menge (0,05 proc.) der physiologischen Kochsalzlösung (0,75 proc.) zugesetzt, das hiervon durchspülte Herz kräftig mache und tagelang erhalte.

Chlorcalcium und Chlorkalium, welche Ringer als Zusätze zur Cl Natriumlösung empfahl, haben viel weniger günstige Wirkung als die Natriumsaccharatlösung. Chlorkalium ist zumal schwachen Herzen schädlich. Ebenso ist Howells neuerdings empfohlene Modifikation der Ringer'schen Lösung minderwertig als die Sacharatlösung. Allerdings erhöht ein ganz geringer Zusatz von Chlorcalcium (0,03 proc.) zur Sacharatlösung deren Wirkung. Das durchspülte Froschherz wird nur ausserordentlich langsam vollkommen vom Blut befreit. Man findet nach stundenlanger Perfusion noch Blutspuren in der Spülflüssigkeit.

934. Sitzung vom 11. Februar 1899.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Hr. Ed. Fischer. Anwesend: 18 Mitglieder.

1. Hr. L. Asher spricht über die **Quelle der Muskelkraft.**

935. Sitzung vom 25. Februar 1899.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Hr. Ed. Fischer. Anwesend: 12 Mitglieder.

1. Hr. A. Baltzer demonstrirt die Reproduktion zweier Reliefs von altgriechischen Bechern herrührend. Das eine Relief zeigt die Jagd auf **Bos primigenius**, das andere zeigt das gleiche Thier in gezähmtem Zustande.
2. Hr. Th. Studer weist einen reconstruirten **Pfahlbauer-Frauenkopf** von Prof. Kollmann in Basel vor.
3. Hr. St. v. Kostanecki weist galizisches **Erdwachs**, Cerisin und galizisches Erdöl vor.
4. Herr Ed. Fischer legt die kürzlich erschienene Arbeit von Prof. H. Bachmann über die **Prothallien von Lycopodium** vor und weist die Prothallien von Lycopodium clavatum und annotinum vor, welche das botanische Institut der Güte von Herrn Prof. Bruchmann verdankt.

936. Sitzung vom 11. März 1899.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Hr. Ed. Fischer. Anwesend: 25 Mitglieder.

1. Hr. Th. Studer weist ein **neues Beutelthier**, Notoryctes, vor.
2. Hr. A. Baltzer macht einige **geologische Mittheilungen**.
3. Herr Ed. Fischer gibt ein kurzes Résumé der heutigen Kenntnisse über die **fossilen Cycadeen** und bespricht etwas eingehender die Organisation der Bennettiteen unter Zugrundelegung der bezüglichen Untersuchungen von Solms-Laubach. Ausser lebenden Exemplaren und Blüthen heutiger Cycadeen weist der Vortragende einen Stamm von Bennettites Dakotensis aus dem nordamerikanischen Jura und Blätter von Zamia und Otozamites von Rovere di Velo (Vicenza) vor.

937. Sitzung vom 29. April 1899.

Abends 8 Uhr im Hörsaal des Kantonschemikers.

Vorsitzender: Hr. Ed. Fischer. Anwesend: 18 Mitglieder.

1. Wahlen. Es werden gewählt für das Vereinsjahr 1899/1900:
   Zum Präsidenten: Hr. Prof. Dr. St. v. Kostanecki.
   Zum Vice-Präsidenten: Hr. Prof. Dr. Ed. Brückner.
2. Hr. Schaffer spricht über **Butter-Untersuchungen**, mit Demonstrationen.

938. Sitzung vom 13. Mai 1899.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Hr. St. v. Kostanecki. Anwesend: 25 Mitglieder.

1. Der abtretende Präsident, Hr. Ed. Fischer, verliest den **Jahresbericht** pro 1. Mai 1898 bis 1. Mai 1899.
2. Hr. Th. Studer spricht über **Säugethier-Reste aus dem Wadi Natron in Unter-Aegypten**, mit Vorweisungen.
3. Hr. E. Göldi spricht über **Schmetterlingszüge im Amazonengebiet.**

Referent erinnert, dass zuweilen auffällige Schmetterlingszüge, vornehmlich durch Weisslinge gebildet, auch in der Schweiz beobachtet werden. In grossartigem Massstabe werden derartige Schmetterlings-

züge im Amazonas-Gebiet gesehen, wo sie den Anwohnern seit alten Zeiten unter dem indianischen Namen **„paná-paná“** wohlbekannt sind. Es wird ein kurzer Ueberblick über bezügliche Schilderungen von früheren Reisenden, Schomburgk, Bates, Wallace und Spence gegeben und eine summarische Kritik derselben geboten. Referent tritt hierauf auf seine eigenen Beobachtungen ein, die gelegentlich der Expedition nach dem Oberlauf des Rio Capión im Staate Pará (Juni—Juli 1897) gemacht wurden und an denen sich ein Zoologe und ein Botaniker speziell betheiligten. Es ergab sich 1. dass die Schmetterlinge in den Morgenstunden bis Mittag am rechten Ufer stromaufwärts flogen und Süd-Richtung innehielten, während in den Nachmittagstunden die Rückkehr am linken Ufer mit nördlichem Kurs erfolgte. (Im Gegensatz zu den Behauptungen von Bates und Spence, die den Zügen stets südliche Richtung zuschreiben.) 2. Dass die Züge in jener Gegend aus Weisslingen (Picriden) zusammengesetzt sind, Vettern unseres Citronenfalters, in der Weise, dass vielleicht 95 Prozent durch die weissliche *Catopsilia statira*, der Rest durch die hellgelben Cat. Trite und Cat. Eubule, mit geringer Betheiligung der grell orangefarbenen Cat. Argante, geliefert werden. 3. Dass diese Weisslinge offenbar in ihren Wanderungen durch gewisse Bäume beeinflusst werden, die zu jener Zeit blühen, zumal durch den zu den Leguminosæ-Caesalpinoideae gehörigen «Arapary»-Baum *(Vonapa acaciæfolio* [Benth] Brillon = Macrolobium acaciaefolium Benth*)*.

An der Hand von nach Photographien gefertigten Zeichnungen wird sowohl das Physiognomische dieser imposanten Picriden-Züge, als auch die auf Insekten-Besuch berechnete Blüten-Stellung und -Einrichtung des Arapary-Baumes erläutert.

4. Hr. Th. Studer macht einige Bemerkungen über den **Ur-Stier**, in Beziehung zu Jesaia 51, 25.

939. Sitzung vom 27. Mai 1899.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Hr. St. v. Kostanecki: Anwesend 14 Mitglieder.

1. Als Delegirte an die Versammlung der schweizer. naturforschenden Gesellschaft in **Neuenburg** werden die HH. Prof. Fischer und Prof. Graf bezeichnet.
2. Hr. E. Göldi spricht über die **Fischfauna des Amazonenstromes** 2. Theil
3. Hr. Kaufmann demonstrirt eine **Tænia** aus dem Darmkanal einer Forelle.

940. Sitzung vom 25. Juni 1899.

Morgens 11 Uhr, im Freien Hof, in **Thun.**

Vorsitzender: Hr. St. v. Kostanecki. Anwesend 40—50 Personen.

1. Hr. A. Benteli spricht über **die Niveauschwankungen der schweizerischen See'n**, mit besonderer Berücksichtigung der Jura-See'n.
2. Herr R. Huber spricht über **Das Wesen der Telegraphie ohne Draht.**

Einleitend wird eine kurze Uebersicht über die bisher angewendeten **Methoden** gegeben, welche dazu dienten mittelst Elektricität ohne Benützung von Leitungsdrähten zwischen zwei entfernten Orten sich zu

verständigen. Hierauf besprach der Vortragende die Untersuchungen von Faraday und Maxwell, welche zur Begründung der elektromagnetischen Lichttheorie führten; machte aufmerksam auf die Beziehung zwischen der Dielektricitätskonstanten und optischen Brechungsexponenten, etc., und auf die Rolle des Dielektikums.

Im Ferneren wurden die Versuche von Hertz besprochen, und die hauptsächlichsten Methoden angegeben, welche seither dazu dienten, um Oscillator und Cohärer zu vervollkommnen.

Nach einer Würdigung der Verdienste Marconi's wurde dessen Art zu telegraphieren in übersichtlicher Weise erläutert, und zum Schluss gab der Referent noch eine kurze Erklärung der «Lichtelektrischen Telegraphie» von Zickler.

3. Am Nachmittag wird die kantonale Gewerbe- und Industrie-Ausstellung besichtigt.

941. Sitzung vom 4. November 1899.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Hr. St. v. Kostanecki. Anwesend: 30 Mitglieder.

1. Hr. A. Tschirch spricht über **natürliche Auswahl von Arzneimitteln ähnlicher Wirkungsweise** seitens der Bewohner räumlich weit getrennter Länder.
2. Hr. A. Baltzer weist **geologische Photographieen** vor.
3. Hr. Th. Studer legt eine Dissertation von Herrn Dr. Schürch über die in den schweizerischen Beinhäusern aufbewahrten **Schädel** vor.

942. Sitzung vom 25. November 1899.

Abends 8 Uhr im Hallerianum.

Vorsitzender: Hr. St. v. Kostanecki. Anwesend: 15 Mitglieder.

1. Hr. H. Kronecker spricht über **Messung von Flüssigkeitsdruck-Schwankungen,** mit Demonstrationen.

943. Sitzung vom 9. Dezember 1899.

Abends 8 Uhr im geologischen Institut.

Vorsitzender: Hr. Ed. Brückner. Anwesend: 20 Mitglieder.

1. Hr. A. Baltzer spricht über **neuere Eruptionen des Aetna,** mit Demonstrationen und Projektionen.
2. Hr. A. Tschirch weist ein **„ideales Bild einer Kohlenlandschaft“** von Potonié vor.

Verzeichniss der Mitglieder

der

Bernischen Naturforschenden Gesellschaft.

(Am 31. Dezember 1899.)

Die mit * bezeichneten Mitglieder wurden im Jahre 1899 neu aufgenommen.

Vorstand.

Prof. Dr. *St. von Kostanecki,* Präsident.
Prof. Dr. *Ed. Brückner,* Vice-Präsident.
B. Studer, jun., Apotheker, Kassier seit 1875.
Prof. Dr. *J. H. Graf,* Redaktor der Mittheilungen seit 1883.
Dr. *Th. Steck,* Oberbibliothekar und Geschäftsführer des Lesezirkels.
Dr. *P. Gruner,* Sekretär seit 1898.

Mitglieder.

1.	*Allemann,* J., Arzt, Zweisimmen	1898
2.	*Anderegg,* Ernst, Dr. phil. und Gymnasiallehrer, Bern	1891
3.	*Andreae,* Philipp, Apotheker, Bern	1883
4.	*Badertscher,* Dr. A., Sekundarlehrer, Bern	1888
5.	*Balmer,* Dr. Hans, Bern	1886
6.	*Baltzer,* Dr. A., Professor der Mineralogie und Geologie, Bern	1884
7.	*Beck,* Dr. Gottl., Lehrer des Freien Gymnasiums, Bern	1876
8.	*v. Benoit,* Dr. jur. G., Bern	1872
9.	*Benteli,* A., Rektor und Dozent, Bern	1869
10.	*Benteli,* A., V. D. M., Bern	1891
11.	*Berdez,* H., Professor an der Thierarzneischule, Bern	1879
12.	*Brückner,* Dr. Ed., Prof. der Geographie, Bern	1888
13.	*Brunner,* C., Dr. phil., Hofrath, Trautsohngasse 6, Wien	1846
14.	*Büchi,* Fr., Optiker, Bern	1874
15.	*Burri,* Dr. phil., Prosektor	1895
16.	*v. Büren,* Eug., allié von Salis, Sachwalter, Bern	1877
17.	*Cherbuliez,* Dr., Direktor, Strassburg	1861
18.	*Coaz,* eidgenössischer Oberforstinspektor, Bern	1875
19.	*Conrad,* Dr. Fr., Arzt in Bern	1872
20.	*Crelier,* Dr., Lehrer am Technikum Biel	1896
21.	*Dick,* Dr. Rud., Arzt in Bern	1876
22.	*Droz,* Arnold, Kantonsschullehrer in Pruntrut	1890

23. *Dubois*, Dr. med., Arzt, Privatdocent, Bern . . . 1884
24. *Dumont*, Dr. med. F., Arzt, Privatdocent, Bern . . 1890
25. *Dutoit*, Dr. med., Arzt in Bern 1867
26. *Eggenberger*, J., Dr. phil., Versicherungsbeamter, München . 1892
27. *Egues*, Jules, Dr. med., Corgémont 1898
28. *Engelmann*, Dr., Apotheker in Basel 1874
29. **Farner*, Dr. A., Apotheker 1899
30. *v. Fellenberg*, Dr. phil. E., Bergingenieur, Bern . . . 1861
31. *Fischer*, Dr. phil. Ed., Professor der Botanik, Bern . . 1885
32. *Fischer*, Dr. L., Honorar-Professor, Bern 1852
33. *Flach*, Arthur, Dr. med., Bern 1898
34. *v. Freudenreich*, Dr. E., Bern 1885
35. *Friedheim*, Dr. Prof., Bern 1897
36. *Geering*, Ernst, Dr. med., Reconvillier 1898
37. *de Giacomi*, J., Dr. med., Arzt und Privatdocent, Bern . 1889
38. *Girard*, Prof. Dr. med., Arzt in Bern 1876
39. *Gosset*, Philipp, Ingenieur, Wabern bei Bern . . . 1865
40. *Graf*, Dr. J. H., Professor der Mathematik, Bern . . 1874
41. *Gressly*, Alb., Oberst, Maschinen-Ingenieur, Bern . . 1872
42. *Grimm*, J., Präparator, Bern 1876
43. *Gruner*, Dr. Paul, Gymnasiallehrer und Docent, Bern . 1892
44. *Guillebeau*, Professor Dr., Bern 1878
45. *Haaf*, C., Droguist, Bern 1857
46. *Haas*, Dr. med., Sigismund, Arzt in Muri bei Bern . . 1890
47. *Hartmann*, Dr. phil., Mathemat. a. Eisenbahndepartement, Bern 1898
48. *Hasler*, Dr. phil. G., Dir. d. Telegraphen-Werkstätte, Bern 1861
49. **Heffter*, Dr. A. W. A., Prof. der med. Chemie u. Pharmacologie 1899
50. *Held*, Leon, Ingenieur, Bern 1879
51. *Huber*, Dr. G., Professor der Mathematik, Bern . . . 1888
52. *Huber*, Rud., Dr. phil., Gymnasiallehrer, Bern . . . 1891
53. *Hug*, Otto, Dr. phil., Bern 1897
54. *Humbel*, Rudolf, Thierarzt, Nieder-Bipp 1898
55. *Jadassohn*, Dr. Prof., Bern 1897
56. *Jenner*, E., Entomolog, hist. Museum, Bern . . . 1870
57. *Jonquière*, Dr. med. Georg, Arzt in Bern 1884
58. *Käch*, P., Sekundarlehrer in Bern 1880
59. *Kaufmann*, Alfr., Dr. phil. und Gymnasiallehrer, Bern . 1886
60. *Kesselring*, H., Lehrer an der Sekundarschule in Bern . 1870
61. *Kissling*, Dr. E., Sekundarlehrer und Privatdocent, Bern . 1888
62. *Kobi*, Dr., Rektor der Kantonsschule Pruntrut . . . 1878
63. *Kocher*, Dr., Professor der Chirurgie, Bern 1872
64. *Koller*, G., Ingenieur, Bern 1872
65. *von Kostanecki*, Dr., Professor der Chemie, Bern . . 1896
66. *König*, Emil, Dr. phil., Gymnasiallehrer, Bern . . . 1893
67. *Körber*, H., Buchhändler in Bern 1872
68. *Kraft*, Alex., Besitzer des Bernerhofs, Bern. . . . 1872
69. *Krebs*, A., Seminarlehrer in Bern 1888
70. *Kronecker*, Dr. H., Professor der Physiologie, Bern . . 1884
71. *Kummer*, Dr. med. J., Arzt in Bern 1890
72. *Kürsteiner*, Dr. med., Bern 1895
73. **La Nicca*, Dr. med. R., Arzt in Bern 1899

74. *Lanz*, Dr. Em., Arzt in Biel 1876
75. *Leist*, Dr. K., Lehrer an der Sekundarschule in Bern . 1888
76. *Lerch*, M., Professor Dr. in Freiburg 1898
77. *v. Lerber*, A., Dr. med., Arzt in Laupen 1898
78. *Lindt*, Dr. med., Wilh., Arzt in Bern 1854
79. *Lindt*, Dr. med., W. jun., Arzt und Docent in Bern. . 1888
80. *Lochbrunner*, Th., Uhrmacher in Bern 1896
81. *Lory*, C. L., Rentier in Münsingen 1894
82. *Lüscher*, E., Dr. med. in Bern 1895
83. *Lütschg*, J., gewesener Waisenvater in Bern . . . 1872
84. *Marckwald*, Dr. Max, Frankfurt a. M. 1889
85. *Marti*, Christian, Sekundarlehrer in Nidau . . . 1889
86. *Marti*, Lehrer an der Neuen Mädchenschule in Bern. . 1892
87. *Michailoff*, S. Dr., meteorologische Centralstation Sofia . 1898
88. *Moser*, Dr. phil. Ch., Privatdocent in Bern . . . 1884
89. *Müller*, Emil, Apotheker in Bern 1882
90. *Müller*, Professor Dr., P., in Bern 1888
91. *Müller*, Max, Dr. med. in Bern. 1893
92. *v. Mutach*, Alfred, von Riedburg, Bern 1865
93. *Mützenberg*, Dr. med. Ernst, Spiez 1885
94. *Nanny*, Dr. Wilhelm, Arzt in Mühleberg 1890
95. *Nicolet*, L., Pharmacien, St. Imier 1892
96. *Pfister*, J. H., Mechaniker in Bern 1871
97. *Pflüger*, Dr. Professor in Bern 1889
98. *Pulver*, E., Apotheker in Interlaken 1890
99. *Pulver*, G., Vorsteher in Hindelbank 1891
100. *Renfer*, H., Dr. Prof. an der Handelsakademie in St. Gallen 1898
101. *Ris*, F., Lehrer der Physik am städtischen Gymnasium . 1869
102. *Rothenbach*, Alfred, Alt-Gasdirektor in Bern . . . 1872
103. *Rothenbühler*, Dr., Sekundarlehrer in Bern . . . 1896
104. *Rubeli*, Dr. O., Professor an der Thierarzneischule, Bern . 1892
105. *Sahli*, Professor Dr. H., Bern 1875
106. *Sahli*, Dr. W., Bern 1898
107. *Schaffer*, Dr., Kantonschemiker und Docent, Bern . . 1878
108. *Schlachter*, Dr., Gymnasiallehrer, Bern 1884
109. *Schmid*, Dr. W., Oberst, Oberinstruktor der Artillerie, Bern 1891
110. *Schürch*, Otto, Dr. phil., Zahnarzt, Langnau . . . 1898
111. *Schütz*, Assistent des Kantonschemikers, Bern . . . 1896
112. *Schwab*, Sam., Dr. med., Bern 1885
113. *Sidler*, Dr., Honorar-Professor, Bern 1856
114. *v. Speyr*, Dr. Prof., Direktor der Waldau . . . 1898
115. *Stäger*, Rob., Dr. med., Bern 1898
116. *Steck*, Th., Dr. phil., Conservator am Naturhist. Museum Bern 1878
117. *Steiger*, Hans, Oberstlieutenant, Bern. 1897
118. *Stooss*, Professor, Dr. med. Max, Arzt in Bern. . . 1883
119. *Strasser*, Dr. Hans, Professor der Anatomie, Bern . . 1872
120. *Strelin*, Alexander, Dr. med., Arzt, Bern 1898
121. *Streun*, G., Dr., Lehrer auf der Rütti 1898
122. *Studer*, Bernhard, sen., Bern 1844
123. *Studer*, Bernhard, Apotheker, Bern 1871
124. *Studer*, Dr. Theophil, Professor der Zoologie, Bern . . 1868

125. *Studer,* Wilhelm, Apotheker in Bern 1877
126. *Tambor,* J., Dr. phil., Docent, Laboratorium, Bern . . 1894
127. *Tanner,* G. H., Apotheker in Bern 1882
128. *Tavel,* Professor Dr. E., Bern 1892
129. *Thiessing,* Dr., Redaktor, Bern 1867
130. *v. Tscharner,* Dr. phil. L., Oberst, Bern 1874
131. *v. Tscharner-de Lessert,* Oberst, Bern 1878
132. *Tschirch,* Dr. A., Professor der Pharmakognosie in Bern . 1890
133. *Valentin,* Professor Dr. med. Ad., Arzt in Bern . . 1872
134. *Vögeli,* H., Dr. med., Thun 1898
135. *Volz,* Wilhelm, Apotheker in Bern 1887
136. *Wäber-Lindt,* A., Bern 1864
137. *Walthard,* Max, Dr. med., Arzt in Bern 1894
138. *Wanzenried,* Sekundarlehrer in Grosshöchstetten . . 1867
139. *v. Wattenwyl-v. Wattenwyl,* Jean, Oberst, Bern . . 1877
140. *Wilhelmi,* A., Dr. Thierarzt, Bern 1898
141. *Wollensack,* Heinrich, Dr. med., Giessbach . . . 1898
142. *Wüthrich,* Dr. phil. E., Direktor der Molkereischule Rütti 1892
143. *Wyss,* Dr. G., Buchdrucker in Bern 1887
144. *Wyttenbach-v. Fischer,* Dr., Arzt in Bern 1872
145. *Zeller,* R., Dr. phil., Geolog, Bern 1893
146. *Ziegler,* Dr. med., A., eidgenössischer Oberfeldarzt, Bern . 1859
147. *Zumstein,* Dr. med. J. J., in Marburg 1885
148. *Zwicky,* Lehrer am städtischen Gymnasium, Bern . . 1856

Im Jahre 1899 ausgetreten:

Baumberger, E., Sekundarlehrer in Basel 1890
Hafner, René, Apotheker in Biel 1891
Holzer, Ferd., Lehrer in Oberwyl bei Büren 1890
Jonquière, Dr., Professor der Medizin, Bern 1853
Münger, F., Dr. phil. 1892
Otti, Prof. in Aarau . . . . . —
Schönenberger, eidgenössischer Forstadjunkt, Bern . . . 1894
de Zehender, Marq., Ingenieur, Bern 1874

Korrespondierende Mitglieder:

1. *Flesch,* Dr. M., Arzt in Frankfurt 1882
2. *Gasser,* Dr. E., Professor der Anatomie in Marburg . . 1884
3. *Graf,* Lehrer in St. Gallen 1858
4. *Grützner,* Dr. A., Professor in Tübingen 1881
5. *Hiepe,* Dr. Wilhelm, in Birmingham 1874
6. *Imfeld,* Xaver, Topograph in Hottingen 1880
7. *Krebs,* Gymnasiallehrer in Winterthur 1864
8. *Landolf,* Dr., in Chili 1881
9. *Lang,* Dr. A., Professor in Zürich 1876

10. *Leonhard,* Dr.. Veterinär in Frankfurt 1870
11. *Lichtheim,* Professor in Königsberg 1881
12. *Metzdorf,* Dr. Prof. der Vet.-Schule in Proskau, Schlesien . 1870
13. *Petri,* Dr. Ed., Professor der Geographie in St. Petersburg 1883
14. *Regelsperger,* Gust., Dr., rue la Boétie 85, Paris . . 1883
15. *Rothenbach,* Lehrer am Lehrerseminar in Küssnacht . . 1871
16. *Wälchli,* Dr. med. D. J. Buenos Ayres 1873
17. *Wild,* Dr. Professor, in Zürich 1859

Rechnung der bernischen naturforschenden Gesellschaft pro 1898.

Einnahmen:

An Jahresbeiträgen	1128.—
An Eintrittsgeldern	100.—
An Zinsen	99.90
An Kapital (Reservefonds)	500.—
An verkauften Mitteilungen	4.50
	1832.40

Ausgaben:

Passiv-Saldo letzter Rechnung	123.05
Mitteilungen	450.85
Bibliothek	193.05
Lesezirkel	31.95
Sitzungen	183.85
Jahresversammlung d. schweiz. naturf. Gesellschaft	474.80
Diversa	86.95
	1544.50

Bilanz:

Einnahmen	1832.40
Ausgaben	1544.50
Aktiv-Saldo	287.90

Reservefonds:

Saldo letzter Rechnung	2300.—
Ablösung im Jahre 1898	500.—
Saldo auf 31. Dezember 1898	1800.—

Vermögensetat:

Das Vermögen der bernischen naturforschenden Gesellschaft besteht auf 31. Dezember 1898 in dem Reservefonds wie oben	1800.—
Dem Aktiv-Saldo pro 1898	287.90
	2087.90
Auf 31. Dezember 1897 betrug das Vermögen	2176.95
Auf 31. Dezember 1898 betrug dasselbe	2087.90
Es ergiebt sich demnach eine Verminderung um	Fr. 89.05

Der Kassier:

B. Studer-Steinhäuslin.

Genehmigt in der Sitzung vom 25. November 1899.

Dr. Ch. Moser.

Ueber eine mit der Umlaufszeit der Planeten zusammenhängende Relation.

(Vorgetragen in der Sitzung vom 12. Nov. 1898.)

I. Einleitende Bemerkungen. Geschichtliches.

Das ganze wissenschaftliche Gebäude der mathematischen Astronomie, wie es in den letzten zwei Jahrhunderten mit so vielem Geschicke und mit so grosser Eleganz und Vollkommenheit konstruirt wurde, gründet sich in der Hauptsache auf das Gesetz der allgemeinen Gravitation.

Es ist bewundernswürdig, mit welchem Scharfsinn und welcher zwingenden Logik schon *Newton* eine grosse Zahl von wichtigen Konsequenzen aus der Existenz des Gesetzes der allgemeinen Gravitation abzuleiten verstund. Dies geschah namentlich in seiner im Jahre 1686 erschienenen, epochemachenden, jedoch anfangs verhältnismässig wenig beachteten Arbeit «*Mathematische Prinzipien der Naturlehre*», einem der schönsten Denkmäler mathematisch-naturwissenschaftlicher Forschung.*)

Seither ist die rechnende Astronomie durch viele Erfolge gekrönt worden, namentlich seitdem das Gravitationsgesetz durch die sog. *Lagrange*'schen Fundamentalgleichungen einen glücklichen und sinnreichen mathematischen Ausdruck gefunden hat.

Wir geben zwar zu, dass — im Gegensatze zu manchen übrigen Zweigen der Forschung — die Fortschritte auf dem Gebiete der mathematischen Astronomie nur gemessene sind, und dass auch hier, trotz den glänzenden Arbeiten eines *Laplace, Gauss, Bessel, Leverrier, Tisserand* und anderer Männer, der Zukunft sich noch ein grosses Arbeitsfeld bietet. Ja, *H. Poincaré*, wohl einer der anerkanntesten der jetzt lebenden Mathematiker, kommt in seiner berühmten, vom schwedischen Könige preisgekrönten Arbeit über das Drei-Körper-Problem zu der Ueberzeugung, dass die vollständige Lösung dieses

*) Sir Isaac Newtons mathematische Prinzipien der Naturlehre wurden von *J. Ph. Wolfers* ins Deutsche übersetzt und sind im Verlag von Robert Oppenheim in Berlin erschienen.

Problems — wenn man je eine solche werde finden können, noch wesentlich andere und feinere mathematische Hülfsmittel, als wir sie jetzt besitzen*), erfordere. Damit wollen wir sagen, dass auf dem Gebiete der mathematischen Astronomie die zufälligen Entdeckungen nahezu ausgeschlossen sind. Die grossen Fortschritte, wie z. B. die Auffindung des Gesetzes der allgemeinen Gravitation, sind hier ebenso sehr, wenn nicht noch mehr als anderswo, das Produkt reiflicher, ja jahrelanger Ueberlegung und ernster, nicht nachlassender Arbeit.

Newton sagt uns denn auch selbst, dass er nur durch jahrelange Arbeit und auf das Drängen *Edmund Halley's,* seines Freundes, hin, dazu gekommen sei, der Herausgabe der erwähnten mathematischen Prinzipien näher zu treten.

Mit der in manchen Lehrbüchern stehenden bekannten Anekdote von dem vom Baume fallenden Apfel wird es daher nicht weit her sein. Dennoch wollen Sie mir gestatten, dieses anschauliche Bild zu benutzen, um speziell zu dem Gegenstand unserer heutigen bescheidenen Untersuchung überzugehen.

Die reifen Aepfel des Baumes fallen, sofern auf dieselben keine sie seitwärts verschiebende Kraft wirkt, in gerader Richtung nach der Erde hin.

Was würde in unserem Sonnensysteme mit den Planeten geschehen, wenn alle sie seitlich verschiebenden Kräfte verschwinden, mit anderen Worten, wenn die sog. Tangentialkraft plötzlich erlöschen würde? Wie die Aepfel fallen, würden die Planeten nach dem grossen und mächtigen, alles beherrschenden Centralkörper, nach der Sonne, hinstürzen.

Man kann nun die Fallzeit berechnen, die die einzelnen Planeten brauchen würden, um bei der Sonne anzulangen.

Wenn die Planeten sich in ihren mittleren Entfernungen von der Sonne befinden, so erhält man z. B.

für Merkur 15,55 mittlere Sonnentage,
für Venus 39,73 mittlere Sonnentage,
für die Erde 64,57 mittlere Sonnentage

und so fort.

---

*) *H. Poincaré.* Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. Acta mathematica, herausgegeben von *G. Mittag-Leffler.* Band 13, Seite 6.

Die Fallzeiten schwanken von etwa einem halben Monat, für Merkur, bis zu mehr als 29 Jahren, für Neptun.

Ein ruhender Körper, der sich in der Entfernung der Venus von der Sonne befindet, wird also etwas mehr als einen Monat Zeit gebrauchen, um bei der Sonne anzukommen. Die Erde selbst würde, wenn die Tangentialkraft plötzlich erlöschen würde, etwas mehr als zwei Monate erfordern. Sie würde sich in immer rascherem Laufe der Sonne nähern und schliesslich mit der kolossalen Geschwindigkeit von etwa 600000 m in der Sekunde mit der Sonne zusammenprallen.

Bemerkenswerth an diesen Fallzeiten nach der Sonne ist nun, dass sie mit den Umlaufszeiten der Planeten um die Sonne in engem Zusammenhange stehen. Vor etwa 30 Jahren wurde nämlich die Wahrnehmung gemacht, dass, wenn wir diese Fallzeiten mit einer bestimmten Constanten multipliziren, wir just die Umlaufszeiten der Planeten um die Sonne erhalten. Man vergleiche hierzu die Mittheilung und Beweisführung von *H. Rapin* im «Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences naturelles.» Vol. XVII.

C. Flammarion, der die genannte Wahrnehmung, unabhängig von andern, ebenfalls gemacht hat, gibt in seiner viel verbreiteten «Astronomie populaire» im wesentlichen nachstehende Zusammenstellung. Dabei bedeutet die erste Zahl die Fallzeit nach der Sonne, in mittleren Sonnentagen, τ_1, die zweite Zahl ist eine Constante, $\sqrt{32}$, und das Produkt, die dritte Zahl, die Umlaufszeit des Planeten um die Sonne, ebenfalls in mittleren Sonnentagen, T.

Merkur . .	15,55.	5,656854	=	88,0,
Venus . .	39,73.	5,656854	=	224,7,
Erde . . .	64,57.	5,656854	=	365,3,
Mars . . .	121,44.	5,656854	=	687,0,
Jupiter . .	765,87.	5,656854	=	4332,4,
Saturn . .	1902,03.	5,656854	=	10759,5,
Uranus . .	5424,57.	5,656844	=	30686,0,
Neptun . .	10628,73.	5,656854	=	60125,2,

Hiernach ist also:

$$\tau_1 \cdot \sqrt{32} = T$$

oder

$$\tau_1 = \frac{T}{\sqrt{32}} \qquad (1).$$

Der Zusammenstellung fügt der Autor wörtlich hinzu:

«Ce qu'il y a de plus curieux dans ces durées, c'est qu'en les multipliant toutes par un même chiffre, on reproduit l'année de chaque planète.

La première fois que j'ai fait cette remarque (c'était au commencement de l'année 1870), j'en suis resté perplexe pendant des mois entiers, et j'avais beau m'ingénier, ou chercher dans les livres, aucun principe de la mécanique céleste ne me mettait sur la voie pour en découvrir la cause. Quel était ce fameux coefficient 5,656 854? C'est la racine carrée de 32.

Mais qu'est-ce que cette racine carrée a à faire dans ce rapport si curieux et si inattendu entre les révolutions des planètes et leurs chutes dans le soleil?»

Dann wird eine Erklärung gegeben, in der die Fallzeit nach der Sonne hin als die halbe Umlaufszeit eines in langgestreckter Ellipse um die Sonne sich bewegenden Körpers angesehen wird. Die Anwendung des dritten *Kepler*'schen Gesetzes gibt dann sofort für die Constante den Werth $\sqrt{32}$.

Die durch die Gleichung (1) ausgedrückte Beziehung ist übrigens, wie am angegebenen Orte Rapin schreibt, schon vor Flammarion von *Adolphe de Saussure* bemerkt worden.

Mit Recht hält sich Rapin über das Erstaunen Flammarions auf und bemerkt, die Beziehung könne vielleicht nur desshalb etwas Ausserordentliches haben, dass sie so lange der astronomischen Rechnung entgangen sei.

R. Wolf, in seinem prächtigen Handbuch der Astronomie,*) nennt die Beziehung eine «merkwürdige». Dies veranlasst mich, derselben etwas näher zu treten, und sie nach zwei Richtungen hin zu verallgemeinern.

II. Verallgemeinerung.

Die Gleichung (1) erfordert, dass die Planeten in ihren mittlern Entfernungen von der Sonne sich befinden. Dies kommt aber im allgemeinen selten vor, während einer Umlaufszeit nur zweimal.

Bald wird die Entfernung von der Sonne grösser, als die mittlere, bald kleiner, infolge der elliptischen Bahnen der Planeten.

*) *R. Wolf.* Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Litteratur. In zwei Bänden. Zürich. Druck und Verlag von F. Schulthess. Vierter Halbband. No. 484, am Schluss.

Demnach muss sich auch der Werth der Fallzeit nach der Sonne ändern. Bezeichnen wir denselben mit

$$t_1,$$

so ist t_1 grösser als τ_1, wenn der Planet weiter entfernt ist, als die mittlere Distanz Planet-Sonne beträgt, dagegen kleiner als τ_1, wenn der Planet in seiner Bahn sich näher bei der Sonne befindet. Während einer Umlaufszeit des Planeten ändert die Fallzeit t_1, beständig ihren Werth, dagegen bleibt T constant.

Um die Relation zwischen der Fallzeit nach der Sonne und der Umlaufszeit darstellen zu können, müssen wir daher schreiben:

$$t_1 = F_\alpha \cdot \tau_1,$$

das heisst, wenn wir für τ_1 seinen Werth aus der Gleichung (1) substituiren:

$$t_1 = F_\alpha \cdot \frac{T}{\sqrt{8s}} \qquad (2).$$

Der Faktor F_α wird sich für jede Entfernung des Planeten von der Sonne numerisch darstellen lassen. Ob sich für denselben jedoch ein einfaches mathematisches Gesetz ergibt, wird die Untersuchung, die nachstehend ausgeführt ist, zu zeigen haben. Jedenfalls können wir jetzt schon so viel sagen, dass für die mittlere Entfernung des Planeten von der Sonne

$$t_1 = \tau_1$$

und daher

$$F_\alpha = 1$$

sein muss.

Die zweite Verallgemeinerung, die sich ebenfalls sofort aufdrängt, besteht darin, dass wir die Fallzeit nach der Sonne nicht gleich für den ganzen Weg Planet-Sonne, sondern nur für einen Theil dieses Weges in Beziehung zur Umlaufszeit des Planeten setzen. Diese Verallgemeinerung drängt sich uns namentlich auch dann auf, wenn wir bedenken, dass weder die Sonne, noch die Planeten mathematische Punkte sind, sondern mit ihren Massen ein gewisses Volumen erfüllen, dass also die Distanz zwischen den nächstliegenden Punkten beider Körper kleiner ist, als die Distanz r der in Rechnung gebrachten zwei Massenpunkte, in deren einem wir uns die Masse der Sonne, im andern die Masse des Planeten konzentrirt denken.

Bezeichnen wir daher einen Theil, etwa den n. Theil der Distanz r, mit s_n, so ist die Fallzeit für den Fallraum

$$s_n = \frac{r}{n}$$

in Beziehung zu setzen zur Umlaufszeit T des Planeten. Sei diese Fallzeit nach der Sonne für den Fallraum s_n gleich

$$t_n,$$

so können wir wieder für alle Werthe n,

$$1 \leqq n \leq \infty,$$

die numerische Relation aufstellen:

$$t_n = F_\beta \cdot t_1 \qquad (3).$$

wo F_β offenbar in den Grenzen 1 und 0 eingeschlossen ist. Ob sich auch für den Faktor F_β ein einfaches mathematisches Gesetz ergibt, lehrt uns ebenfalls die nachstehende Untersuchung.

Wenn wir die Gleichungen (2) und (3) kombiniren, erhalten wir:

$$t_n = F_\alpha \cdot F_\beta \cdot \frac{T}{\sqrt{32}} \qquad (4).$$

Indem man

$$F = F_\alpha \cdot F_\beta \qquad (5).$$

setzt, folgt endlich:

$$t_n = F \cdot \frac{T}{\sqrt{32}} \qquad (6).$$

Wir wollen nun im Nachstehenden zeigen, dass F ein einfaches mathematisches Gesetz befolgt und für alle elliptischen Bahnen den positiven Werth von $\sqrt{8}$ nicht übersteigen kann.

III. Bestimmung der Fallzeit t_n.

Die Masse der Sonne sei gleich 1, diejenige des betrachteten Planeten gleich m. Wir denken uns die Massen je in den Punkten S und P konzentrirt. Die Entfernung dieser beiden Punkte sei r. Die Masse 1 möge in der Entfernung f die Anziehung 1 ausüben. Unmittelbar vor dem Beginne der Fallzeit mögen beide Massen sich relativ in Ruhe befinden. Sie mögen ferner keinen störenden Wirkungen eines dritten Körpers ausgesetzt sein. Wir führen also die Betrachtung für das Zwei-Körper-Problem durch. Nach der Zeit t haben beide Körper die Entfernung

$$r - s.$$

Die Annäherung der beiden Körper beträgt also s. Selbstverständlich fällt nicht nur der Körper m gegen die Sonne, sondern auch die Sonne, und wenn ihre Masse noch so gross wäre, gegen den Körper m. In der Entfernung $r - s$ übt, wenn die Kraft im umge-

kehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkt, die Masse 1 die Anziehung

$$\frac{f^2}{(r-s)^2}$$

aus und entsprechend die Masse m die Anziehung

$$m\,\frac{f^2}{(r-s)^2}.$$

Die Beschleunigung der Annäherung beträgt alsdann zusammen:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = (1+m)\,\frac{f^2}{(r-s)^2} \qquad (7).$$

Die Integration der Gleichung (7) bietet bekanntlich keinerlei Schwierigkeiten und lässt sich genau ausführen.

Da identisch

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2\,\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d^2s}{dt^2}$$

ist, so folgt, unter Berücksichtigung von (7), nachdem man beiderseitig mit dt multiplicirt hat und dann integrirt:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2\,(1+m)\,f^2\int\frac{ds}{(r-s)^2} + \text{Const.} \qquad (7')$$

Führt man die Integration aus und berücksichtigt, zur Bestimmung der Constanten, dass für $s = o$ die Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt} = o$ ist, so folgt:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2\,(1+m)\,f^2\left(\frac{1}{r-s} - \frac{1}{r}\right) \qquad (8)$$

und hieraus:

$$dt = \frac{\sqrt{\frac{r}{2}}}{f\sqrt{1+m}}\sqrt{\frac{r-s}{s}}\,ds \qquad (9).$$

wo wir die Quadratwurzeln als positiv verstehen.

Aus (9) wird:

$$t = \frac{\sqrt{\frac{r}{2}}}{f\sqrt{1+m}}\int\sqrt{\frac{r-s}{s}}\,ds + \text{Const.} \qquad (10).$$

Die Constante bestimmen wir so, dass für $s = o$, ebenfalls $t = o$ wird.

Um

$$J = \int \sqrt{\frac{r-s}{s}}\, ds$$

auszumitteln, setze man:

$$s = r \sin^2 \varphi.$$

Führt man die Substitution aus, so wird

$$J = r \int (1 + \cos 2\varphi)\, d\varphi.$$

Man erhält mithin das folgende Resultat, wobei wir die auftretenden Quadratwurzeln ebenfalls als positiv verstehen wollen:

$$J = r \left(\arcsin \sqrt{\frac{s}{r}} + \sqrt{\frac{s}{r}\left(1 - \frac{s}{r}\right)} \right),$$

folglich geht (10) über in:

$$t = \frac{r\sqrt{\frac{r}{2}}}{f\sqrt{1+m}} \left(\arcsin \sqrt{\frac{s}{r}} + \sqrt{\frac{s}{r}\left(1 - \frac{s}{r}\right)} \right) + \text{Const.}$$

Setzt man die Grössen s und t gleich null, so sieht man, dass auch die Constante gleich null sein muss, wenn wir die periodische Funktion $\arcsin \sqrt{\frac{s}{r}}$ so verstehen, dass sie für $s = o$, mit null zu beginnen habe. Wir erhalten also:

$$t = \frac{r\sqrt{\frac{r}{2}}}{f\sqrt{1+m}} \left(\arcsin \sqrt{\frac{s}{r}} + \sqrt{\frac{s}{r}\left(1 - \frac{s}{r}\right)} \right),$$

mithin, wenn

$$\frac{r}{s} = n$$

ist:

$$t_n = \frac{r\sqrt{\frac{r}{2}}}{f\sqrt{1+m}} \left(\arcsin \sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)} \right) \qquad (11).$$

Gleichung (11) lässt sich auch folgendendermassen schreiben:

$$t_n = \frac{\frac{r}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}}{f\sqrt{1+m}} (\omega + \sin \omega) \qquad (12),$$

wo

$$\sin \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{1}{n}}$$

ist. Die periodische Funktion ω hat, für $n = \infty$, entsprechend der vorgenommenen Constantenbestimmung, mit null anzufangen. Mit obiger Gleichung (12) ist der Werth der Fallzeit t_n ermittelt.

IV. Beziehung der Fallzeit t_n zur Umlaufszeit T.

Wenn wir die im vorigen Abschnitte gewählten Bezeichnungen, für die Massen der Sonne und des Planeten sowie für die Distanz f (*Gauss*'sche Zahl), beibehalten und mit a die mittlere Entfernung des Planeten von der Sonne, oder die halbe grosse Axe der Bahn-Ellipse, bezeichnen, so ist die Umlaufszeit T des Planeten um die Sonne bekanntlich gegeben durch die Gleichung:

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{f\sqrt{1+m}} \qquad (13),$$

wobei π die bekannte Transcendente bedeutet. Für die Ableitung von (13), die in jedem Lehrbuche enthalten ist, vergleiche man z. B. das erwähnte Handbuch von *R. Wolf*, Seite 328, oder auch *F. Tisserand*, in seinem «Traité de Mécanique céleste», Bd. I, Seite 99.

Aus den Gleichungen (12) und (13) lassen sich die von den Massen abhängigen Grössen eliminiren, und wir erhalten die unserer Verallgemeinerung entsprechende charakteristische Relation:

$$t_n = \left(\frac{r}{a}\right)^{3/2} \cdot \frac{\omega + \sin\omega}{\pi} \cdot \frac{T}{\sqrt{32}} \qquad (14).$$

Man erhält also für den Faktor F den Werth:

$$F = \left(\frac{r}{a}\right)^{3/2} \cdot \frac{\omega + \sin\omega}{\pi} \qquad (15)$$

und sieht, dass er sich in der That durch einen einfachen analytischen Ausdruck darstellen lässt. Derselbe liesse sich, was wir hier nicht ausführen wollen, mit der Cykloide in Verbindung bringen.

Ist $n = 1$, so wird $\sin\omega = 0$, $\omega = \pi$, also

$$t_1 = \left(\frac{r}{a}\right)^{3/2} \cdot \frac{T}{\sqrt{32}} \qquad (16).$$

Somit ist

$$F_\alpha = \left(\frac{r}{a}\right)^{3/2} \qquad (17).$$

Wird in (14) der Abstand r gleich dem mittlern Abstand a gesetzt, so geht t_n in τ_n über, und wir haben:

$$\tau_n = \frac{\omega + \sin\omega}{\pi} \cdot \frac{T}{\sqrt{32}}. \tag{18}$$

Der Faktor F_β ergibt sich zu:

$$F_\beta = \frac{\omega + \sin\omega}{\pi}, \tag{19}$$

wo nach der Voraussetzung

$$\sin\frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{1}{n}}$$

ist und ω, für $n = \infty$, den Werth null hat.

Wir wollen noch zeigen, welche Grenzen F für die elliptischen Bahnen annehmen kann.

Für die nämliche elliptische Bahn ist a constant und r liegt innerhalb der Grenzen:

$$a(1-e) \leqq r \leqq a(1+e),$$

wo e die numerische Excentrizität der Bahn-Ellipse darstellt.

Dividiren wir mit der positiven Grösse a, so erhalten wir:

$$(1-e) \leqq \frac{r}{a} \leqq (1+e).$$

Nehmen wir endlich den Grenzwerth von e, $e = 1$, an, so wird die elliptische Bahn zu einer parabolischen. Wir erhalten also:

$$0 \leqq \frac{r}{a} \leqq 2,$$

mithin

$$0 \leqq \left(\frac{r}{a}\right)^{3/2} \leqq \sqrt{8} \tag{20},$$

wo wir die Quadratwurzel immer positiv verstehen.

Wir haben schon früher gesehen, dass der Faktor F_β in den Grenzen 0 und 1 eingeschlossen sein muss. Dies ist auch thatsächlich der Fall, da wir $\sqrt{\frac{1}{n}}$, also auch $\sin\frac{\omega}{2}$ positiv verstanden haben und die periodische Funktion ω, für $n = \infty$, nach der vorgenommenen Constantenbestimmung mit null zu beginnen hat.

Multipliziren wir also in der Relation (20) die untere Grenze 0 mit dem kleinsten Werthe von F_β, mit 0, und die obere Grenze, $\sqrt{8}$, mit dem grössten Werthe von F_β, mit 1, so erhalten wir

$$0 \leqq F \leqq \sqrt{8} \qquad (21).$$

Der Faktor F kann also für alle Punkte des Raumes die Grenzen 0 und 2, 82843 nicht überschreiten.

Spezialisiren wir die Gleichung (14) noch für den Fall $n = 2$, so folgt:

$$t_2 = \left(\frac{r}{a}\right)^{3/2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right)\frac{T}{\sqrt{32}} \qquad (22).$$

Für den fernern Spezialfall, $n = 1$, die Erde und den heutigen Abend (12. November 1898) erhalten wir als Werth des Faktors F, wenn wir nach dem Annuaire du Bureau des Longitudes

$$r = 146{,}91$$

und

$$a = 148{,}49$$

Milliarden m setzen:

$$F = 0{,}9841.$$

Würde die Tangentialkraft jetzt plötzlich erlöschen, so würde demnach die Erde in

$$t_1 = 0{,}9811 \cdot \frac{365{,}26}{\sqrt{32}}$$

$$= 63{,}54$$

mittlern Sonnentagen sich mit der Sonne vereinigt haben.

* * *

Stellen wir zum Schlusse noch einige Resultate zusammen.

1. Zwischen der Umlaufszeit T eines Planeten um die Sonne und der Fallzeit t_n, die erforderlich ist, um den n. Theil des Fallraumes Planet-Sonne zurückzulegen, besteht die Relation:

$$t_n = F \cdot \frac{T}{\sqrt{32}}.$$

2. Der Faktor F hat folgenden Werth:

$$F = \left(\frac{r}{a}\right)^{3/2} \cdot \frac{\omega + \sin\omega}{\pi},$$

wo r den ganzen Fallraum Planet-Sonne und a die grosse Halbaxe der Planetenbahn darstellt, $\left(\frac{r}{a}\right)^{3/2}$ *mit seinem positiven Werthe zur Anrechnung gelangt,* $\sin\frac{\omega}{2}$ *den positiven Werth von* $\sqrt{\frac{1}{n}}$, *ω den kleinsten dieser Definition entsprechenden positiven Bogenwerth und π die bekannte Transcendente bedeutet.*

3. Der Faktor F ist unabhängig von der Masse des Planeten.

4. Der Werth von F liegt für jeden Punkt der elliptischen Bahn innerhalb der Grenzen 0 und 2,82843.

5. Für n = 1 und r = a ergibt sich, wenn in diesem Spezialfalle t_n mit τ_1 bezeichnet wird, die von A. de Saussure aufgestellte Relation, $\tau_1 = \frac{T}{\sqrt{32}}$.

Georg Sidler.

Über eine algebraische Reihe.

(Eingereicht den 28. Juni 1899.)

§ 1. Der absolute Wert der Variabeln x sei < 1, und n eine ganze positive Zahl inklusive null. Unter diesen Voraussetzungen betrachten wir die Funktion

(1.) $$S_n = 1 + 2^n \cdot x + 3^n \cdot x^2 + 4^n \cdot x^3 + \ldots \text{ in inf.}$$

Wir haben

(2.) $$S_n = \frac{d}{dx}(x \cdot S_{n-1}).$$

Da nun andererseits $S_0 = \frac{1}{1-x}$, so erhalten wir aus (2.) successive

$$S_1 = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad S_2 = \frac{1+x}{(1-x)^3}, \quad S_3 = \frac{1+4x+x^2}{(1-x)^4},$$

$$S_4 = \frac{1+11x+11x^2+x^3}{(1-x)^5}, \quad S_5 = \frac{1+26x+66x^2+26x^3+x^4}{(1-x)^6}$$

und allgemein für ein beliebiges ganzes und positives n

Obstehendes ist grössernteils eine Übertragung einer in Band I (Jahrgang 1856) der «Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich» von mir publizierten Arbeit «Sur une série algébrique.» Den Anstoss, auf dieselbe zurückzukommen, gab das Interméd. des Math. Jahrgang 1899, p. 51, wo in Nr. 1465 nach dem Beweise einer Formel gefragt wird, die als spezieller Fall für $k = 0$ in der obigen Formel 9 enthalten ist. Jener frühern Arbeit hinzugefügt habe ich den Beweis des Clausen-Staudt'schen Satzes über die Bernoullischen Zahlen, der, wie mich s. Z. L. Schläfli darauf aufmerksam gemacht, in einfacher Weise aus einer von mir gegebenen independenten Darstellung der genannten Zahlen hervorgeht. Ausdrücklich bemerke ich, dass die betreffende Formel 25 wie die übrigen hier gegebenen Darstellungen der Bernoullischen Zahlen, mit Ausnahme von 23 und 26, sich schon in der obgenannten, 1856 von mir publizierten Arbeit finden.

(3.) $$S_n = \frac{a_{n,0} + a_{n,1} \cdot x + a_{n,2} \cdot x^2 \ldots + a_{n,n-1} \cdot x^{n-1}}{(1-x)^{n+1}},$$

wo $a_{n,0}$, $a_{n,1}$, $a_{n,2} \ldots a_{n,n-1}$ ganze positive Zahlen darstellen, und wo $a_{n,s} = 0$, sobald das ganzzahlige s sei es negativ, sei es $> n-1$ ist.

In der That, führen wir diesen Ausdruck in (2.) ein, so sehen wir, dass derselbe für ein beliebiges ganzes und positives n gilt. Und für die Coeffizienten $a_{n,s}$ ergiebt sich die Relation

(4.) $$a_{n,s} = (s+1) \cdot a_{n-1,s} + (n-s) \cdot a_{n-1,s-1}.$$

Gemäss den obigen Ausdrücken für S_1, S_2, . . S_5 ist für $n = 1$, 2, 3, 4, 5

(5.) $$a_{n,s-1} = a_{n \cdot n-s}.$$

Aus (4.) aber geht hervor

$$a_{n,n-s} = (n-s+1) \cdot a_{n-1,n-s} + s \cdot a_{n-1,n-s-1}$$
$$a_{n,s-1} = (n-s+1) \cdot a_{n-1,s-2} + s \cdot a_{n-1,s-1}.$$

Wenn also die Relation (5.) für den Index $n-1$ gilt, so gilt dieselbe auch für den Index n, und somit gilt dieselbe allgemein.

Schreiben wir die Formel (3.)

$$a_{n,0} + a_{n,1} \cdot x + a_{n,2} \cdot x^2 \ldots + a_{n,n-1} \cdot x^{n-1} = (1-x)^{n+1} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)^n \cdot x^s$$

und setzen die Coeffizienten derselben Potenzen von x auf beiden Seiten einander gleich, so kommt, wenn wir mit $\binom{n}{s}$ den Coeffizienten von x^s in der Entwicklung von $(1+x)^n$ bezeichnen:

$$a_{n,0} = 1^n$$
$$a_{n,1} = 2^n - \binom{n+1}{1} \cdot 1^n$$
$$a_{n,2} = 3^n - \binom{n+1}{1} \cdot 2^n + \binom{n+1}{2} \cdot 1^n$$

u. s. w.

(6.) $$a_{n,s} = (s+1)^n - \binom{n+1}{1} s^n + \binom{n+1}{2} \cdot (s-1)^n \ldots \ldots (-1)^s \cdot \binom{n+1}{s} \cdot 1^n,$$

und weiter gewinnen wir die Identität $0 = a_{n,n+s}$, d. h.

$$(7.)\quad 0 = (n+s+1)^n - \binom{n+1}{1}(n+s)^n + \binom{n+1}{2}(n+s-1)^n \ldots (-1)^{n+1}\cdot\binom{n+1}{n+1}\cdot s^n,$$

wo s eine ganze positive Zahl inklusive null und n eine der Zahlen 1, 2, 3 . . . in inf.

§ 2. Aus der Rekursionsgleichung (4) folgt

$$\sum_{s=0}^{n-1} a_{n,s} = \sum_{s=0}^{n-2}(s+1)\cdot a_{n-1,s} + \sum_{s=1}^{n-1}(n-s)\cdot a_{n-1,s-1} = \sum_{s=0}^{n-2}\left\{(s+1)\,a_{n-1,s} + (n-s-1)\,a_{n-1,s}\right\}$$

d. h.

$$\sum_{s=0}^{n-1} a_{n,s} = n\cdot\sum_{s=0}^{n-2} a_{n-1,s} = n!\,a_{1,0}$$

Aber $a_{1,0} = 1$, und somit

$$(8.)\qquad a_{n,0} + a_{n,1} + a_{n,2} \ldots + a_{n,n-1} = n!$$

und da $a_{n,n+s} = 0$, wenn s eine beliebige positive ganze Zahl inklusive null ist, so können wir diese Relation schreiben:

$$\sum_{s=0}^{n+h-1} a_{n,s} = n!$$

wo h eine beliebige positive ganze Zahl inklusive null, d. h. wenn wir für $a_{n,s}$ die Ausdrücke (6.) einsetzen:

$$n! = 1^n\cdot\left\{1 - \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} \ldots (-1)^{n+h-1}\binom{n+1}{n+h-1}\right\} +$$

$$+ 2^n\cdot\left\{1 - \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} \ldots (-1)^{n+h-2}\binom{n+1}{n+h-2}\right\} +$$

$$+ 3^n\cdot\left\{1 - \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} \ldots (-1)^{n+h-3}\binom{n+1}{n+h-3}\right\} +$$

. . . . . .

$$+ (n+h-1)^n \cdot \left\{ 1 - \binom{n+1}{1} \right\} +$$

$$+ (n+h)^n.$$

Aber $1 - \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} \ldots (-1)^s \binom{n+1}{s}$ ist der Coefficient von x^s in der Entwicklung von $(1-x)^{-1} \cdot (1-x)^{n+1}$ also

$$(\alpha.) \quad 1 - \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} \ldots (-1)^s \binom{n+1}{s} = (-1)^s \binom{n}{s},$$

und wir erhalten

$$(9.) \qquad n! =$$

$$= (n+k)^n - \binom{n}{1}(n+k-1)^n + \binom{n}{2}(n+k-2)^n \ldots$$

$$\ldots (-1)^{n+k-1} \cdot \binom{n}{n+k-1} \cdot 1^n$$

oder auch

$$(9.^1) \qquad n! =$$

$$= (n+k)^n - \binom{n}{1}(n+k-1)^n + \binom{n}{2}(n+k-2)^n \ldots (-1)^n \binom{n}{n} k^n,$$

wo k eine beliebige positive ganze Zahl inklusive null darstellt.

§ 3. Zerlegen wir den Ausdruck rechter Hand in (3.) in Partialbrüche, indem wir setzen

$$(u.) \quad \frac{a_{n,0} + a_{n,1} \cdot x \ldots + a_{n,n-1} \cdot x^{n-1}}{(1-x)^{n+1}} =$$

$$= \frac{A_{n,n}}{(1-x)^{n+1}} - \frac{A_{n,n-1}}{(1-x)^n} \ldots (-1)^{n-1} \cdot \frac{A_{n,1}}{(1-x)^2}.$$

Schreiben wir $x = 1 - h$, so haben wir

$$A_{n,n} - A_{n,n-1} \cdot h + \ldots A_{n,n-2} h^2 \ldots (-1)^{n-1} \cdot A_{n,1} \cdot h^{n-1} =$$

$$= a_{n,0} + a_{n,1} \cdot (1-h) + a_{n,2} \cdot (1-h)^2 \ldots + a_{n,n-1} \cdot (1-h)^{n-1},$$

und hieraus, wenn wir die Coeffizienten derselben Potenzen von h einander gleich setzen

$$A_{n,n} = a_{n,0} + a_{n,1} + a_{n,2} \ldots + a_{n,n-1}$$

$$A_{n,n-1} = \binom{1}{1} a_{n,1} + \binom{2}{1} a_{n,2} \ldots + \binom{n+1}{1} a_{n,n-1}$$

$$A_{n,n-2} = \binom{2}{2} a_{n,2} + \binom{3}{2} a_{n,3} \cdots + \binom{n-1}{2} a_{n,n-1}$$

. . . .

$$A_{n,1} = \binom{n-1}{n-1} a_{n,n-1}$$

oder mit Rücksicht auf die Relation (5)

$$(10.)\begin{cases} A_{n,1} = a_{n,0} \\ A_{n,2} = \binom{n-1}{1} a_{n,0} + a_{n,1} \\ A_{n,3} = \binom{n-1}{2} a_{n,0} + \binom{n-2}{1} a_{n,1} + a_{n,2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{n,n} = \binom{n-1}{n-1} a_{n,0} + \binom{n-2}{n-2} a_{n,1} \cdots + \binom{1}{1} a_{n,n-2} + a_{n,n-1} \end{cases}$$

oder allgemein

$$(10.^1) \qquad A_{n,s} = \sum_{k=0}^{s-1} \binom{n-k-1}{s-k-1} a_{n,k}.$$

Auch die Coefficienten $A_{n,s}$ sind somit ganze positive Zahlen.

Schreiben wir aber mit Beachtung, dass $a_{n,s-1} = a_{n,n-s}$ ist: die Gleichung (u).

$$a_{n,n-1} + a_{n,n-2} \cdot x \cdots + a_{n,1} \cdot x^{n-2} + a_{n,0} \cdot x^{n-1} =$$
$$= A_{n,n} - A_{n,n-1}(1-x) + A_{n,n-2}(1-x)^2 \ldots (-1)^{n-1} . A_{n,1}(1-x)^{n-1},$$

und vergleichen die Coefficienten der nämlichen Potenzen von x mit einander, so erhalten wir umgekehrt

$$(11.)\begin{cases} a_{n,0} = A_{n,1} \\ a_{n,1} = A_{n,2} - \binom{n-1}{1} A_{n,1} \\ a_{n,2} = A_{n,3} - \binom{n-2}{1} A_{n,2} + \binom{n+1}{1} A_{n,1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n,n-1} = A_{n,n} - \binom{1}{1} A_{n,n-1} + \binom{2}{2} A_{n,n-2} \cdots \\ \qquad \cdots (-1)^{n-1} \binom{n-1}{n-1} A_{n,1} \end{cases}$$

oder

$$(11.^1) \qquad a_{n,s} = \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{n-s+k+1}{k} A_{n,\,s-k+1}$$

Substituieren wir in (10.^{1}) für die $a_{n,k}$ ihre Ausdrücke aus (6.), so erhalten wir

$$\begin{aligned} A_{n,s} = 1^n \cdot \Big\{ &\binom{n+1}{0}\binom{n-1}{s-1} - \binom{n+1}{1}\binom{n-2}{s-2} \cdot \cdot \\ &\cdot \cdot (-1)^{s-1} \cdot \binom{n+1}{s-1}\binom{n-s}{0} \Big\} + \\ + 2^n \cdot \Big\{ &\binom{n+1}{0}\binom{n-2}{s-2} - \binom{n+1}{1}\binom{n-3}{s-3} \cdot \cdot \\ &\cdot \cdot (-1)^{n-2} \cdot \binom{n+1}{s-2}\binom{n-s}{0} \Big\} + \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; &\cdot \; \cdot \\ + (s-1)^n \cdot \Big\{ &\binom{n+1}{0}\binom{n-s+1}{1} - \binom{n+1}{1}\binom{n-s}{0} \Big\} + \\ + s^n \cdot &\binom{n+1}{0}\binom{n-s}{0}, \end{aligned}$$

oder

$$A_{n,s} = \sum_{k=1}^{s} k^n \cdot \sum_{r=0}^{s-k} (-1)^r \cdot \binom{n+1}{r}\binom{n-k-r}{s-k-r} =$$

$$= \sum_{k=0}^{s-1} (s-k)^n \cdot \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \cdot \binom{n+1}{r}\binom{n-s+k-r}{k-r}.$$

Der Coeffizient von $(s-k)^n$ ist hier gleich $(-1)^k$. Coeffizient von x^k im Produkte $(1+x)^{n+1} \cdot (1+x)^{-(n-s+1)}$, also

$$= (-1)^k \cdot \binom{s}{k}, \text{ d. h.:}$$

$$\begin{aligned} &\binom{n+1}{0}\binom{n-s+k}{k} - \binom{n+1}{1}\binom{n-s+k-1}{k-1} + \binom{n+1}{2}\binom{n-s+k-2}{k-2} \cdot \cdot \\ &\cdot \cdot (-1)^k \cdot \binom{n+1}{k}\binom{n-s}{0} = (-1)^k \cdot \binom{s}{k}. \end{aligned} \qquad (\beta.)$$

oder

$$(\beta.') \quad \binom{n-s}{0}\binom{n+1}{k} - \binom{n-s+1}{1}\binom{n+1}{k-1} + \binom{n-s+2}{2}\binom{n+1}{k-2} \cdot \cdot$$

$$\ldots (-1)^k \binom{n-s+k}{k} \binom{n+1}{0} = \binom{s}{k}.$$

Wir bekommen somit

$$(12.) \qquad A_{n,s} = \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k \cdot \binom{s}{k} (s-k)^n ,$$

oder auch

$$(12.') \qquad A_{n,s} = (-1)^s \cdot \sum_{k=1}^{s} (-1)^k \cdot \binom{s}{k} \cdot k^n,$$

d. h.:

$$(12.'') \begin{cases} A_{n,1} = 1^n \\ A_{n,2} = 2^n - \binom{2}{1} 1^n \\ A_{n,3} = 3^n - \binom{3}{1} 2^n + \binom{3}{2} 1^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{n,n} = n^n - \binom{n}{1} (n-1)^n + \binom{n}{2} (n-2)^n \ldots \\ \qquad\qquad \ldots (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} \cdot 1^n . \end{cases}$$

und infolge der Relation (9) ist

$$A_{n,n} = n!$$

Da in (u) linker Hand der Nenner um zwei Grade höher als der Zähler ist, also rechts ein Term $\frac{A_{n,0}}{1-x}$ nicht auftreten kann, so haben wir zu setzen

$$(13.) \qquad A_{n,0} = 0.$$

Wenn ferner im Ausdruck (10') von $A_{n,s}$ der zweite Index s grösser als n wird, so werden rechter Hand sämtliche Terme null. Somit haben wir

$$(14.) \quad 0 = A_{n,n+k+1} =$$

$$= \binom{n+k+1}{0} (n+k+1)^n - \binom{n+k+1}{1} (n+k)^n +$$

$$+ \binom{n+k+1}{2} (n+k-1)^n \ldots (-1)^{n+k} \binom{n+k+1}{n+k} \cdot 1^n,$$

wenn k irgend eine positive ganze Zahl inklusive null darstellt. —

Oder

$$(14.') \qquad \sum_{r=1}^{m} (-1)^r \binom{m}{r} \cdot r^n = 0, \text{ wenn } m > n.$$

Zufolge der Relation (2) haben wir

$$\sum_{s=1}^{n} (-1)^s \cdot A_{n,s} \cdot (1-x)^{-s-1} = -\frac{d}{dx} \sum_{s=1}^{n-1} (-1)^s \cdot A_{n-1,s} \cdot x\,(1-x)^{-s-1}$$

Schreiben wir rechts den ersten variabeln Faktor $x = 1 - (1 - x)$, so wird die rechte Seite

$$-\frac{d}{dx} \sum_{s=1}^{n-1} (-1)^s \cdot A_{n-1,s} \cdot \left\{ (1-x)^{-s-1} - (1-x)^{-s} \right\},$$

oder wenn wir in der ersten Summe $s - 1$ an die Stelle von s setzen, so haben wir, da $A_{n-1,0} = 0$ und $A_{n-1,n} = 0$ ist:

$$\frac{d}{dx} \sum_{s=1}^{n} (-1)^s \cdot \left\{ A_{n-1,s-1} + A_{n-1,s} \right\} \cdot (1-x)^{-s} = \sum_{s=1}^{n} (-1)^s \cdot s\,(A_{n-1,s-1} + A_{n-1,s})\,(1-x)^{-s-1}.$$

Wir erhalten also für die Coeffizienten $A_{n,s}$ die Relation

$$(15.) \qquad A_{n,s} = s \cdot (A_{n-1,s} + A_{n-1,s-1}).$$

Wir behaupten aber, es sei $A_{n,s}$ durch $s!$ teilbar. In der That, setzen wir $A_{n,s} = s!\, c_{n,s}$, so giebt (15)

$$c_{n,s} = s \cdot c_{n-1,s} + c_{n-1,s-1}.$$

Aber $c_{n,0} = 0$ und $c_{n,1} = 1$ und somit werden die Grössen $c_{n,s}$ sämtlich ganze Zahlen sein, w. z. z.

Wir haben daher

$$(16.) \quad s^n - \binom{s}{1}(s-1)^n + \binom{s}{2}(s-2)^n \ldots (-1)^{s-1} \cdot \binom{s}{s-1} 1^n \equiv 0 \pmod{s!}, \text{ wenn } s \leqq n$$
$$= 0 \quad , \text{ wenn } s > n.$$

Wenn wir in der Identität

$$1+2^n x+3^n x^2+4^n x^3+\ldots \text{ in inf.} = \frac{a_{n,0}+a_{n,1}x\ldots a_{n,n-1}x^{n-1}}{(1-x)^{n+1}}$$

die rechte Seite nach Potenzen von x entwickeln, und die Coefficienten derselben Potenzen auf beiden Seiten einander gleich setzen, so erhalten wir

$$(17.) \qquad (s+1)^n =$$
$$=\binom{n+s}{s} a_{n,0} + \binom{n+s-1}{s-1} a_{n,1} + \binom{n+s-2}{s-2} a_{n,2} \cdots + \binom{n}{0} . a_{n,s}.$$

Wenn $s \gtrless n$, so bricht die rechte Seite in (17) nach dem Gliede $\binom{s\,|-1}{s-n+1} a_{n,n-1}$ ab.

Verfahren wir auf dieselbe Weise mit der Identität

$$1+2^n x+3^n x^2+4^n x^3+\ldots \text{ in inf.} =$$
$$=(-1)^{n+1}\left\{\frac{A_{n,1}}{(1-x)^2} - \frac{A_{n,2}}{(1-x)^3} + \frac{A_{n,3}}{(1-x)^4} \cdots (-1)^{n+1}\frac{A_{n,n}}{(1-x)^{n+1}}\right\},$$

so kommt

$$(18.) \qquad (-1)^{n+1} . (s+1)^n =$$
$$=\binom{s+1}{1} A_{n,1} - \binom{s+2}{2} A_{n,2} + \binom{s+3}{3} A_{n,3} \cdots + (-1)^{n+1}\binom{s+n}{n} A_{n,n}.$$

Mittelst der Relationen (10) oder (11) gehen die rechten Seiten in (17) und (18) auch direkt in einander über.

§ 4. Die Ausdrücke (17) und (18) führen auf mehrfache independente Darstellungen der *Bernoullischen Zahlen*. In der That aus (17) folgt

$$\sum_{s=1}^{k} s^n = \sum_{r=0}^{n-1} a_{n,r} \cdot \left\{\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} \cdots + \binom{n+k-r-1}{k-r-1}\right\}$$

und aus (18)

$$\sum_{s=1}^{k} s^n = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{n-r} . A_{n,r} \left\{\binom{r}{0} + \binom{r+1}{1} + \binom{r+2}{2} \cdots + \binom{r+k-1}{k-1}\right\}.$$

In diesen Summen ist der Coefficient von $a_{n,r}$ gleich demjenigen von x^{k-r-1} im Produkte $(1-x)^{-1} . (1-x)^{-n-1}$, also $= \binom{n\,|-k-r}{k-r-1} =$

$\binom{n+k-r}{n+1}$, und der Coeffizient von $(-1)^{n-r} \cdot A_{n,r}$ ist gleich demjenigen von x^{k-1} im Produkte $(1-x)^{-1} \cdot (1-x)^{-r-1}$, also $= \binom{r+k}{k-1}$ $= \binom{r+k}{r+1}$.

Wir gewinnen somit die beiden Resultate

(19.) $$1^n + 2^n + 3^n \cdots + k^n =$$
$$= \binom{n+k}{n+1} a_{n,0} + \binom{n+k-1}{n+1} a_{n,1} + \binom{n+k-2}{n+1} a_{n,2} \cdots + \binom{k+1}{n+1} a_{n,r-1}$$

und

(20.) $$1^n + 2^n + 3^n \cdots + k^n =$$
$$= \binom{n+k}{n+1} A_{n,n} - \binom{n+k-1}{n} A_{n,n-1} + \binom{n+k-2}{n-1} A_{n,n-2}$$
$$\cdots (-1)^{n-1} \binom{k+1}{2} A_{n,1}.$$

Anderseits hat man, wenn B_1, B_2, B_3, . . die *Bernoullischen Zahlen* darstellen,

(21.) $$1^n + 2^n + 3^n \cdots + k^n =$$
$$= \frac{k^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{2} k^n +$$
$$+ \binom{n}{1} \frac{B_1}{2} \cdot k^{n-1} - \binom{n}{3} \frac{B_2}{4} \cdot k^{n-3} + \binom{n}{5} \frac{B_3}{6} \cdot k^{n-5} \cdots$$
$$+ \begin{cases} \cdots (-1)^{\frac{n+2}{2}} \cdot \binom{n}{n-1} \cdot \frac{B_{n/2}}{n} \cdot k, & \text{wenn n gerade} \\ \cdots (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \binom{n}{n-2} \cdot \frac{B_{\frac{n-1}{2}}}{n-1} \cdot k^2, & \text{wenn n ungerade.} \end{cases}$$

Entwickeln wir also die Ausdrücke rechter Hand in den Gleichungen (19) und (20) nach Potenzen von k, so ist, vorausgesetzt, dass n grösser als 1 ist, der Coeffizient von k, je nachdem n gerade oder ungerade ist, entweder $= (-1)^{\frac{n+2}{2}} \cdot B_{n/2}$, oder $= 0$.

Betrachten wir zuerst die Gleichung (19)

$$\sum_{s=1}^{k} s^n = \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n+k-r}{n+1} a_{n,r}.$$

In der Faktoriellen

$$\binom{n+k-r}{n+1} = \frac{(k+n-r)(k+n-r-1)\cdots(k+1)\,k\,(k-1)\cdots(k-r)}{(n+1)!}$$

wird der Coefficient von k sein

$$= (-1)^r \cdot \frac{(n-r)(n-r-1)\cdots 2\cdot 1\cdot 12\cdots r}{(n+1)!} = (-1)^r \frac{(n-r)!\,r!}{(n+1)!}$$

$$= \frac{(-1)^r}{n+1} \cdot \frac{1}{\binom{n}{r}}.$$

In Gleichung (19) ist also der gesuchte Coeffizient

$$\frac{1}{n+1} \cdot \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{a_{n,r}}{\binom{n}{r}}, \text{ und wir erhalten}$$

$$(22.)\quad \frac{a_{n,0}}{\binom{n}{0}} - \frac{a_{n,1}}{\binom{n}{1}} + \frac{a_{n,2}}{\binom{n}{2}} \cdots (-1)^{n-1} \cdot \frac{a_{n,n-1}}{\binom{n}{n-1}} =$$

$$\begin{cases} = (-1)^{\frac{n+2}{2}} \cdot (n+1) \cdot B_{n/2}, & \text{wenn n gerade und} > 0 \\ = 0 & \text{, wenn n ungerade und} > 1. \end{cases}$$

Oder da $a_{n,n-s} = a_{n,s-1}$, so erhalten wir auch, wenn wir (22) mit $(-1)^{n-1}$ multiplizieren:

$$(23.)\quad \frac{a_{n,0}}{\binom{n}{1}} - \frac{a_{n,1}}{\binom{n}{2}} + \frac{a_{n,2}}{\binom{n}{3}} \cdots (-1)^{n-1} \frac{a_{n,n-1}}{\binom{n}{n}} =$$

$$\begin{cases} = (-1)^{n/2} \cdot (n+1)\, B_{n/2}, & \text{wenn n gerade und} > 0 \\ = 0 & \text{, wenn n ungerade und} > 1. \end{cases}$$

Ersetzen wir in (22) $a_{n,s}$ gemäss der Relation (4) durch $(s+1)\, a_{n-1,s} + (n-s)\, a_{n-1,s-1}$, so kömmt

$\binom{n+k-r}{n+1}$, und der Coeffizient von $(-1)^{n-r} \cdot A_{n,r}$ ist gleich demjenigen von x^{k-1} im Produkte $(1-x)^{-1} \cdot (1-x)^{-r-1}$, also $= \binom{r+k}{k-1}$ $= \binom{r+k}{r+1}$.

Wir gewinnen somit die beiden Resultate

(19.) $$1^n + 2^n + 3^n \cdots + k^n =$$
$$= \binom{n+k}{n+1} a_{n,0} + \binom{n+k-1}{n+1} a_{n,1} + \binom{n+k-2}{n+1} a_{n,2} \cdots + \binom{k+1}{n+1} a_{n,n-1}$$

und

(20.) $$1^n + 2^n + 3^n \cdots + k^n =$$
$$= \binom{n+k}{n+1} A_{n,n} - \binom{n+k-1}{n} A_{n,n-1} + \binom{n+k-2}{n-1} A_{n,n-2}$$
$$\cdots (-1)^{n-1} \binom{k+1}{2} A_{n,1}.$$

Anderseits hat man, wenn B_1, B_2, B_3, . . die *Bernoullischen Zahlen* darstellen,

(21.) $$1^n + 2^n + 3^n \cdots + k^n =$$
$$= \frac{k^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{2} k^n +$$
$$+ \binom{n}{1} \frac{B_1}{2} \cdot k^{n-1} - \binom{n}{3} \frac{B_2}{4} \cdot k^{n-3} + \binom{n}{5} \frac{B_3}{6} \cdot k^{n-5} \cdots$$
$$+ \begin{cases} \cdots (-1)^{\frac{n+2}{2}} \cdot \binom{n}{n-1} \cdot \frac{B_{n/2}}{n} \cdot k, & \text{wenn n gerade} \\ \cdots (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \binom{n}{n-2} \cdot \frac{B_{n-1}}{n-1} \cdot k^2, & \text{wenn n ungerade.} \end{cases}$$

Entwickeln wir also die Ausdrücke rechter Hand in den Gleichungen (19) und (20) nach Potenzen von k, so ist, vorausgesetzt, dass n grösser als 1 ist, der Coeffizient von k, je nachdem n gerade oder ungerade ist, entweder $= (-1)^{\frac{n+2}{2}} \cdot B_{n/2}$, oder $= 0$.

Betrachten wir zuerst die Gleichung (19)

$$\sum_{s=1}^{k} s^n = \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n+k-r}{n+1} a_{n,r}.$$

In der Faktoriellen

$$\binom{n+k-r}{n+1} = \frac{(k+n-r)(k+n-r-1)\cdots(k+1)\,k\,(k-1)\cdots(k-r)}{(n+1)!}$$

wird der Coefficient von k sein

$$= (-1)^r \cdot \frac{(n-r)(n-r-1)\cdots 2\cdot 1\cdot 12\cdots r}{(n+1)!} = (-1)^r \frac{(n-r)!r!}{(n+1)!}$$

$$= \frac{(-1)^r}{n+1} \cdot \frac{1}{\binom{n}{r}}.$$

In Gleichung (19) ist also der gesuchte Coeffizient

$$\frac{1}{n+1} \cdot \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{a_{n,r}}{\binom{n}{r}},$$ und wir erhalten

$$(22.)\quad \frac{a_{n,0}}{\binom{n}{0}} - \frac{a_{n,1}}{\binom{n}{1}} + \frac{a_{n,2}}{\binom{n}{2}} \cdots (-1)^{n-1} \cdot \frac{a_{n,n-1}}{\binom{n}{n-1}} =$$

$$\begin{cases} = (-1)^{\frac{n+2}{2}} (n+1) \cdot B_{n/2}, & \text{wenn n gerade und} > 0 \\ = 0 & \text{, wenn n ungerade und} > 1. \end{cases}$$

Oder da $a_{n,n-s} = a_{n,s-1}$, so erhalten wir auch, wenn wir (22) mit $(-1)^{n-1}$ multiplizieren:

$$(23.)\quad \frac{a_{n,0}}{\binom{n}{1}} - \frac{a_{n,1}}{\binom{n}{2}} + \frac{a_{n,2}}{\binom{n}{3}} \cdots (-1^{n-1} \frac{a_{n,n-1}}{\binom{n}{n}} =$$

$$\begin{cases} = (-1)^{n/2} \cdot (n+1)\, B_{n/2}, & \text{wenn n gerade und} > 0 \\ = 0 & \text{, wenn n ungerade und} > 1. \end{cases}$$

Ersetzen wir in (22) $a_{n,s}$ gemäss der Relation (4) durch $(s+1)\, a_{n-1,s} + (n-s)\, a_{n-1,s-1}$, so kömmt

$$(24.)\quad \frac{a_{n-1,0}}{\binom{n}{1}} - \frac{a_{n-1,1}}{\binom{n}{2}} + \frac{a_{n-1,2}}{\binom{n}{3}} \cdots (-1)^{n-1} \frac{a_{n-1,\,n-2}}{\binom{n}{n-1}} =$$

$$\begin{cases} = (-1)^{\frac{n+2}{2}} \cdot (n+1) \cdot B_{n/2}, & \text{wenn n gerade und } > 0, \\ = 0 & \text{, wenn n ungerade und } > 1. \end{cases}$$

Die Formeln (22) und (23) stellen die Bernoullischen Zahlen durch die $a_{n,s}$ mit geraden Indices n, die Formel (24) durch die $a_{n,s}$ mit ungeraden Indices n dar. Die Coefficienten $a_{n,s}$ sind durch die Formeln (6) und durch die Rekursionsgleichung (4) gegeben.

Betrachten wir endlich die Gleichung (20)

$$\sum_{s=1}^{k} s^n = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{n-r} \cdot \binom{k+r}{r+1} \cdot A_{n,r}.$$ In der Faktoriellen

$$\binom{k+r}{r+1} = \frac{(k+r)\,(k+r-1)\,.\,.\,(k+1)\,k}{(r+1)!}$$ ist der Faktor von k gleich

$$\frac{r!}{(r+1)!} = \frac{1}{r+1}.$$ Wir erhalten somit aus (21)

$$(25.)\quad \frac{A_{n,1}}{2} - \frac{A_{n,2}}{3} + \frac{A_{n,3}}{4} \cdots (-1)^{n+1} \cdot \frac{A_{n,n}}{n+1} =$$

$$\begin{cases} = (-1)^{n/2} \cdot B_{n/2}, & \text{wenn n gerade und } > 0, \\ = 0 & \text{, wenn n ungerade und } > 1. \end{cases}$$

Setzen wir hier gemäss (15) $A_{n,s} = s\,(A_{n-1,s} + A_{n-1,s-1})$, so kommt

$$(26.)\quad \frac{A_{n-1,1}}{2\,.\,3} - \frac{A_{n-1,2}}{3\,.\,4} + \frac{A_{n-1,3}}{4\,.\,5} \cdots (-1)^n \cdot \frac{A_{n-1,\,n-1}}{n\,(n+1)} =$$

$$= \begin{cases} (-1)^{\frac{n+2}{2}} \cdot B_{n/2}, & \text{wenn n gerade und } > 0, \\ 0 & \text{, wenn n ungerade und } > 1. \end{cases}$$

In (25) sind die Bernoullischen Zahlen durch die $A_{n,s}$ mit geraden Indices n, in (26) durch die $A_{n,s}$ mit ungeraden Indices n dargestellt. Die Coeffizienten $A_{n,s}$ sind durch die Formeln (12) und durch die Rekursionsgleichung (15) gegeben.

§ 5. *Der Clausen-Staudt'sche Satz.* Wir hatten in (25) die n^{te} Bernoullische Zahl B_n dargestellt durch

$$(-1)^n \cdot B_n = \sum_{s=1}^{2n} (-1)^{s+1} \cdot \frac{A_{2n,s}}{s+1},$$

wo $A_{n,s} = (-1)^s \cdot \sum_{r=1}^{s} (-1)^r \cdot \binom{s}{r} r^n$ und $A_{n,s} \equiv 0 \pmod{s!}$.

Untersuchen wir jetzt $A_{2n,s}$ auf die Teilbarkeit durch $s+1$.

a) Wenn *$s+1$ in zwei ungleiche Faktoren zerlegbar,* $s+1 = a \cdot b$, wo $a > b > 1$, so sind sowohl a als b kleiner als $s+1$, und daher findet sich jeder dieser Faktoren in $s!$ Dann ist also $\frac{A_{2n,s}}{s+1}$ eine *ganze Zahl.*

b) Wenn *$s+1 = p^2$, wo p eine Primzahl,* so behaupten wir, dass wiederum $\frac{A_{2n,s}}{s+1}$ eine *ganze Zahl.*

Denn wenn zunächst $p = 2$, so ist zwar $\frac{s!}{s+1} = \frac{3!}{4} = \frac{3}{2}$, aber dann ist $\frac{A_{2n,s}}{s+1} = \frac{3 - 3 \cdot 2^{2n} + 3^{2n}}{4}$. Nun ist $3 + 3^{2n} \pmod 4$ $\equiv -1 + (-1)^{2n} \equiv 0$, und daher $\frac{A_{2n,s}}{s+1}$ eine ganze Zahl, w. z. z.

Wenn aber $p > 2$, so betrachten wir $\frac{s!}{s+1} = \frac{1.2.3 \ldots (p^2-1)}{p^2}$.

Wenn nun $p > 2$, so ist $p^2 - 1 = (p-1)(p+1) \geqq 2p$. Im Produkte $s!$ treten daher sowohl p als $2p$ als Faktoren auf, und daher ist $\frac{s!}{s+1}$ ganz und somit auch $\frac{A_{2n,s}}{s+1}$ eine ganze Zahl wie z. z.

c) Sei nun *$s+1 = p$, wo p eine Primzahl.*

Wenn zunächst $s+1 = 2$, so ist im Ausdruck von $(-1)^n \cdot B_n$ das betreffende Glied $\frac{A_{2n,1}}{2} = \frac{1}{2}$.

Sei endlich $s+1 = p$, wo p eine ungerade Primzahl. Im Ausdruck von $(-1)^n \cdot B_n$ ist der betreffende Term

$$-\frac{A_{2n,s}}{s+1} = \sum_{r=1}^{s} (-1)^{r+1} \cdot \frac{\binom{s}{r} \cdot r^{2n}}{s+1}.$$

Von den hier auftretenden Grössen r ist keine durch die Primzahl $s+1=p$ teilbar. Wir haben jetzt die Fälle zu unterscheiden, wo $2n$ durch s teilbar und wo $2n$ nicht durch s teilbar.

Betrachten wir erst den Fall, wo $2n$ nicht durch s teilbar. Es sei denn $2n \equiv a \pmod{s}$, wo $0 < a < s$, also $2n = k\,s + a = k\,(p-1) + a$, wo k eine ganze Zahl, oder

$$r^{2n} = r^{k(p-1)+a}.$$

Da nun r durch p nicht teilbar, so ist nach dem Fermat'schen Satze $r^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, und daher

$$r^{2n} \equiv r^{a} \pmod{p}.$$

Somit modulo p

$$\sum_{r=1}^{s} (-1)^{r+1} \cdot \binom{s}{r} \cdot r^{2n} \equiv \sum_{r=1}^{s} (-1)^{r+1} \cdot \binom{s}{r} r^{a}.$$

Aber, da hier $s > a$, so ist gemäss der Relation (14′) der Ausdruck rechter Hand identisch $= 0$. Also ist nun

$\sum_{r=1}^{s} (-1)^{r+1} \cdot \binom{s}{r} \cdot r^{2n}$ durch $p = s+1$ teilbar und somit ist jetzt

$\frac{A_{2n,\,s}}{s+1}$ eine *ganze Zahl*.

Geht aber $s = p-1$ in $2n$ auf, oder ist $2n = k \cdot s$, wo k eine ganze Zahl, so haben wir $r^{2n} = r^{k(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$.

Also modulo $p = s+1$ ist jetzt

$$\sum_{r=1}^{s} (-1)^{r+1} \cdot \binom{s}{r} \cdot r^{2n} \equiv \sum_{r=1}^{s} (-1)^{r+1} \cdot \binom{s}{r} = 1 - (1-1)^{s} = 1,$$

d. h. im Ausdruck von $(-1)^n \cdot B_n$ ist der betreffende Term

$$-\frac{A_{2n,\,p-1}}{p} = \frac{1}{p} + \text{ganze Zahl}.$$

Alles zusammengefasst erhalten wir also

$$(-1)^n \cdot B_n = \left(\frac{1}{2} + \sum \frac{1}{p}\right) + \text{Ganze Zahl},$$

wo die Summe rechter Hand sich auf alle diejenigen ungeraden Primzahlen p bezieht, für welche $p-1$ ein Teiler von $2n$ ist. Oder da auch 2 eine Primzahl, und $2-1$ stets ein Teiler von $2n$ ist, so können wir schreiben

(27.) $$B_n = \text{Ganze Zahl} + (-1)^n \cdot \left\{ \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \cdots + \frac{1}{\lambda} \right\},$$

wo $\alpha, \beta \ldots \lambda$ alle diejenigen Primzahlen darstellen, für welche $\alpha-1$, $\beta-1, \ldots \lambda-1$ Teiler von $2n$ sind. Dies ist der *Clausen-Staudt'sche Satz*.

Z. B.:

2 | Teiler 1, 2
| Primzahlen . . 2, 3

$$B_1 = \frac{1}{6} = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right).$$

4 | Teiler 1, 2, 4
| Primzahlen . . . 2, 3, 5

$$B_2 = \frac{1}{30} = -1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right).$$

6 | Teiler 1, 2, 3, 6
| Primzahlen . . . 2, 3, 7

$$B_3 = \frac{1}{42} = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} \right).$$

8 | Teiler 1, 2, 4, 8
| Primzahlen . . . 2, 3, 5

$$B_4 = \frac{1}{30} = -1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right).$$

10 | Teiler 1, 2, 5, 10
| Primzahlen . . . 2, 3, 11

$$B_5 = \frac{5}{66} = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{11} \right).$$

12 | Teiler 1, 2, 3, 4, 6, 12
| Primzahlen . . . 2, 3, 5, 7, 13

$$B_6 = \frac{691}{2730} = -1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13} \right).$$

14 | Teiler 1, 2, 7, 14
Primzahlen . . . 2, 3

$$B_7 = \frac{7}{6} = 2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right).$$

16 | Teiler 1, 2, 4, 8, 16
Primzahlen . . . 2, 3, 5, 17

$$B_8 = \frac{3617}{510} = 6 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{17}\right).$$

18 | Teiler 1, 2, 3, 6, 9, 18
Primzahlen . . . 2, 3, 7, 19

$$B_9 = \frac{43867}{798} = 56 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{19}\right).$$

20 | Teiler 1, 2, 4, 5, 10, 20
Primzahlen . . . 2, 3, 5, 11

$$B_{10} = \frac{174\,611}{330} = 528 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{11}\right).$$

22 | Teiler 1, 2, 11, 22
Primzahlen . . . 2, 3, 23

$$B_{11} = \frac{854\,513}{138} = 6193 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{23}\right).$$

24 | Teiler 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24
Primzahlen . . . 2, 3, 5, 7, 13

$$B_{12} = \frac{236\,364\,091}{2730} = 86\,579 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13}\right).$$

u. s. w.

Dieser Satz ward zuerst von Thomas Clausen in den »Astronomischen Nachrichten«, Bd. VII, Nr. 406 (1840, Juli 23) ohne Beweis mitgeteilt, und von Georg Karl Christian v. Staudt im »Crelle'schen Journal« Bd. XXI, p. 372 und f. (1840, Aug. 16.) bewiesen. Um den Beweis für die Bernoullische Zahl der n^{ten} Ordnung zu leisten, muss Staudt voraussetzen, dass der Satz für alle niedrigeren Ordnungen

schon bewiesen sei. Herr Louis Saalschütz in seinen »Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen, Berlin 1893«, p. 132 und f. reproduziert im wesentlichen den Staudt'schen Beweis. Eine direkte Herleitung, die mit der obigen Analogie hat, aber einen andern Ausgangspunkt nimmt, giebt Herr K. Schering: »Zur Theorie der Bernoullischen Zahlen«. Mathemat. Annalen. Bd. 52 (1899), p. 171 und f.

(Siehe Tabellen Rückseite.)

oder

$$(11.^1) \qquad a_{n,s} = \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{n-s+k+1}{k} \; A_{n,\,s-k+1}$$

Substituieren wir in $(10.^1)$ für die $a_{n,k}$ ihre Ausdrücke aus (6.), so erhalten wir

$$A_{n,s} = 1^n \cdot \left\{ \binom{n+1}{0}\binom{n-1}{s-1} - \binom{n+1}{1}\binom{n-2}{s-2} \cdot \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \cdot (-1)^{s-1} \cdot \binom{n+1}{s-1}\binom{n-s}{0} \right\} +$$
$$+ 2^n \cdot \left\{ \binom{n+1}{0}\binom{n-2}{s-2} - \binom{n+1}{1}\binom{n-3}{s-3} \cdot \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \cdot (-1)^{n-2} \cdot \binom{n+1}{s-2}\binom{n-s}{0} \right\} +$$
$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$+ (s-1)^n \cdot \left\{ \binom{n+1}{0}\binom{n-s+1}{1} - \binom{n+1}{1}\binom{n-s}{0} \right\} +$$
$$+ s^n \cdot \binom{n+1}{0}\binom{n-s}{0},$$

oder

$$A_{n,s} = \sum_{k=1}^{s} k^n \cdot \sum_{r=0}^{s-k} (-1)^r \cdot \binom{n+1}{r}\binom{n-k-r}{s-k-r} =$$
$$= \sum_{k=0}^{s-1} (s-k)^n \cdot \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \cdot \binom{n+1}{r}\binom{n-s+k-r}{k-r}.$$

Der Coeffizient von $(s-k)^n$ ist hier gleich $(-1)^k$. Coeffizient von x^k im Produkte $(1+x)^{n+1} \cdot (1+x)^{-(n-s+1)}$, also

$$= (-1)^k \cdot \binom{s}{k}, \text{ d. h.:}$$

$$\binom{n+1}{0}\binom{n-s+k}{k} - \binom{n+1}{1}\binom{n-s+k-1}{k-1} + \binom{n+1}{2}\binom{n-s+k-2}{k-2} \cdot \cdot$$
$$(\beta.) \qquad \cdot \cdot (-1)^k \cdot \binom{n+1}{k}\binom{n-s}{0} = (-1)^k \cdot \binom{s}{k},$$

oder

$$(\beta.') \quad \binom{n-s}{0}\binom{n+1}{k} - \binom{n-s+1}{1}\binom{n+1}{k-1} + \binom{n-s+2}{2}\binom{n+1}{k-2} \cdot \cdot$$

$$\ldots (-1)^k \binom{n-s+k}{k} \binom{n+1}{0} = \binom{s}{k}.$$

Wir bekommen somit

$$(12.) \qquad A_{n,s} = \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k \cdot \binom{s}{k} (s-k)^n,$$

oder auch

$$(12.') \qquad A_{n,s} = (-1)^s \cdot \sum_{k=1}^{s} (-1)^k \cdot \binom{s}{k} \cdot k^n,$$

d. h.:

$$(12.'') \begin{cases} A_{n,1} = 1^n \\ A_{n,2} = 2^n - \binom{2}{1} 1^n \\ A_{n,3} = 3^n - \binom{3}{1} 2^n + \binom{3}{2} 1^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{n,n} = n^n - \binom{n}{1} (n-1)^n + \binom{n}{2} (n-2)^n \ldots \\ \qquad\qquad \ldots (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} \cdot 1^n, \end{cases}$$

und infolge der Relation (9) ist

$$A_{n,n} = n!$$

Da in (u) linker Hand der Nenner um zwei Grade höher als der Zähler ist, also rechts ein Term $\frac{A_{n,0}}{1-x}$ nicht auftreten kann, so haben wir zu setzen

$$(13.) \qquad A_{n,0} = 0.$$

Wenn ferner im Ausdruck (10') von $A_{n,s}$ der zweite Index s grösser als n wird, so werden rechter Hand sämtliche Terme null. Somit haben wir

$$(14.) \quad 0 = A_{n,n+k+1} =$$

$$= \binom{n+k+1}{0} (n+k+1)^n - \binom{n+k+1}{1} (n+k)^n +$$

$$+ \binom{n+k+1}{2} (n+k-1)^n \ldots (-1)^{n+k} \binom{n+k+1}{n+k} \cdot 1^n,$$

wenn k irgend eine positive ganze Zahl inklusive null darstellt. —

Die Grössen $c_{s+k,\,s}$, wo s die Werte 1, 2, 3, 4, 5 . . . in inf. durchläuft, und k konstant bleibt, bilden eine arithmetische Reihe der Ordnung 2 k, wo die konstante Differenz der (2 k) Ordnung $= 1 . 3 . 5 \ldots (2\,k-1)$ ist.

Z. B.

$s =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	. . .
$c_{s+1,\,s} =$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	. . .
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
			1	1	1	1	1	1	1	1	1	

$s =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	. .
$c_{s+2,\,s} =$	1	7	25	65	140	266	462	750	1155	1705	2431	. .
		6	18	40	75	126	196	288	405	550	726	
			12	22	35	51	70	92	117	145	176	
				10	13	16	19	22	25	28	31	
					3	3	3	3	3	3	3	

$s =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	. .
$c_{s+3,\,s} =$	1	15	90	350	1050	2646	5880	11880	22275	39325	66066	. .
		14	75	260	700	1596	3234	6000	10395	17050	26741	
			61	185	440	896	1638	2766	4395	6655	9691	
				124	255	456	742	1128	1629	2260	3036	
					131	201	286	386	501	631	776	
						70	85	100	115	130	145	
							15	15	15	15	15	

$s =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	. .
$c_{s+4,\,s} =$	1	31	301	1701	6951	22827	63987	159027	359502	752752	1479478	. .
		30	270	1400	5250	15876	41160	95040	200475	393350	726726	
			240	1130	3850	10626	25284	53880	105435	192775	333476	
				890	2720	6776	14658	28596	51555	87340	140701	
					1830	4056	7882	13938	22959	35785	53361	
						2226	3826	6056	9021	12826	17576	
							1600	2230	2965	3805	4750	
								630	735	840	945	
									105	105	105	

u. s. w.

Albert Bentelí.

Die
Niveauschwankungen der 13 grösseren Schweizerseen
im Zeitraume der 31 Jahre 1867 bis und mit 1897 mit besonderer Berücksichtigung der Jura-Seen vor und nach der Juragewässer-Correction.

(Vorgetragen am 10. Juni 1899.)

Schon im Jahre 1888 hatte ich in einer Sitzung der bern. Naturforschenden Gesellschaft einen Vortrag über die Niveauschwankungen der 13 grösseren Schweizerseen gehalten. Damals stand mir für die meisten Seen das Beobachtungsmaterial von 20 Jahren, 1867 bis 1886 zur Verfügung. Für 11 weitere Jahre habe ich seither Steigen und Fallen der Seeoberflächen addiert und bin nun im Falle, die Ergebnisse der zwei Perioden 1867—1886 und 1887—1897 zu vergleichen und auch Mitteilungen zu bringen über die mittleren Verhältnisse der ganzen Periode von 31 Jahren 1867—1897. Zudem werde ich im Stande sein, Ihnen ein Bild zu geben von den sehr bedeutenden Veränderungen in der Beweglichkeit der Niveaux der drei Juraseen, herbeigeführt durch das grossartige, nach dem Projekte La Nicca ausgeführte Werk der Juragewässer-Correction.

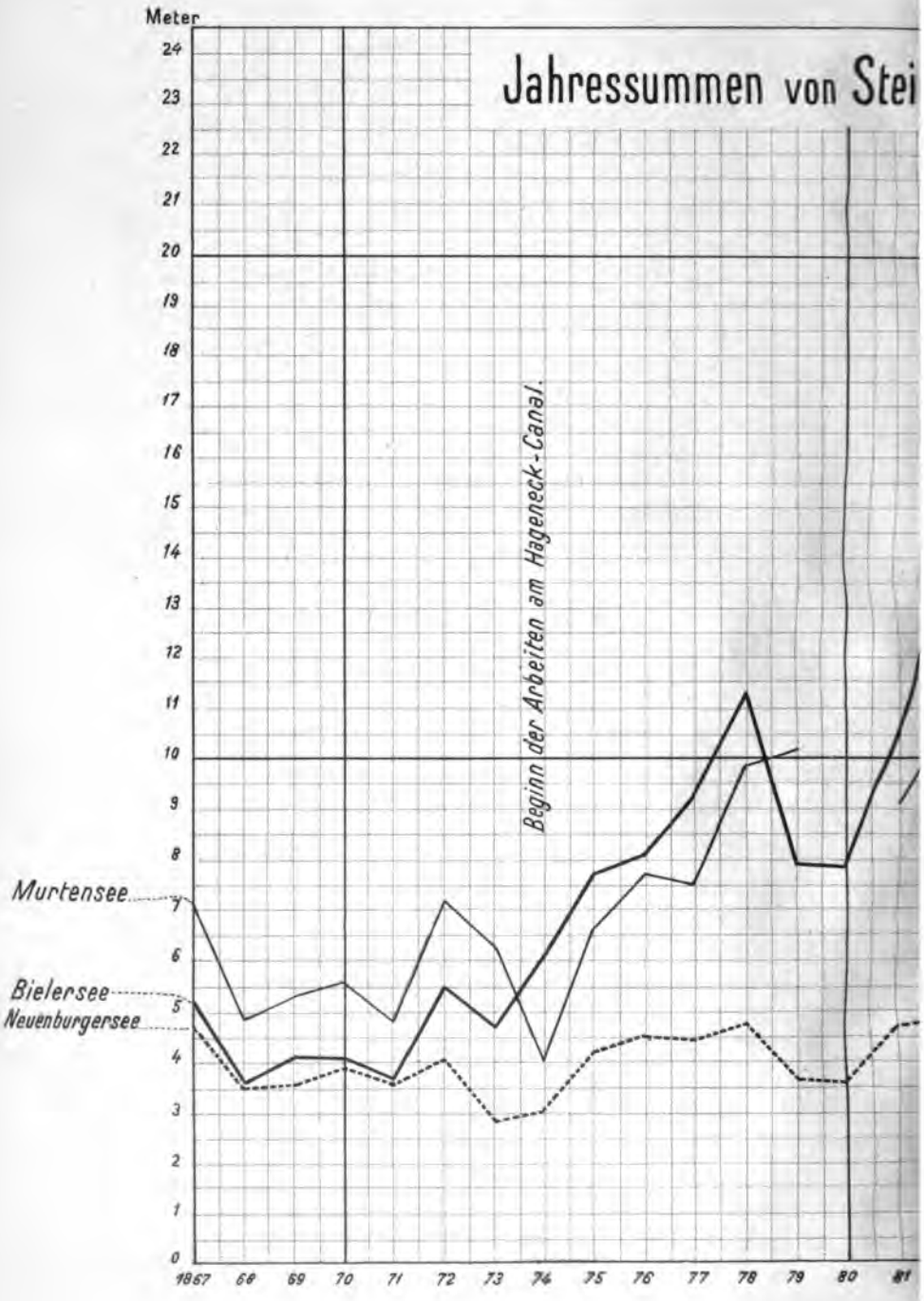
Zunächst möchte ich Ihnen mitteilen, auf welches Beobachtungsmaterial ich mich stützen konnte. In den 60er Jahren hat die hydrometrische Kommission der schweiz. Naturforschenden Gesellschaft das Pegelbeobachtungswesen der verschiedenen Kantone in ein einheitliches System gebracht und 1867 angefangen, die Wasserstandsbeobachtungen der bedeutenderen Flüsse und Seen in graphischen Jahresbulletins zu veröffentlichen. Der Umfang dieser Arbeiten nahm sehr rasch zu, man sah überall deren praktischen Wert ein, und schon nach wenigen Jahren zog der Bund diese Arbeiten an sich und teilte dieselben dem Geschäftskreise des eidgen. Oberbauinspektorats zu. Bald sah sich der Ober-Bauinspektor gezwungen, mit der Hydrometrie ein eigenes Bureau zu beschäftigen und Herrn Ingenieur

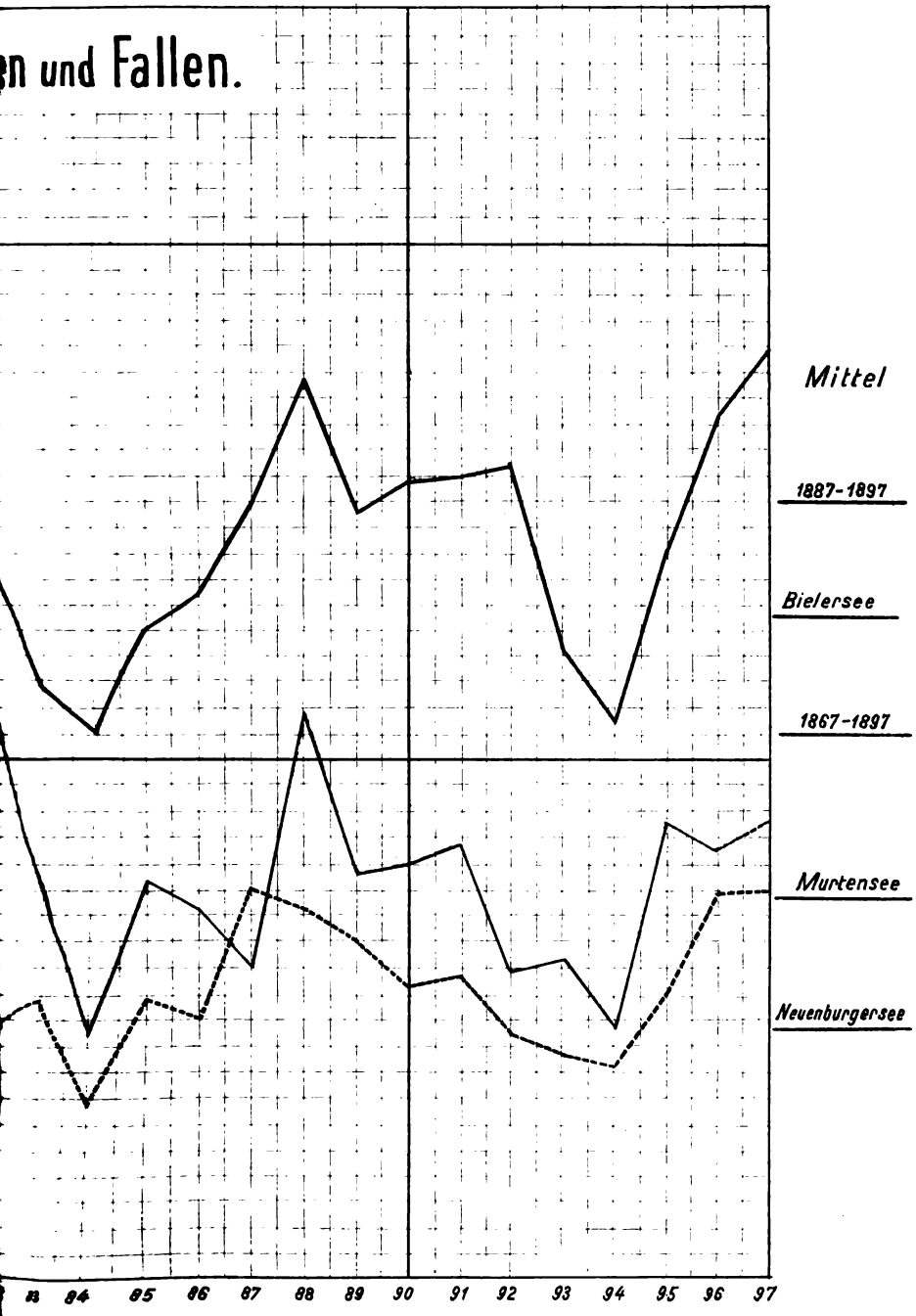
Epper die Leitung desselben zu übertragen. Herr Epper steht heute noch an der Spitze dieser Abteilung und vermag mit 11 Angestellten die in den letzten Jahren so sehr angewachsene Arbeit kaum zu bewältigen. Es gereicht mir zur besonderen Freude, Ihnen sagen zu können, dass man an die Stelle des Leiters des hydrom. Bureaus kaum einen tüchtigeren Mann hätte wählen können, denn die von diesem Bureau herausgegebenen Arbeiten zeugen von seltenem Fleisse und von sehr ernster Behandlung des ganzen Beobachtungs- und Bearbeitungswesens. Sie werden sich übrigens selber davon überzeugen können. Wir wollen hier kurz eine Uebersicht der Arbeiten geben, mit denen das hydrometrische Bureau sich beschäftigt. Dieselben zerfallen in zwei Teile:

A. Die Wasserstandsbeobachtungen und deren Publikationen.
B. Untersuchung der Wasserverhältnisse.
   a) Genaue Erforschung der Einzugsgebietsgrenzen (Wasserscheiden); die Höhenstufen der Gebiete und Bestimmung ihrer Oberflächen.
   b) Publikationen. Genaue Beschreibung und Situationspläne der Pegelstationen, der Einzugsgebiete (Fels-, Firn- und Gletscher-Anteile etc.), Höhenversicherung, Durchflussprofile.
   c) Längenprofile der fliessenden Gewässer.
   d) Minimalwassermengen. Für einzelne Hauptstationen mittlere und höchste Durchflussmengen. Abflusskurven.

Man wird leicht begreifen, dass Herr Epper dieses kolossale Programm mit seinem Bureau kaum zu bewältigen vermag.

Vor 11 Jahren hatte ich die Niveau-Schwankungen der 13 grösseren Schweizerseen während der 20 Jahre 1867 bis und mit 1886 vergleichend zusammengestellt und auf einige bemerkenswerte Verhältnisse aufmerksam gemacht. Diese Arbeit habe ich fortgesetzt und für die weiteren 11 Jahre 1887 bis und mit 1897 durchgeführt. Den jährlich erscheinenden graphischen Wasserstandsbulletins entnahm ich für die 13 Seen, Bodensee, Brienzersee, Thunersee, Murtensee, Neuenburgersee, Bielersee, Vierwaldstättersee, Zugersee, Wallenstattersee, Zürichsee, Genfersee, Lago di Lugano und Lago Maggiore (geordnet nach den Flussgebieten des Rheins, der Aare, Reuss, Limmat, Rhone und Tessin) durch graphische Addition mit Zirkel die Summen von Steigen und Fallen.


Meter
Jahressummen von Stei
Beginn der Arbeiten am Hageneck-Canal.
Murtensee
Bielersee
Neuenburgersee
24
23
22
21
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
1867
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81


gn und Fallen.
Mittel
1887-1897
Bielersee
1867-1897
Murtensee
Neuenburgersee
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97

Tafel I enthält diese Summen von Jahr zu Jahr von 1867 bis und mit 1897, ebenso die Summen von Steigen und Fallen während der ganzen Beobachtungszeit und die mittleren jährlichen Summen h, die Amplituden der Jahressummen und endlich die mittleren jährlichen Summen h für die Perioden 1867—1886 und 1887—1897.

Vergleichen wir nun zunächst diese letzteren Resultate.

See	Mittlere jährliche Summen von Steigen und Fallen in der Periode:		Differenz
	1867—1886	1887—1897	
	Meter	Meter	Meter
1. Bodensee	7.02	7.12	+ 0. 10
2. Brienzersee	9.65	9.28	— 0.37
3. Thunersee	9.62	8.71	— 0.91
4. Murtensee	7.06	7.62	+ 0.56
5. Neuenburgersee . .	4.15	6.00	+ 1.85
6. Bielersee	8.03	15.03	+ 7.00
7. Vierwaldstättersee . .	7.33	6.17	— 1.16
8. Zugersee	3.52	2.91	— 0.61
9. Wallenstattersee . .	14.80	14.05	— 0.75
10. Zürichsee	6.42	5.73	— 0.69
11. Genfersee	5.44	4.62	— 0.82
12. Lago di Lugano . .	7.14	6.97	— 0.17
13. Lago Maggiore . . .	14.85	13.84	— 1.01

Es zeigt sich da zunächst, dass die jährlichen Summen von Steigen und Fallen in den beiden Perioden, abgesehen vom Neuenburger- und Bielersee, nicht erheblich von einander abweichen, es können somit die mittleren jährlichen Summen h von Steigen und Fallen (in Tafel I angegeben), berechnet für die ganze Periode der 31 Jahre 1867—1897 beinahe für alle Seen als Mittelwerte für einen wohl noch grösseren Zeitabschnitt als nur für 31 Jahre betrachtet werden. Die grossen Abweichungen der mittleren Schwankungssummen h der zwei Juraseen (Neuenburger- und Bielersee) in der Periode 1887—1897 rühren jedenfalls her vom Einflusse der Juragewässerkorrektion, die während der ersten Periode 1867—1886 zur beinahe vollständigen Durchführung gekommen ist. Die mittleren Summen des jährlichen Steigens und Fallens der drei Juraseen sind

grösser geworden, während bei allen anderen Seen, ausgenommen Bodensee, diese mittlere Summe in der Periode 1887—1897 geringer war als früher (vide beigegebene graphische Uebersicht). Beim Bodensee ist die mittlere jährliche Summe von Steigen und Fallen, also die Beweglichkeit der Seeoberfläche, in der Periode 1887—1897 um 0,1 m grösser gewesen als früher. Dies rührt wohl von dem Einfluss verschiedener Korrektionen im Rheingebiete her. Im Bündnerlande hat man Wildbachverbauungen vorgenommen und den Rhein in den tiefer liegenden Gegenden besser eingedämmt, so dass die Hochwasser, die früher oft überfielen, nun rascher dem Bodensee zuströmen. Nach der vollständigen Durchführung der Rheinkorrektion wird ohne Zweifel die Beweglichkeit des Niveaus im Bodensee noch erheblich zunehmen.

Die jährlichen Summen von Steigen und Fallen sind für die 13 Seen sehr verschieden gross und auch durch die ganze Periode der 31 Jahre 1867—1897 hindurch zeigen sich bedeutende Verschiedenheiten, die hauptsächlich von den Schwankungen der Niederschlagsverhältnisse in den Seeeinzugsgebieten herrühren mögen, da ja die übrigen auf Steigen und Fallen eines Seeniveaus Einfluss ausübenden Faktoren ziemlich konstant sind.

Die grösste Beweglichkeit des Niveaus zeigen der Wallenstattersee und der Lago Maggiore. Die mittlere jährliche Summe von Steigen und Fallen beträgt für den ersteren h = 14.53 m und für den letzteren h = 14.48 m. Für den Bielersee ist h = 10.51 m, aber seit Vollendung der Juragewässerkorrektion ist das Schwanken des Niveaus noch bedeutender geworden als dasjenige der ersterwähnten Seen, das Mittel beträgt in der Periode 1887—1897 sogar 15.03 m, während dasselbe vor der Juragewässerkorrektion nur 4.1 m war. Ziemlich gleich sind die Schwankungsverhältnisse des Brienzersees, h = 9.50 m und des Thunersees, 9.24 m, etwas kleiner ist h für den Bodensee, 7.06 m, für den Murtensee 7.27 m, Vierwaldstättersee 6.92 m, Zürichsee 6.18 m und für den Lago di Lugano 7.08 m. Am geringsten finden wir die mittlere Summe h von Steigen und Fallen beim Neuenburgersee, h = 4.81 m, beim Genfersee h = 5.15 m und beim Zugersee h = 3.31 m. Für den Neuenburgersee haben sich die Schwankungsverhältnisse seit Durchführung der Juragewässerkorrektion ziemlich erheblich verändert, da sein Niveau durch den Bielersee bei hohen Aare-Anschwellungen

wesentlich aufgestaut wird. Den 4. September 1881 z. B. stand das Niveau des Bielersees um 0,66 m höher als dasjenige des Neuenburgersees, so dass ein Abfluss vom Bielersee nach oben und unten stattfinden musste. Die mittlere jährliche Summe von Steigen und Fallen betrug für den Neuenburgersee in der Periode 1867—1886 : h = 4,15 m, und in der Periode 1887—1897 stieg sie auf 6.00 Meter.

Die grösste Summe von Steigen und Fallen in einem Jahre weist der Lago Maggiore auf und zwar im Jahre 1872, sie betrug damals 31.2 m. Ueberhaupt ist die Veränderlichkeit der Schwankungen dieses Sees am bedeutendsten, die jährliche Summe von Steigen und Fallen variiert zwischen 6.6 m (1870) und 31.2 m (1872), also Amplitude = 24.6 m im Zeitraume der 31 Jahre 1867—1897. Der Columne der Amplituden entnehmen wir ferner, dass die Schwankungen am regelmässigsten sich einstellen bei den 6 Seen: Bodensee, Thunersee, Neuenburgersee, Zugersee, Zürichsee und Genfersee. Sehr unregelmässig traten die Schwankungen in der 31-jährigen Periode auf beim Bielersee, Wallenstattersee, Lago di Lugano und besonders beim Lago Maggiore. Im Jahre 1868 stieg während der Hochwasserperiode vom 16. September bis 4. Oktober, die im Rheingebiet so viel Unglück gebracht hatte, der Lago Maggiore um beinahe 7 Meter. Diese so rasche und so bedeutende Anschwellung ist vereinzelt geblieben. Kein anderer See zeigt in der ganzen Periode von 31 Jahren eine ähnliche Erscheinung, und auch beim Lago Maggiore kam seither nie wieder ein so rapides und so beträchtliches Steigen vor. Wir können uns in der Schweiz glücklich schätzen, so viele Seen zu besitzen, die den Abfluss der Gewässer so hübsch regulieren. Die grossen Steigungen der Seeniveaus sind freilich für die Uferbewohner sehr fatal, aber die Gegenden unterhalb der Seen würden weit mehr leiden unter den hohen Anschwellungen, wenn nicht die aus dem Gebirge kommenden grossen Wassermengen vor weiterem Abfluss gezwungen würden, die weiten Seebecken auszufüllen. Wie wird es wohl kommen, wenn einmal durch die unaufhörlichen Geschiebsablagerungen die Seebecken ausgefüllt sein werden! Doch, das liegt noch in sehr ferner Zeit. Die Versuche, durch Wildbachverbauungen das Geschiebe in den Bergen zurückzuhalten, werden den Seeausfüllungsprozess etwas verzögern, aber nicht aufhalten. Uebrigens könnten grosse Erdbeben inzwischen noch viel bedeutendere Veränderungen bringen.

Es ist sehr schwierig, aus den Verschiedenheiten der jährlichen Summen von Steigen und Fallen Schlüsse zu ziehen, da sehr viele und überall verschiedene Faktoren auf die Schwankungen Einfluss haben. Den grössten Einfluss auf das durchschnittliche Mass von Steigen und Fallen eines Seeniveaus hat wohl das Verhältnis der Grösse f der Seeoberfläche zur Oberfläche F des See-Einzugsgebiets. Je grösser die Seeoberfläche im Verhältnis zum Einzugsgebiet ist, desto geringer werden selbstverständlich die Schwankungen ausfallen. Dieses Verhältnis $\frac{f}{F}$ bildet für jeden See einen c o n s t a n t e n auf die Schwankungen Einfluss habenden Faktor. Infolge von Correctionen kann zwar auch dieses Verhältniss $\frac{f}{F}$ sich erheblich verändern. Folgende Tabelle zeigt solche Veränderungen für die 3 Juraseen:

	vor der Juragewässer-Correction			nach der Juragewässer-Correction		
	f	F	$\frac{f}{F}$	f	F	$\frac{f}{F}$
	km²	km²		km²	km²	
Murtensee .	27.4	778.8	0.0352	22.9	778.8	0.0294
Neuenburgersee . .	239.6	2619.6	0.0915	218.2	2619.6	0.0833
Bielersee .	42.2	3057.0	0.0138	39.4	8159.8	0.0048

Bei den übrigen Seen ist $\frac{f}{F}$ wohl so ziemlich unverändert geblieben. Es sind aber noch andere Einfluss habende Dinge als constante Faktoren zu betrachten. So die Lage des Sees zu seinem Einzugsgebiete, die Form des Sees, die Natur der Einzugsgebiete (Gletscher, Firn, Fels, verschiedene Culturarten, mehr oder weniger steile Ablaufrinnen gegen den See hin). Ausserdem haben wir an Faktoren zu denken, die der Veränderung unterworfen sind, die Verdunstungsverhältnisse, die Abflussverhältnisse und endlich die hier sehr wichtigen Niederschlagsverhältnisse, wobei besonders die Niederschlagsintensität, die durchschnittlich auf der Südseite der Alpen grösser ist als auf der Nordseite, eine bedeutende Rolle spielt. — Diese Faktoren alle sind für die 13 Seen sehr verschieden. Ein wichtiges Moment fällt beim Vergleich der Schwankungsverhältnisse der 13 Seen ins Gewicht. Seen, die alle ihre Zuflüsse direkt erhalten, erleiden natürlich grössere Schwankungen als diejenigen, deren

zufliessende Gewässer teilweise durch andere Seen reguliert worden sind. Wir teilen dementsprechend die 13 Seen in zwei Gruppen:

1. Gruppe: Bodensee, Brienzersee, Murtensee, Vierwaldstättersee, Zugersee[1]), Wallenstattersee, Genfersee und Lago di Lugano.

2. Gruppe: Thunersee, Neuenburgersee, Bielersee, Zürichsee und Lago Maggiore.

Bevor wir nun die mittleren jährlichen Summen h von Steigen und Fallen der Seeniveaus mit einander vergleichen, wollen wir diese Summen h auf die Flächen der betreffenden Seeeinzugsgebiete reducieren, d. h. für jeden See $\frac{h\,f}{F}$ berechnen.

Hierzu veranlasst uns folgende Ueberlegung:

Würde in einem Seegebiet die Seeoberfläche plötzlich doppelt so gross, so würde sich das zufliessende Wasser auf eine zweimal so grosse Fläche verteilen, also Steigen und Fallen nur halb so gross werden.

Wir bekommen demnach $h : h' = f' : f$. Würde umgekehrt für denselben See f das Einzugsgebiet F doppelt so gross, so müsste, falls die Gewässer ebenso rasch dem See zufliessen würden, das Steigen des Seeniveau's auch doppelt so gross ausfallen, es gilt also annähernd: $h : h' = F : F'$. Fassen wir zusammen, so bekommen wir: $h : h' = \frac{f'}{F'} : \frac{f}{F}$ oder $\frac{h.f}{F} = \frac{h'f'}{F'}$, es sollte also der Ausdruck $\frac{hf}{F}$ für alle Seen, die ihren Zufluss direkt erhalten, und bei welchen die übrigen auf Steigen und Fallen Einfluss habenden Faktoren dieselben wären, gleich ausfallen.

Für den Bielersee ist nach der Juragewässerkorrektion das Einzugsgebiet infolge Ableitung der Aare durch den Hageneckkanal nach dem Bielersee plötzlich von 3057 km² auf 8159.8 km² gestiegen. Es war demnach ein Wachsen der Grösse h in ungefähr gleichem Verhältnis zu erwarten, da ja $h : h' = F : F'$. Das ist annähernd eingetroffen, denn h war vor der Korrektion 410 cm und nach derselben 1301 cm. Das h ist nach der Korrektion sogar mehr als dreimal so gross geworden als vorher, hat also noch in bedeutenderem Masse zugenommen als das Einzugsgebiet. Dies ist leicht begreiflich. Frü-

[1]) Der Zufluss des Zugersees wird allerdings durch den Aegerisee etwas reguliert, allein das zugehörige Einzugsgebiet ist nicht sehr gross.

her waren die Schwankungen des Bielerseeniveau's der Regulierung des Zuflusses durch den Neuenburgersee wegen sehr gering. Jetzt spielt diese Regulierung gegenüber dem viel grösseren Einzugsgebiete keine so bedeutende Rolle mehr. Selbstverständlich dürfen wir annähernd gleiches $\frac{h \cdot f}{F}$ nur erwarten für diejenigen Seen, welche ihren Zufluss direkt bekommen, es sind demnach in den Tafeln II, III, IV die Verhältnisse $\frac{h \cdot f}{F}$ nach den beiden schon oben angegebenen Seegruppen getrennt berechnet worden. Tafel II hatte ich schon in meinem Vortrag anno 1888 vorgewiesen, allein sie ist nun doch etwas verändert, da seither die Seeflächen und die Flächen der Einzugsgebiete nach genaueren Karten bestimmt worden sind. Ueberdies wurden die durch die Juragewässerkorrektion verursachten Aenderungen der Seeoberflächen der 3 Juraseen berücksichtigt.

Tafel V enthält die Zusammenstellung der $\frac{h \cdot f}{F}$ für die drei Perioden: 1867 — 1886, 1887 — 1897 und 1867 — 1897. Die Schwankungsverhältnisse der Periode 1887 — 1897 weichen wenig ab von denjenigen der 20jährigen Periode 1867 — 1886, nur ist die mittlere jährliche Summe von Steigen und Fallen in der letzteren Periode beinahe für alle Seen etwas geringer ausgefallen, was wohl von den durchschnittlich geringeren Niederschlagsmengen der 2ten Periode herrühren mag. Eine markante Ausnahme macht die Zahl $\frac{h \cdot f}{F}$ des Neuenburgersees, die in der zweiten Periode bedeutend grösser geworden ist. Die Seefläche ist seit der Korrektion etwas kleiner geworden, und der Abfluss wird oft durch die Anschwellungen des Bielersees gehemmt. Das Mittel der $\frac{h \cdot f}{F}$ beträgt für die erste Seegruppe in der ersten Periode 37.5 cm, in der zweiten Periode 34.5 cm und in der ganzen Periode 36.4 cm, zeigt also geringe Veränderungen. Betrachten wir die $\frac{h \cdot f}{F}$ der ersten Seegruppe, berechnet für die ganze Periode der 31 Jahre 1867 — 1897, so sehen wir $\frac{h \cdot f}{F}$ unter dem Mittel 36.4 bei Bodensee, Brienzersee, Murtensee, Vierwaldstättersee, Wallenstattersee, und über dem Mittel bei Zugersee, Genfersee und Lago di Lugano, also ganz gleiches Verhalten wie in der

20jährigen Periode, die ich früher bearbeitet hatte. — Murtensee und Brienzersee zeigen die geringsten $\frac{h.f}{F}$, nämlich 22.6 cm und 25.1 cm. Der Zufluss zum Brienzersee wird durch die ca. 19% Firn- und Gletscherfläche in seinem Einzugsgebiet einigermassen reguliert, und andererseits sind die Abflussverhältnisse ziemlich günstig. Der Murtensee empfängt aus seinem langgestreckten Einzugsgebiete von schwachem Gefälle den Zufluss nur langsam, und überdies befindet sich das Einzugsgebiet in einer Zone geringer Niederschläge. Für den Bodensee ist $\frac{h.f}{F} = 30.0$. Auch hier langen die zufliessenden Gewässer aus den teilweise sehr entfernten Gebieten ziemlich langsam an. Der Wallenstattersee hat eine mittlere jährliche Summe von Steigen und Fallen von 1453 cm, die grösste aller 13 Seen, aber $\frac{h.f}{F}$ beträgt nur 32.2 cm, steht also noch ziemlich unter dem Mittel 36.4. Da die Beschaffenheit des Einzugsgebiets, die bedeutenden Niederschläge in demselben und die Lage des Sees zum Einzugsgebiete eher eine grosse Beweglichkeit des Seeniveaus erklärlich erscheinen *liessen*, so müssen wir auf günstige Abflussverhältnisse schliessen. Vierwaldstättersee und Genfersee haben nahezu gleiches $\frac{h.f}{F}$, 35.0 cm und 37.2 cm, ganz nahe dem Mittel. Bei dem Vierwaldstättersee sind fast alle Verhältnisse einem grossen Steigen und Fallen günstig, der See liegt ziemlich central zum Einzugsgebiet, die Bergabhänge sind sehr steil und die Niederschläge in der Centralschweiz sehr bedeutend, also müssen auch hier günstige Abflussverhältnisse bestehen. Beim Genfersee lassen umgekehrt die auf die Niveauschwankungen einwirkenden Verhältnisse eher auf eine geringe Beweglichkeit der Seefläche schliessen, denn die Niederschläge im Rhonegebiet sind verhältnismässig gering, das Einzugsgebiet ist ausserordentlich langgestreckt und enthält ca. 13% Firn- und Gletscherfläche. Dennoch ist $\frac{h.f}{F}$ grösser für den Genfersee als für den Vierwaldstättersee. Die Abflussverhältnisse scheinen demnach hier weniger günstig zu sein. Das grösste $\frac{h.f}{F}$ der ersten Seegruppe weisen auf: Zugersee 50.1 cm und Lago di Lugano 59.7 cm. Der Zugersee hat etwas trägen Ablauf und empfängt seinen Zufluss aus dem

verhältnismässig kleinen Einzugsgebiete ziemlich rasch. Die hohe Zahl 59.7 cm des Lago di Lugano begreift man schon besser, da der See gegenüber seinem Einzugsgebiete ziemlich central liegt, und die Zuflussrinnen sehr steil sind. Zudem sind in den transalpinen Gebieten die Regenfälle durchschnittlich weit intensiver als auf der Nordseite der Alpen.

Für die zweite Seegruppe fallen die $\frac{h \cdot f}{F}$ begreiflicherweise sehr verschieden aus, da die Zuflussverhältnisse ausserordentlich verschieden sind. Die Mittelzahl der $\frac{h \cdot f}{F}$ beträgt 29.4; sie steht, da die Zuflüsse schon teilweise reguliert sind, tiefer als das Mittel der ersten Seegruppe. Unter diesem Mittel stehen die $\frac{h \cdot f}{F}$ für den Bielersee und den Thunersee, während diejenigen für den Zürichsee, Neuenburgersee und Lago Maggiore über dem Mittel stehen. Für die zwei letzteren Seen steht $\frac{h \cdot f}{F}$ sogar über dem Mittel der ersten Seegruppe. Durch die Juragewässerkorrektion, besonders durch die Ausführung des Hageneckkanals sind die Zuflussverhältnisse des Bielersees ganz bedeutend verändert worden. Das Einzugsgebiet ist beinahe auf das Dreifache gestiegen, von 3057 km² auf 8159 km². Die mittlere jährliche Summe von Steigen und Fallen beträgt für die Zeit der 21 Jahre nach der Durchführung der Korrektion (1877 — 1897) 1301 cm, sie ist also von 410 cm (vor der Korrektion) auf etwas mehr als das Dreifache gestiegen (Tafel IV), so dass $\frac{h \cdot f}{F}$ sich nur ganz wenig verändert hat, es ist von 5.7 cm auf 6.2 cm gestiegen. Gegenüber den $\frac{h \cdot f}{F}$ der andern Seen ist diese Zahl sehr klein, was gewiss nicht überraschen wird, wenn man an die Regulierung des Zuflusses durch Murten- und Neuenburgersee und nun auch durch den Brienzer- und Thunersee denkt. Für den Thunersee ist $\frac{h \cdot f}{F} = 18.1$ cm, und für den Zürichsee 29.9 cm. Diese Verhältnisse sind für beide Perioden (1867 — 1886) und (1887 — 1897) beinahe gleich ausgefallen. Für den Neuenburgersee war $\frac{h \cdot f}{F}$ vor der Korrektion 34.7 cm und ist nun in

der Zeit 1880 bis 1897, also nach der Korrektion, auf 45.6 cm gestiegen. Der Abfluss wird eben, wie schon oben bemerkt, sehr oft durch den Bielersee gehemmt. Trotz Regulierung des Zuflusses durch den Murtensee steht $\frac{h.f}{F}$ sogar über dem Mittel 36.4 cm der ersten Seegruppe. Die Niveauschwankungen des Bielersees, aber auch diejenigen des Neuenburgersees, haben durch den Einfluss der Juragewässerkorrektion — wie zu erwarten war — ganz bedeutend zugenommen. Auf die Schwankungen des Murtensees erstreckt sich aber der Einfluss nicht merklich. Für Lago Maggiore ist $\frac{h.f}{F} = 47.3$, weit über dem Mittel 36.4 der ersten Seegruppe, immerhin ziemlich kleiner als für den Lago di Lugano. Bei den beiden südalpinen Seen sind eben alle Verhältnisse einem bedeutenden Schwanken günstig.

Nicht nur die Jahressummen von Steigen und Fallen der Seen geben Anlass zu interessanten Vergleichungen, sondern auch die Differenzen zwischen den niedrigsten und höchsten Wasserständen eines Jahres. Tafel VI enthält diese Differenzen für alle 13 Seen von Jahr zu Jahr, durch die ganze Periode der 31 Jahre 1867 — 1897 hindurch, und Tafel VII die Uebersicht über die kleinsten und grössten Differenzen zwischen den niedrigsten und höchsten Wasserständen in einem Jahre, während 1867 — 1897, über die Amplituden dieser Differenzen, über die mittleren Differenzen, und für 3 Seen noch die *Differenz* zwischen dem niedrigsten und höchsten Wasserstande in der ganzen Periode 1867 — 1897. Die letzten Differenzen lassen sich ohne eingehende Untersuchungen nur für den Genfersee, Lago di Lugano und Lago Maggiore mit einiger Sicherheit angeben, da bei den anderen vielfach Veränderungen in der Höhe der Nullpunkte vorgekommen sind.

Die mittlere Differenz zwischen dem niedrigsten und höchsten Wasserstande eines Jahres ist am geringsten beim

1. Zugersee . . .	0.63 m	7. Brienzersee . .	1.54 m
dann folgen:		8. Lago di Lugano	1.55 m
2. Vierwaldstättersee	1.06 m	9. Murtensee . .	1.75 m
3. Thunersee . .	1.17 m	10. Bielersee . . .	1.81 m
4. Zürichsee } . .	1.22 m	11. Bodensee . . .	2.08 m
5. Genfersee }		12. Wallenstattersee	2.68 m
6. Neuenburgersee .	1.42 m	13. Lago Maggiore .	2.99 m

Nach der Amplitude der Differenzen (also Unterschied zwischen der kleinsten und grössten Differenz des höchsten und niedrigsten Wasserstandes in einem Jahre) in der Periode 1867 — 1897, stellen sich die Seen in folgender Reihe:

1. Zugersee . . .	0.72 m	8. Wallenstattersee	1.69 m
2. Vierwaldstättersee	1.06 m	9. Bodensee . . .	1.92 m
3. Genfersee		10. Murtensee . .	2.01 m
4. Thunersee . .	1.12 m	11. Bielersee . . .	2.15 m
5. Brienzersee . .	1.17 m	12. Lago di Lugano	2.33 m
6. Zürichsee . .	1.29 m	13. Lago Maggiore .	6.14 m
7. Neuenburgersee	1.68 m		

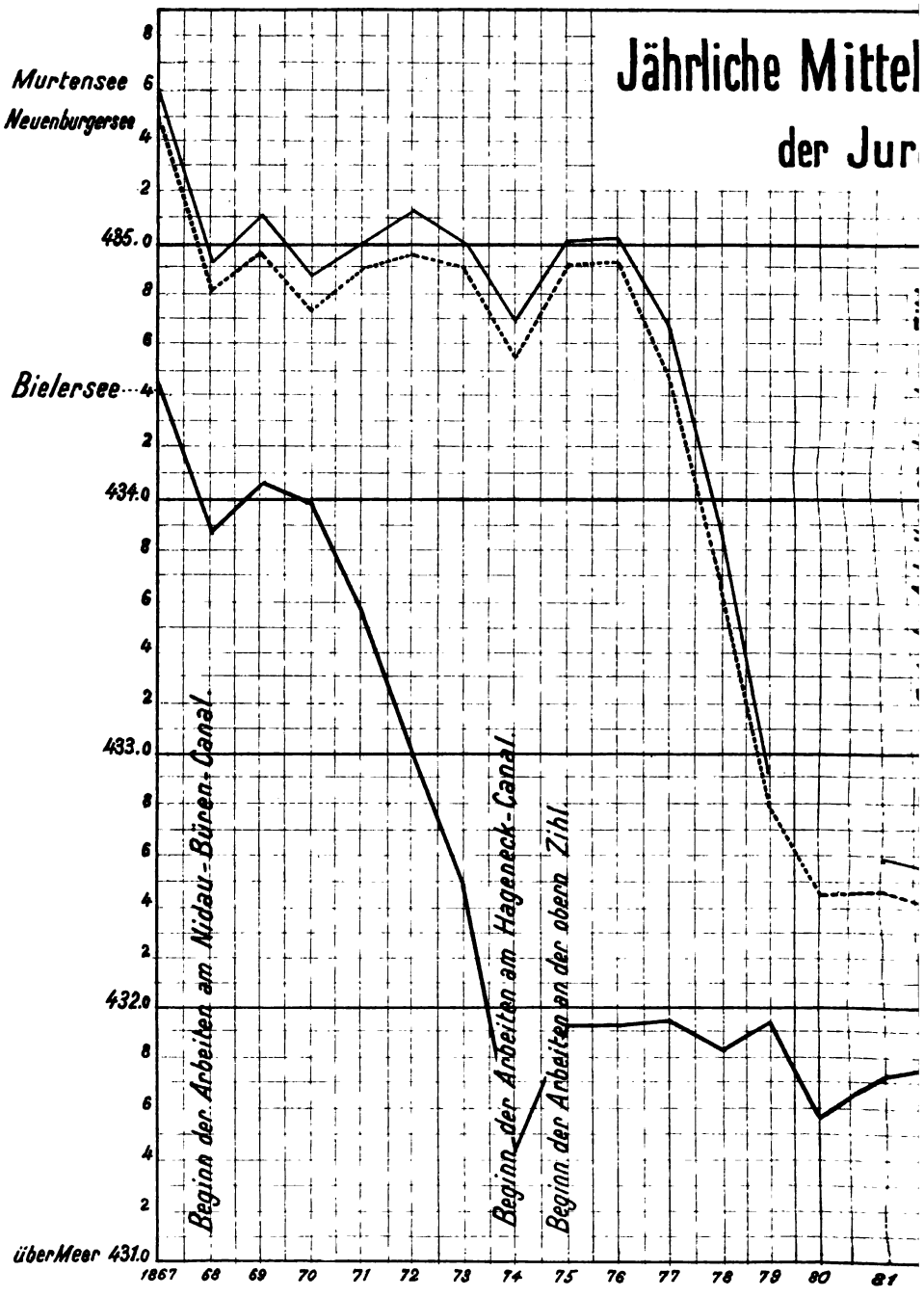
Wir sehen also da die 13 Seen geordnet nach der Gleichmässigkeit ihrer jährlichen Unterschiede zwischen höchstem und niedrigstem Wasserstande.

Bei hydrotechnischen Fragen sind durchaus nicht nur die mittleren Wasserstände von Wichtigkeit, noch mehr ins Gewicht fallen die niedrigsten und höchsten Wasserstände, deshalb hat denn auch das schweizerische hydrometrische Bureau in den graphischen Beilagen zum Bande der Hauptergebnisse der schweiz. hydrom. Beobachtungen für das Jahr 1890, welche für verschieden lange Perioden die Wasserstände der 5 Seen Murtensee, Neuenburgersee, Bielersee, Lago di Lugano und Lago Maggiore enthalten, nur die Kurven der höchsten und niedrigsten Wasserstände zur Uebersicht gebracht.

In den 3 Tafeln der Juraseen habe ich für die Zeit 1867 — 97 auch die Kurven der Mittelwasserstände eingezeichnet. Diese 3 Tafeln sind von ganz besonderem Interesse, da die Zeitpunkte des Beginns und der Vollendung der einzelnen Teile der Juragewässerkorrektion, sowie auch die nach Project La Nicca für die Zeit nach der Korrektion berechneten Hoch- und Niederwasserstufen eingezeichnet sind.[1]) Es kommt in diesen Tafeln der Erfolg der Juragewässerkorrektion für jeden der 3 Seen zu schöner übersichtlicher Darstellung. Wir heben zum Schlusse Einiges hervor:

(Siehe Tabelle S. 45.)

[1]) Die 3 Tafeln konnten hier nicht reproduciert werden, dagegen ist eine graphische Uebersicht der jährlichen Mittelwasserstände der Jura-See'n mit Angabe der Zeitpunkte von Beginn und Vollendung der einzelnen Teile der Juragewässercorrection etc. beigegeben.


Jährliche Mittel
der Jur
Murtensee
Neuenburgersee
Bielersee
485.0
434.0
433.0
432.0
über Meer 431.0
Beginn der Arbeiten am Nidau-Büren-Canal.
Beginn der Arbeiten am Hageneck-Canal.
Beginn der Arbeiten an der obern Zihl.
1867
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81

asserstände
Seen.
Beginn des Schleusendienstes in Nidau im November
Ende der Arbeiten am Hageneck-Canal
Ende der Arbeiten am Nidau-Büren-Canal
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98

A. Murtensee.

Wasserstände	Vor der Korrektion	Nach der Korrektion	Senkung	Nach der Korrektion n. Project La Nicca	Senkung n. La Nicca
	Meter über Meer	Meter über Meer	Meter	Meter über Meer	Meter
a. Aussergewöhnliches Hochwasser	436.44	434.75	1.69	435.16	1.28
b. Mittler. Hochwasser (57-76)	435.82	433.72	2.10		
c. Mittleres Niederwasser	434.49	431.91	2.58	432.50	1.99
d. Aussergewöhnliches Niederwasser	434.22	79-88 : 431.41 89-96 : 431.64	2.81 2.58		
e. Mittelwasserstand . .	ca 435.00	ca 432.60	2.40		
	Vor der Korrektion	Nach der Korrektion		N. d. Korrekt. (Proj. La Nicca)	
Aussergewöhnl. Hochwasser	m 436.44	m 434.75		m 435.16	
Aussergewöhnl. Niederwasser	m 434.22	m 431.64		m 432.50	
Schwankungsamplitude . .	m 2.22	m 3.11		m 2.66	

Vor Erstellung der Schleusen in Nidau war das aussergewöhnliche Niederwasser des Murtensees 431.41 m, also die Schwankungsamplitude noch grösser: 434.75 — 431.41 = 3.34 m.

Mittleres Hochwasser:

vor der Korrekt. 435.82 m, nach der Korrekt. 433.72 m,

Mittler. Niederwasser:

vor der Korrekt. 434.49 m, nach der Korrekt. 431.91 m

Schwankungsamplit.:

vor der Korrekt. 1.33 m, nach der Korrekt. 1.81 m.

Die Grenzen von Hochwasser und Niederwasser liegen seit der Korrektion um ca. 1 Meter weiter auseinander als vor der Korrektion.

Die aussergewöhnlichen Hochwasser haben sich nach der Korrektion um 1.69 Meter gesenkt, während nach dem Project La Nicca nur eine Senkung von 1.28 Meter zu erwarten gewesen wäre. Das

mittlere Niederwasser hat sich ebenfalls um 0.59 m mehr gesenkt als das Project erwarten liess.

B. Neuenburgersee.

Eine eigentümliche, leider noch unerklärte Erscheinung, fällt bei der Betrachtung der Tafel für den Neuenburgersee sofort auf. Das Mittel der Hochwasser für die Periode 1817 — 1856 steht um volle 0.56 Meter höher als dasjenige der Periode 1857 — 1876, ohne dass irgend welche erhebliche Korrektionen im Zeitraume von 1817—1876 ausgeführt worden sind. Ob da wirklich eine so bedeutende Senkung eingetreten ist, oder ob nicht vielleicht die Erscheinung auf Unsicherheiten in den Pegelnullpunkten zurückzuführen wäre, das wird schwierig zu entscheiden sein. In den folgenden Betrachtungen lassen wir die Periode 1817 — 1857 ausser Betracht. Wir dürfen das um so eher, da auch für den Murten- und Bielersee in den Tafeln die Wasserstände erst von 1857 an eingezeichnet sind.

Wasserstände	Vor der Correction	Nach der Correction	Senkung	Nach der Correction (nach La Nicca)	Senkung (nach La Nicca)
	Meter üb. Meer	Meter üb. Meer	Meter	Meter üb. Meer	Meter
a. Aussergewöhnliches Hochwasser . . .	436.30	434.26	2.04	434.94	1.36
b. Mittleres Hochwasser	435.53	433.27	2.26		
c. Mittleres Niederwasser	434.41	431.77	2.64	432.28	2.13
d. Aussergewöhnliches Niederwasser . . .	434.07	431.48	2.59		
e. Mittelwasserstand .	ca. 434.85	ca. 432.45	ca. 2.40		
Aussergew. Hochwasser	436.30	434.26		434.94	
» Niederwasser	434.07	431.48		432.28	
Schwankungsamplitude	**2.23**	**2.78**		**2.66**	

Vor der Erstellung der Schleusen in Nidau stand das ausserordentliche Niederwasser des Neuenburgersee's auf 431.20, also die Schwankungsamplitude 434.26 — 431.20 = **3.06** m.

Mittleres Hochwasser vor der Corr. 435.53 m, nach der Corr. 433.27 m.
Mittleres Niederwasser » » 434.41 » » » 431.77
Schwankungsamplitude » » **1.12** m, » » » **1.50** m.

C. Bielersee.

Wasserstände	Vor der Correction	Nach der Correction	Senkung	Nach der Correction (nach La Nicca)	Senkung (nach La Nicca)
	Meter üb. Meer	Meter üb. Meer	Meter	Meter üb. Meer	Meter
a. Aussergewöhnliches Hochwasser . . .	435.73	434.10	1.63	434.71	1.02
b. Mittleres Hochwasser	434.99	433.21	1.78	433.96	1.03
c. Mittleres Niederwas.	433.78			431.71	2.07
Vor Errrichtung der Schleusen in Nidau		431.16	2.62		
Nach Errichtung der Schleusen in Nidau		431.45	2.33		
d. Aussergewöhnliches Niederwasser . .	433.42			431.38	2.04
Vor Errichtung der Schleusen . . .		430.71	2.71		
Nach Errichtung der Schleusen . . .		431.42	2.00		
e. Mittelwasserstand .	ca. 434.25	432.10	ca. 2.15		
Aussergew. Hochwasser	435.73	434.10		434.71	
» Niederwasser	433.42	431.42		431.38	
Schwankungsamplitude	**2.31**	**2.68**		**3.33**	
Aussergew. Niederwass. vor Errichtung der Schleusen in Nidau .		**430.71**			
Schwankungsamplitude		**3.39**			
Mittleres Hochwasser .	434.99	433.21		433.96	
» Niederwasser .	433.78	431.45		431.71	
Schwankungsamplitude .	**1.21**	**1.76**		**2.25**	
Mittl. Niederwasser vor Erricht. der Schleusen		**431.16**			
Schwankungsamplitude .		**2.05**			

Die aussergewöhnlichen Hochwasser sind infolge der Juragewässercorrection mehr gefallen als nach Project La Nicca zu erwarten war, und zwar beim Murtensee um 0.41 m, beim Neuenburgersee um 0.68 m und beim Bielersee um 0.61 m.

Das mittlere Hochwasser des Bielersee's ist um 0.75 m mehr gesunken als nach Project La Nicca zu erwarten war.

Das mittlere Niederwasser des Bielersee's ist um 0.26 m gesunken als nach Project La Nicca zu erwarten war.

Das aussergewöhnliche Niederwasser hat sich seit Err des Schleusendienstes in Nidau um nur 4 cm weniger gesenkt, dem Projecte La Nicca zu erwarten war, der Schleusendienst sich demnach als vollkommen zweckentsprechend.

Nach alledem erweist sich als unumstössliche Thatsache, grossartige Arbeit der Juragewässercorrection uns mehr als warteten Vorteile gebracht hat. Wenn man trotzdem hie und d über die jetzigen Zustände der Seeniveaux im Juragewässerge hören bekommt, so mögen sie der viel grösseren Beweglich Niveaux seit Durchführung der Correction zur Last zu schrei Nach Beendigung der Correction ist freilich noch keine la verflossen, es mögen sich in Zukunft die mittleren Verhältni ein wenig verändern, allein wenn man die Curven der höch niedrigsten Wasserstände der drei vom hydrometrischen Bur gearbeiteten Tafeln aufmerksam betrachtet, so wird man zu zeugung kommen, dass bedeutende Veränderungen kaum zu sein werden.

ffe

1886

Meter
5.7
7.9
8.1
7.1
5.0
13.2
6.1
3.8
10.2
5.5
5.1
8.8
19.1

ffe

1886	1
Meter	1
5.7	
7.9	
8.1	
7.1	
5.0	
13.2	1
6.1	
3.8	
10.2	1
5.5	
5.1	
8.8	
19.1	1

Periode 1867—1886.

Mittlere jährliche Summa der Wasserstandsdifferenzen, reduziert auf die Oberflächen der See-Einzugsgebiete.

Tafel II.

See	See-oberflächen in km² f	Oberfläche des See-Einzugsgebietes in km² F	Verhältnis $\frac{f}{F}$	Mittlere jährl. Summe der Wasserstands-Differenzen h	Periode der Beobachtungen	Reduzierte Wasserstands-Differenzen Summe $\frac{h \cdot f}{F}$
I. Seen, die das zufliessende Wasser ihres Gebietes direkt erhalten:						
1. Bodensee	467.0	10,997.9	0.0425	702	1867—1886 : 20 Jahre	29.8
2. Brienzersee	30.0	1,135.0	0.0264	965	1872—1886 : 15 Jahre	25.5
3. Murtensee (vor der Korr.)	27.4	778.8	0.0352	596	1867—1876 : 10 Jahre	21.0
3. Murtensee (nach der Korr.)	22.9		0.0294	783	1881—1886 : 6 Jahre	23.0
4. Vierwaldstättersee . .	113.4	2,241.6	0.0506	732	1867—1886 : 20 Jahre	37.1
5. Zugersee	38.5	254.4	0.1513	352	1867—1886 : 20 Jahre	53.2
6. Wallenstattersee . .	23.3	1,050.0	0.0222	1,480	1867—1886 : 20 Jahre	32.9
7. Genfersee	577.8	7,994.5	0.0723	544	1867—1886 : 20 Jahre	39.3
8. Lago di Lugano . .	50.5	599.0	0.0843	713	1868—1886 : 19 Jahre	60.1
II. Seen, die ihre Gewässer zum Teil reguliert erhalten:					Mittel =	37.5
9. Thunersee	47.9	2,448.7	0.0196	962	1872—1886 : 15 Jahre	18.8
10. Neuenburgersee (v.d.Korr.)	239.6	2,619.6	0.0915	379	1867—1876 : 10 Jahre	34.7
10. Neuenburgersee (n.d.Korr.)	218.2		0.0833	460	1880—1886 : 7 Jahre	38.3
11. Bielersee (v. d. Juragew.-Korr.)	42.2	3,057.0	0.0138	412	1867—1871 : 5 Jahre	5.7
11. Bielersee (n. d. Juragew.-Korr.)	39.4	8,159.8	0.0048	1,079	1877—1886 : 10 Jahre	5.2
12. Zürichsee	87.8	1,815.1	0.0484	642	1867—1886 : 20 Jahre	31.4
13. Lago Maggiore . . .	214.3	6,548.0	0.0327	1,485	1868—1886 : 19 Jahre	48.6

Periode 1887—1897. **Mittlere jährliche Summa** **Tafel III.**

der Wasserstandsdifferenzen, reduziert auf die Oberflächen der See-Einzugsgebiete.

See	See-oberflächen in km² f	Oberfläche des See-Einzugs-gebietes in km² F	Verhältnis $\frac{f}{F}$	Mittlere jährl. Summe der Wasserstands-Differenzen h	Periode der Beobachtungen	Reduzierte Wasserstands-Differenzen-Summe $\frac{h \cdot f}{h}$
I. Seen, die das zufliessende Wasser ihres Gebietes direkt erhalten:						
1. Bodensee	467.0	10,997.9	0.0425	712	11 Jahre	30.3
2. Brienzersee	30.0	1,135.0	0.0264	928	„	24.5
3. Murtensee	22.9	778.8	0.0294	762	„	22.4
4. Vierwaldstättersee . .	113.4	2,241.6	0.0506	617	„	31.2
5. Zugersee	38.5	254.4	0.1513	291	„	44.0
6. Wallenstattersee . .	23.3	1,050.0	0.0222	1,405	„	31.2
7. Genfersee	577.8	7,994.5	0.0723	462	„	33.4
8. Lago di Lugano . . .	50.5	599.0	0.0843	697	„	58.8
II. Seen, die ihre Gewässer zum Teil reguliert erhalten:					Mittel =	34.5
9. Thunersee	47.9	2,448.7	0.0196	871	„	17.1
10. Neuenburgersee . . .	218.2	2,619.6	0.0833	600	„	50.0
11. Bielersee	39.4	8,159.8	0.0048	1,503	„	7.2
12. Zürichsee	87.8	1,815.1	0.0484	573	„	27.7
13. Lago Maggiore . . .	214.8	6,548.0	0.0327	1,384	„	45.3

Mittlere jährliche Summe der Wasserstandsdifferenzen, reduziert auf die Oberflächen der See-Einzugsgebiete.

See	See-oberflächen in km² f	Oberfläche des See-Einzugs-gebietes in km² F	Verhältnis $\frac{f}{F}$	Mittlere jährl. Summe der Wasserstands-Differenzen h	Periode der Beobachtungen	Reduzierte Wasserstands-Differenzen-Summe $\frac{h \cdot f}{F}$
I. Seen, die das zufliessende Wasser ihres Gebietes direkt erhalten:						
1. Bodensee	467.0	10,997.9	0.0425	706	1867—1897 : 31 Jahre	30.0
2. Brienzersee	30.0	1,135.0	0.0264	950	1872—1897 : 26 Jahre	25.1
3. Murtensee (vor d. Korrekt.)	27.4	778.8	0.0352	596	1867—1876 : 10 Jahre	21.0
3. Murtensee (nach d. Korrekt.)	22.9	778.8	0.0294	769	1881—1897 : 17 Jahre	22.6
4. Vierwaldstättersee . .	113.4	2,241.6	0.0506	692	1867—1897 : 31 Jahre	35.0
5. Zugersee	38.5	254.4	0.1513	331	1867—1897 : 31 Jahre	50.1
6. Wallenstattersee . .	23.3	1,050.0	0.0222	1,453	1867—1897 : 31 Jahre	32.2
7. Genfersee	577.8	7,994.5	0.0723	515	1867—1897 : 31 Jahre	37.2
8. Lago di Lugano . .	50.5	599.0	0.0843	708	1868—1897 : 30 Jahre	59.7
II. Seen, die ihre Gewässer zum Teil reguliert erhalten:					Mittel =	36.4
9. Thunersee	47.9	2,448.7	0.0196	924	1872—1897 : 10 Jahre	18.1
10. Neuenburgersee (vor der Juragewässer-Korrektion)	239.6	2,619.6	0.0915	379	1867—1876 : 10 Jahre	34.7
10. Neuenburgersee (nach der Juragewässer-Korrektion)	218.2	2,619.6	0.0833	547	1880—1897 : 18 Jahre	45.6
11. Bielersee (v.d. Juragew.-Korr.)	42.2	3,057.9	0.0138	410	1867—1871 : 5 Jahre	5.7
11. Bielersee (n. d. Juragew.-Korr.)	39.4	8,159.8	0.0048	1,301	1877—1897 : 21 Jahre	6.2
12. Zürichsee	87.8	1,815.1	0.0484	618	1867—1897 : 31 Jahre	29.9
13. Lago Maggiore . . .	214.3	6,548.0	0.0327	1,448	1868—1897 : 30 Jahre	47.3

Tabelle V.

See.	Mittlere jährl. Summen, von Steigen und Fallen, reduziert auf die Flächen der Einzugsgebiete. $\frac{h\,f}{F}$			
	Periode 1867/1886	Periode 1886/1897	Ganze Periode 1867/1897	
	cm	cm	cm	
I. See'n, die das zufliessende Wasser ihres Gebietes direkt erhalten:				
1. Bodensee . . .	29.8	30.3	30.0	
2. Brienzersee . . .	25.5	24.5	25.1	
3. Murtensee: a) vor d. Juragew. Correkt. (1867—1876) . .	21.0	22.4	22.6	(1881—
b) nach der Juragew. Corr. (1881=1886)	23.0			
4. Vierwaldstättersee .	37.1	31.2	35.0	
5. Zugersee	53.2	44.0	50.1	
6. Wallenstattersee .	32.0	31.2	32.2	
7. Genfersee . . .	39.3	33.4	37.2	
8. Lago di Lugano .	60.1	58.8	59.7	
Mittel	**37.5**	**34.5**	**36.4**	
II. See'n, die ihren Zufluss zum Teil reguliert erhalten:				
9. Thunersee . . .	18.8	17.1	18.1	
10. Neuenburgersee				
a) vor der Juragew. Corr. (1867—1876)	34.7			
b) nach der Juragew. Corr. (1880—1886)	38.3	50.0	45.6	(1880—
11. Bielersee				
a) vor der Juragew. Corr. (1867—1871)	5.7			
b) nach der Juragew. Corr. (1877—1886)	5.2	7.2	6.2	(1877—
12. Zürichsee . . .	31.4	27.7	29.9	
13. Lago Maggiore . .	48.6	45.3	47.3	
Mittel	**28.2**	**29.5**	**29.4**	

Zu

W	
2′	
6′	
4′	
6′	
5′	

13. Lago Maggiore . .	48.6	45.3	47.3
Mittel	**28.2**	**29.5**	**29.4**

Tafel VII.

	Kleinste Differenz zwischen d. niedrigst. u. höchsten Wasserstande ein. Jahres in d. Periode 1867-1897	Grösste Differenz zwischen d. niedrigst. u. höchsten Wasserstande ein. Jahres in d. Periode 1867-1897	Amplitude dieser Differenzen	Mittlere Differenz zwischen d. niedrigst. u. höchsten Wasserstande ein. Jahres für 1867-1897 (31 Jahre)	Differenz zwisch. d. niedrigst. u. höchst. Wasserstande in d. Periode d. 31 Jahre 1867-1897
	m	m	m	m	m
1. Bodensee . . .	1.26	3.18	1.92	2.08	
2. Brienzersee . . .	0.80	1.97	1.17	1.54 (26 Jahre)	
3. Thunersee . . .	0.68	1.80	1.12	1.17 (26 Jahre)	
4. Murtensee . . .	1.00	3.01	2.01	1.75 (30 Jahre)	
5. Neuenburgersee .	0.69	2.37	1.68	1.42 (30 Jahre)	
6. Bielersee . . .	1.00	3.15	2.15	1.81	
7. Vierwaldstättersee .	0.61	1.67	1.06	1.06	
8. Zugersee	0.33	1.05	0.72	0.63	
9. Wallenstattersee .	1.86	3.55	1.69	2.68	
10. Zürichsee . . .	0.72	2.01	1.29	1.22	
11. Genfersee . . .	0.63	1.69	1.06	1.22	2.02
12. Lago di Lugano .	0.69	3.02	2.33	1.55 (30 Jahre)	3.02
13. Lago Maggiore . .	1.21	7.35	6.14	2.99 (30 Jahre)	7.84

A. Baltzer.

Beiträge zur Kenntniss schweizerischer diluvialer Gletschergebiete.

(Eingereicht den 12. November 1899.)

1. Machten die Juragletscher nach dem endgültigen Rückzug des Rhonegletschers noch Vorstösse in die Ebene?

Früher[1]) wies ich nach, dass unsere diluvialen Gletscher nicht gleichzeitig vor- und rückwärts gingen (Regel von der Inkongruenz der Vor- und Rückwärtsperioden). Als der Rhonegletscher gegen Ende der letzten Eiszeit sich zurückzog, machten Aar- und Saanegletscher noch Vorstösse in die Ebene. Es frägt sich, ob dies auch für die kleinen Juragletscher Gültigkeit habe. Schardt[2]) hat diese Frage für den westschweizerischen Jura im bejahenden Sinne beantwortet. Bei den nach der Versammlung von Neuchâtel unter seiner trefflichen Leitung ausgeführten Exkursionen sprach er sich bezüglich der jurassischen Val Travers- und Baulmesgletscher für diese Meinung aus und zeigte uns als Beleg einen Aufschluss im Bahneinschnitt bei Station Boudry, sowie einen als jurassische Endmoräne anzusprechenden Rücken zwischen Rances und St. Christoph bei Baulmes. Da ich noch Zweifel hegte, die Frage mich aber lebhaft interessierte, benützte ich ein paar schöne Herbsttage, um diese und andere Stellen nochmals zu untersuchen.

a. Exkursion: Yverdon, Montagny, Vuitteboeuf, Baulmes, Rances, St. Christoph.

Folgt man von Yverdon der grossen Strasse nach Grandson und schwenkt dann westwärts nach Montagny ab, so hat man vor sich die vom Gletscher gemodelten Molassehügel von Montagny, die oberhalb dieses Ortes nicht von gemeiner Moräne (wie Blatt XI ungenau angiebt), sondern von Kies jurassisch alpiner Herkunft (unter anderem

[1]) 30. Lieferung der Beiträge zur geolog. Karte der Schweiz, pag. 125 ff. vergl. auch «Zeitschrift der deutschen geolog. Gesellschaft» 1896.

[2]) Archives des sciences phys. et nat. 1898, p. 74.

grüne Wallisergneisse) bedeckt sind. Dahinter folgt das unregelmässige Gehügel von Essert und Peney. Häufig konstatiert man gemeine Grundmoräne mit geschrammten Alpenkalken und Serpentinen (bei 518 m, 506 m) [1]), manchmal kommt die untere Süsswassermolasse zu Tage (an der Strasse östlich Essert).

Ueberall ist der Typus länglich-runder Glacialrücken meist in Rhonegletscherrichtung vertreten, weniger der der Rundhöcker.

Diese Hügel sind in der Mehrzahl als Drumlins (Drums) zu betrachten, da zwischen den typischen Grundmoränedrums und den Drums mit festem Molassekern ein genetischer Unterschied wohl nicht gemacht werden kann.

Bei Vuitteboeuf ist gemeine Grundmoräne jurassisch-alpinen Materials ebenfalls weit verbreitet (Aufschluss der Senkgrube bei der Station), doch findet sich kein Anhaltspunkt für ein junges von Ste Croix kommendes Juragletscherchen, nur die flache schüsselförmige Depression unterhalb des Ortes deutet allenfalls darauf hin, dass hier einstmals eine Gletscherzunge lag.

Wir begeben uns nun nach Baulmes, um zu untersuchen, ob dort aus der Nische der Aiguilles de Baulmes ein Gletscher sich herauserstreckte. Bemerkenswert sind auf dem Wege dorthin die Rhonelängsmoränenwälle bei Sagnes, ferner südlich von Rauliauses (viel Quarzit), besonders aber der ein paar 100 m lange Moränenwall in Rhonegletscherrichtung an der Strasse bei Priolaz vor Baulmes (Fig. 1).

Figur 1.
Theil des Kiesrückens (Kame) bei Baulmes im Längsschnitt. 1. Kies, 2. Sand.

Derselbe ist in den Konturen sehr unruhig, ähnlich aneinander gereihten Maulwurfshügeln. Die Kies- und Sandschichten sind merkwürdig gestaucht, im allgemeinen anticlinal in Längsrichtung. Viel Jurakalk, Serpentin, Quarzit, ferner Alpenkalk, Granit und etwas geschrammtes Material in den weniger gewaschenen Lagen. Ich glaube, dass hier eine sandige Grundmoräne vom Typus der Kames oder Åsar vorliegt Eine Parallelmoräne liegt auf der anderen Strassenseite.

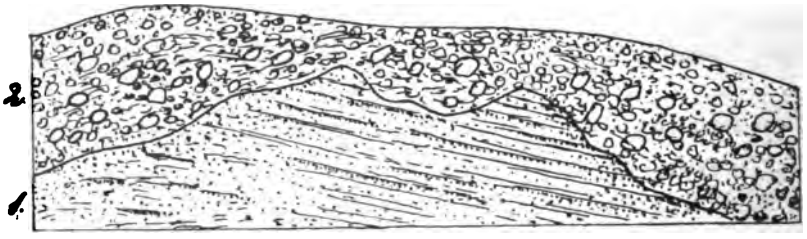
[1]) Blatt 286 des Siegfriedatlas.

Der starke Bach la Baumine biegt, bei Baulmes aus dem Jura kommend, schroff um und läuft, anstatt geradeaus, an 3 km weit dicht an der Jurakette zwischen den oben erwähnten Moränen und der Moräne von Bossenay, in einer echt glacialen breiten Rinne, hin, die sich nach Süd bis an die Marais de Rances fortsetzt.

Aehnlich wurde der Arnon bei Vuittebœuf abgelenkt. Es ist möglich, dass solche Bäche an subglacialen Kames (Asar) eine andere Richtung erhielten oder selbst solche erzeugt haben.[1])

Ueberall beobachtet man bei Baulmes stramme Rhonerichtung der Moränen, keine Endmoräne eines Juragletschers, wiewohl das Material gestopft voll jurassisch ist. Aus diesem Umstand allein dürfen wir aber nicht auf jurassischen Vorstoss schliessen, denn es ist bei der Nähe des Jura begreiflich, dass hier die Rhoneseitenmoränen vorwiegend lokalmoränischen Charakter annahmen. Für das Folgende sei angeführt, dass es schwer hält, den Prozentsatz alpinen Materials ohne sorgfältige Zählungen, die ich bei dieser Orientirungstour nicht vorgenommen habe, abzuschätzen. Man kommt leicht dazu, das Alpine zu überschätzen, weil es mehr in die Augen fällt.

Von Baulmes die genannte Glacialrinne kreuzend, gelangen wir auf der Strasse nach Rances zum cretacischen, glacial abgeschliffenen, mit Blöcken (6 grössere bei Chaux, darunter Granit und Serpentin) und dünnem Moränenüberzug bekleideten Hügel von Pipeschat. Dann, in der Richtung von Rances absteigend, schauen wir in das 3 km lange glaciale Trockenthal Rances-Châtillon hinein und kommen dann zu dem von Schardt als jurassische Endmoräne angesprochenen Wall, der in direkter Linie ½ Stunde von der Jurakette entfernt ist.



Figur 2.
Kiesrücken (Kame) des alten Rhonegletschers bei Rances im Querschnitt.
1. Sand. 2. Kies.

Dieser Wall ist 1 km lang (wenn Punkt 505 m dazu gerechnet werden kann, noch länger), hat unruhige Kontouren, aber geradlinigen

[1]) Vergl. die Beobachtungen von Russel am Malaspinagletscher (Alaska).

Verlauf. Material massenhaft jurassisch, mit starkem alpinem Prozentsatz (Granit, Alpenkalk, Serpentin, Quarzit, Gneiss etc.). Viel Sand und feiner Kies. Mit einiger Mühe wurden 5 geschrammte Serpentine aufgetrieben.

An einer Stelle hat die Kiesgrube den erodierten Kern von Sandschichten entblösst (Fig. 2), auf dem der fluvioglaciale Schotter diskordant liegt. Hiernach kann ich die Lokalendmoräne eines jurassischen St. Croix-Baulmesgletschers hier nicht finden, sondern nehme einen Kiesrücken (Kame) des Rhonegletschers an.

Der Gehalt an Juramaterial kann nicht auffallen, nachdem sich 2 ½ Stunde weiter südlich die Kette des Mont Tendre so weit vorschiebt; für obige Deutung spricht ferner der geradlinige, nicht hufeisenförmige Verlauf, das Fehlen der zugehörigen jurassischen Seitenmoränen, die ganz vorwaltend fluvioglaciale Zusammensetzung, der ganze Charakter der Glaciallandschaft zwischen hier und Baulmes, welcher augenscheinlich der Rhonegletscher sein Gepräge aufgedrückt hat.

Oestlich von Mathod in der Ebene zeigte uns Schardt früher noch eine Kiesgrube mit unten viel grobgeschichtetem, jurassischen Material, oben mit grossen eckigen Rhonegletscherblöcken (auch Molasseblöcke). Ich glaube nicht, dass hier die fluvioglaciale Ablagerung eines jurassischen Val-de-Traversgletschers vorliegt. Nähere Untersuchung müsste feststellen, ob hier vielleicht alte Juragletschermoräne, überlagert von jüngerem Rhoneschutt, angenommen werden könnte, oder ob es sich nur um 2 Phasen des Rhonegletschers handelt.

b. Exkursion: Chanélaz, Bôle, Boudry, Cortaillod.

Auch bei dieser Exkursion leitete mich die Absicht, die Frage der Juragletschervorstösse zu prüfen, Kames, Drumlins, interglaciale Ablagerungen nachzuweisen, sowie Blatt XI bezüglich der Glacialablagerungen zu kontrollieren.

Südlich Colombier liegt der rebenbekränzte Hügel von Vaudijon, dessen regelmässig länglich-runde allseitig abfallende Form glacialen Ursprung verrät. Einen Aufschluss finden wir auf der Nordostseite: viele wechselnde Lagen von lockerem Sand, Kies und wenig Mergel, der Kies alpin-jurassischen Ursprungs. Lokal ist Diagonalschichtung entwickelt; ich fand nur ein Stück mit Schrammen. Ueber die Deutung bin ich nicht ganz schlüssig geworden. Ich habe an ein Kame und an eine alte Deltabildung der Areuse gedacht.

Figur 3. Moräne des alten jurassischen Val-de-Traversgletschers bei Bôle.

Westlich von Colombier liegt der kleine Ort Bôle. Begeben wir uns zur Station Colombier, so haben wir in der Richtung auf jenen Ort eine cirka 600 m lange Moräne vor uns (Fig. 3), die auf den ersten Blick wegen der auffallenden Richtung nach Südsüdost den Eindruck einer Jura-Seitenmoräne macht. Wiewohl die Weinlese in vollem Gang ist, lässt sich auf der Südseite gemeiner Moränenboden mit vorwaltendem jurassischen Material feststellen. In kleinerer Proportion treten Alpenkalk und walliser Gneisse, Quarzit und Serpentin auf. Gekritzte Serpentine und Alpenkalke sind nicht selten.

Dass hier kein Molasserücken mit dünnem Moränenbeleg vorliegt, ergiebt sich auf der Südseite im Eisenbahneinschnitt; eine Endmoräne des Rhonegletschers ist durch die nach Süden konvexe Form ausgeschlossen. Nach Süden besitzt die Moräne noch eine Stufe, sodann fällt sie gegen das glaciale Trockenthälchen «La Combe» ab, welches von der Eisenbahn auf einem Damm überschritten wird. Jenseits La Combe befindet sich noch ein guter Moränenaufschluss von gleichem Charakter, wo das Vorwiegen des Jurakalkes gegenüber dem alpinen Material (wenig Alpenkalk, Granit, einige grosse eckige Gneissblöcke) deutlich hervortritt. Geschiebe rund und kantenrund.

Begeben wir uns von hier über

Troisrods zur Station Boudry, wo uns Schardt einen schönen Aufschluss im Eisenbahneinschnitt als glacialjurassisch bezeichnete. Der erste Eindruck war mir damals mehr der von Rhoneablagerung. Die genauere Untersuchung ergab eine auf flachem Gehäng ohne Wallformen abgelagerte fluvioglaciale Bildung, bestehend aus:

1) 1 m Dammerde;

2) 2 m grober, ungeschichteter Glacialschotter mit viel eckigen und kantenrunden, bis zu ½ cbm grossen Blöcken in sandigem Bindemittel. Material jurassisch mit starkem alpinem Prozentsatz von Granit, Gneiss, Quarzit, Alpenkalk, Euphotid, Serpentin, Kalknagelfluh etc.;

3) darunter 2½ m ungeschichteter oder schlecht geschichteter feinerer Schotter ohne grosse Blöcke, stärker jurassisch, sonst gleich wie 2). Bindemittel kiesig, Schrammen selten auf Serpentin und Alpenkalk.

Gegenüber dieser Stelle liegt eine andere entsprechende, nur zeigt sich Discordanz zwischen 2 und 3 ohne Erosionsfläche. Ein dritter ähnlicher Aufschluss liegt auf dem Champ creux.

Hiernach handelt es sich um einen grossen alten Gletscherboden, der in seiner Grundlage jurassischen Charakter hat und demnach wohl mit einem alten Gletscher des Val Travers in Verbindung gebracht werden kann. Da das Val Travers zur grossen Eiszeit von Rhonegletschermaterial erfüllt wurde, so kann der obere Schotter gleichfalls eine Ablagerung des Juragletschers mit rückverfrachtetem Rhonegletschergeschieb sein. Ausgeschlossen ist allerdings nicht, dass Rhonegletscherablagerung vorliegt, die sich ohne zeitlichen Unterbruch auf die Juraablagerung legte. Jenes ist mir in Verbindung mit der Moräne von Bôle wahrscheinlicher.

Wenn wir nun auf das rechte Ufer der Areuse übersetzen, so haben wir hier eine auf Blatt 308 des Siegfriedatlas angedeutete flache Erhebung, die in 513 m kulminiert und aus gemeiner Grundmoräne besteht. Material jurassisch, wenig alpines, Schrammen zahlreich.

Das Erosionsthal der Areuse ist in Mergel, Kalk und Sandsteine der unteren Süsswassermolasse mit Süsswasserschnecken eingeschnitten. 25 m über Boudry beginnt aber schon die typische, thonige, gemischte Grundmoräne, die hier eine beträchtliche Mächtigkeit aufweist. Die Schrammen sind auf den Jurakalken weniger gut wie auf den Alpenkalken erhalten. Die Gehänge von Les Rossets bei Boudry zeigen glaciale Reliefformen.

Unser letztes Ziel sind die Moränen beziehungsweise Drumlins des weinberühmten Cortaillod. Wohl möglich, dass sie Molassenkerne mit dickem glacialem Ueberzug darstellen. Jedenfalls ist der Kern glacial gemodelt. Wir zählen 3 solcher Längsrücken. Einer läuft von Les Rochettes gegen die Höhenquote 510 m, der andere östlich davon, der dritte ist der Hauptzug und geht von Mont de Pitié bis 508 m, ja bis über das Dorf Cortaillod hinaus. Er ist nur an einem Punkt etwas tiefer aufgeschlossen, ohne dass Molasse zum Vorschein kommt. Diese Cortaillodmoräne ist jurassischen Materiales mit einzelnen alpinen Geschieben: Quarzit, Alpenkalk, Diorit, Gneiss, Glimmerschiefer, Glimmerquarzit; auch grössere aufgesetzte Blöcke fehlen nicht. Bindemittel lehmig. Stellenweise ziemlich viel gekritztes Material.

Wollte man sich nach dem Material richten, so müsste man hier die Ablagerung eines jurassischen Seitengletschers annehmen; dem widerspricht aber der Verlauf von Süd nach Nord; man sieht also, dass man in dieser Gegend nach dem Material allein die Provenienz eines Gletschers nicht herleiten darf, dass vielmehr zur Bestimmung derselben der Verlauf der Wallmoränen wichtiger ist.

Steigen wir von Mont de Pitié nach Chanélaz herunter, so liegt uns ein altes interglaciales Delta der Areuse vor Augen. Dasselbe ist an mehreren Stellen am Promenadenwaldweg, oberhalb der Pension Chanélaz, aufgeschlossen, desgleichen abwärts gegen den Bach zu.

Der Hauptaufschluss zeigt mit SW 12° Süd streichende Kies- und Sandschichten, die mit 20° SO fallen. Material ganz jurassisch mit nur vereinzelten alpinen Geschieben, hier nicht verfestigt, dagegen weiter unten hinter der Pension zu Nagelfluh verkittet. An einer andern Stelle bemerkt man geschichteten, röthlich gebänderten Sand, auf dem ein sehr feiner lössähnlicher Kalkstaub aufliegt.

Dieses Delta wird von jüngerer Grundmoräne bedeckt, ist also älter.

Vergleichen wir mit diesen Befunden die geologische Karte Blatt XII, so erweist sie sich mit Bezug auf das Glacial als sehr unvollkommen. Die Moränen von Bôle, Cortaillod sind als geschichtetes Quartär, das erwähnte Delta dagegen gar nicht verzeichnet. Die Unterscheidung von geschichtet und ungeschichtet ist überhaupt unzulänglich, denn in ersterem können interglaciale, glaciale und postglaciale Bildungen stecken, beide Ausbildungen kommen sowohl bei flachliegender Moräne wie bei Wällen vor und sind oft ganz verschiedenen Alters.

Resumé.

Für einen von der Aiguille de Baulmes oder den Gorges de Covatannaz zu einer Zeit vorstossenden Juragletscher, als der Rhonegletscher seinen letzten Rückzug antrat, ist kein genügender Beweis vorhanden. Dagegen stiess ein aus dem Val-de-Travers kommender Juragletscher, verstärkt durch ein von Rochefort kommendes Gletscherchen, noch kräftig vor und warf die Ufermoräne von Bôle auf. Stationär verhielt er sich nicht, wie aus der fehlenden Endmoräne hervorgeht.

Bedeckt von jüngerer Moräne liegt bei Chanélaz, östlich von Boudry, ein interglaciales Delta der Areuse, welches aus schrägen mit 20 ° SO zu Ost fallenden unten zu Nagelfluh verkitteten Schichten besteht. Die Areuse war also in der zweiten Interglacialzeit schon tief eingeschnitten.

Der Nachweis von mit Bezug auf den Rhonegletscher postglacialen Juragletschern kann nicht allein durch vorwaltende Jurageschiebe geliefert, sondern muss in erster Linie durch End- und Ufermoränen geleistet werden.

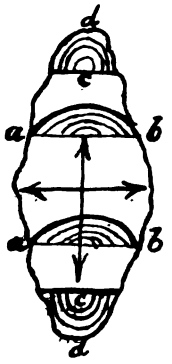


Fig. 4.
Schema eines Kiesrückens (Kame). Die Pfeile deuten den Schichtenfall an. a b Querprofil, c d Horizontalschnitt.

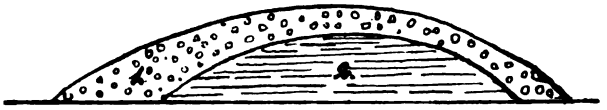
Im Rhonegletschergebiet kommen anticlinal geschichtete Kies- und Sandwälle vor, die wahrscheinlich unter Eis sich gebildet haben (zum Theil vielleicht zwischen den Eiszungen gelappter Gletscherenden). Sie haben die Richtung des alten Gletschers und sind Produkte der letzten Vergletscherung. Glacial entstandene Thälchen liegen in der Nähe. Beispiele bei La Priolaz (östlich von Baulmes) und nördlich von Rances. Figur 4 giebt ein Schema. Sie sind den Kames von Schottland, Nordamerika und den Åsar von Skandinavien und Finnland zuzurechnen. Dieser für unsere alten Gletschergebiete neue Moränentypus ist von den «Drums» (Grundmoränenrücken) durch Material und Schichtung unterschieden.

Man vergleiche die Schilderung der nordamerikanischen Kamesvon Lewis [1]), und man wird finden, dass mit Bezug auf Material, Richtung und anticlinale Schichtung Uebereinstimmung herrscht. Vergleiche auch Geikies [2]) Ausgaben.

[1]) H. C. Lewis: Report of terminal Moraine of Pensylvania etc. pag. 3,5 36, 61, 190 und besonders Tafel III und XV.

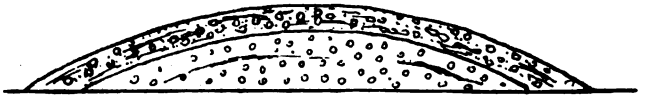
[2]) „Ice age" pag. 180 ff., Fig. 47 und 48, pag. 746.

Drumlins, besonders in der Form etwas länglich gestreckter rundlicher Hügel mit Grundmoränebedeckung, sind in der untersuchten Gegend zwischen Colombier und Baulmes ziemlich häufig (Montagny, Baulmes, St. Christoph, Boudry, Bevaix). Sie sind jedoch nirgends so charakteristisch geschart, wie dies auf der Bodanhalbinsel, bei Friedrichshafen und Lindau vorkommt.



Figur 5.
Schema eines asymetrischen Drumlin im Längsschnitt mit Kern.
1. Grundmoräne, ungeschichtet, 2. Anstehendes.

Ich rechne ausdrücklich dazu auch die Molassehügel mit Drumform und dünner Moränenbedeckung, da sie von Grundmoräne-Drums



Figur 6.
Schema eines symetrischen Drumlin im Längsschnitt mit spurweis geschichtetem Grundmoränenkern und Kieshülle.

genetisch nicht zu trennen sind, d. h. ebenfalls unter dem Eis gebildet wurden. Die Figuren 5 und 6 stellen schematisch Drumlinstypen, wie ich sie im Gebiet des Rheingletschers[1]) und Rhonegletschers beobachtete, dar.

Rundhöckerformen, genetisch von den genannten Drums nicht zu unterscheiden, sind häufig. Der Chamblon bei Yverdon ist ein Beispiel im Grossen.

Alte glaciale Trockenthäler sind manchmal deutlich nachweisbar, z. B. «La Combe» bei Boudry, ferner bei Rances, sowie längs dem Jura.

2. Bruchüberschiebung in einer Wallmoräne des alten Aargletschers bei Bern.

Zwischen Bern uud Gümlingen wurde dicht an der Strasse in einer geschichteten Wallmoräne (Endmoräne) von sandiger Facies und mit gekritzten Geschieben eine Kiesgrube angelegt, welche beifolgendes Bild einer echten Bruchüberschiebung entblösste.

[1]) Mitteil. der bern. nat. Ges. 1898.

Ueberschiebung in einer Endmoräne bei Bern.

_____ Ueberschiebungsebene. Der Pfeil giebt die Stossrichtung des Gletschers an.

Mein Assistent, Herr Dr. Hugi, war so freundlich, die photographische Aufnahme zu machen.

Die an den Seiten durch Striche markierte etwas gekrümmte Ueberschiebungsfläche ist unter cirka 10° nach SO geneigt. Die sandig-lehmigen Schichten (im Lichtdruck dunkel) führen gekritzte Geschiebe von Aargletscher-Material und sind an den trockeneren, kiesigsandigen Schichten (im Lichtdruck hell) um mehrere Meter verschoben, so zwar, dass der rechtsseitige Komplex über den linksseitigen hinaufgeschoben erscheint (am deutlichsten im festeren Lehm zu beobachten). In der Mitte der Figur greifen lehmige und sandige Schichten zackig ineinander ein, wodurch wohl die Ueberschiebung ihren Abschluss fand.

Diese Ueberschiebung, in der Richtung von SO nach NW, entspricht durchaus der durch den Pfeil angedeuteten Bewegungsrichtung des alten diluvialen Aargletschers.

3. Neue Bergmoränenaufschlüsse auf dem Gurten (859 m) bei Bern.

Die jüngst eröffnete elektrische Bahn auf die Gurtenhöhe hat Veranlassung zu neuen geologischen Aufschlüssen gegeben, woraus sich noch deutlicher als bisher ergiebt, dass das eigentümlich wellige Plateau des Berges eine Decke von Grundmoräne besitzt, die zwischen wenigen Fussen und circa 8 Metern schwankt. Insbesondere wurde beim Bau des neuen Hotels sandig-lehmige Grundmoräne von wechselnder Mächtigkeit mit viel Molasse- und wenigen alpinen Geschieben (Gneisse, Quarzit, Verrucano, einzelne geschrammte Alpenkalke) aufgedeckt.

Wo die Molasse unter der Moräne beginnt, ist sie zunächst auf eine Tiefe von circa 1½ m merkwürdig gespalten und in grosse Blöcke getheilt.

Dieselbe Moräne giebt nun einen Masstab für die Eiserosion an diesem exponierten Punkte, denn sie ist fast nur Lokalmoräne der Molasse in loco, ihr Material ist vorwiegend Molassesand. Man kann wohl ihrer Dicke von 6 m die Dicke der wegerodierten Sandsteinschicht an einem so exponierten Punkte ungefähr gleichsetzen. Dies stimmt mit meinen früheren Angaben [1]), wonach die Dicke der sandigen Grundmoräne in der Gegend von Bern, soweit beobachtet, einige Meter bis gegen 10 m beträgt.

---

[1]) Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz, Lfg. 30 pag. 113.

Es scheint also, dass die Annahme geringer Beträge für Eiserosion (nach Heims Gletscherkunde) der Wirklichkeit nicht entspricht, noch weniger die Annahme exorbitant hoher Beträge nach Penck.

4. Kame- oder åsarartiger Kiesrücken bei Lindau.

In seiner trefflichen Schilderung der Drumlinlandschaft der Bodenseegegenden beschreibt Früh[1]) keine åsarartigen Kiesrücken. Ich theile daher hier eine Beobachtung mit, die ich gelegentlich eines Besuches des bekannten Aussichtspunktes Hoyrerberg bei Lindau machte.

Dieser Berg selbst ist ein Drumlin, vielleicht mit Molassekern. Rheingletschermoräne bildet die Oberfläche, hie und da findet sich ein gekritztes Geschieb. Länge des Rückens einige 100 m, Streichen OSO in Rheingletscherrichtung, steilerer Abfall mit 16° auf der Stoossseite, zu 9° auf der Leeseite. In der Umgebung, besonders in nördlicher Richtung, sieht man an 10 weitere Drums.

Die schöne Bodenseekarte 1:50000, mit Curven, lässt erkennen, wie die Drums im Norden von Lindau zwischen den Flüsschen Argen und Laiblach zu Dutzenden auftreten und radialstrahlig verlaufen. Wohl werden manche von ihnen einen Kern von Ausstehendem haben, ohne dass es deswegen bezüglich der Genesis nötig ist, einen Unterschied zu machen.

Südlich des Hoyrerberges bei Bad Schachen liegt nun aber ein Rücken anderer Art, vortheilhaft durch eine Kiesgrube aufgeschlossen. Er ist äusserlich auf 3 Seiten deutlich als Rücken ausgeprägt, länger als breit, vom Längsende her so aufgeschlossen, dass im Querschnitt sowohl wie an den stehen gebliebenen Rändern im Längsschnitt anticlinaler oder domförmiger Schichtenbau hervortritt.

Material der unter cirka 40° geneigten Schichten Kies (alpin) und Sand; darüber ist diskordant flachantiklinal Kies gelagert. Gerölle nicht über wallnussgross.

Erosion ist durch den Schichtenbau ausgeschlossen; ein postglaciales Delta wohl auch, es müsste ein von Süden her kommender Fluss angenommen werden, für den so nahe dem See kein Raum ist; gegen Drumlin spricht endlich die abweichende Richtung und das Material des Hügels.

---

[1]) Die Drumlinslandschaft etc. Jahresbericht der st. gallischen naturforschenden Gesellschaft 1894/95.

Das Wahrscheinlichere ist, dass hier ein «Kame» vorliegt und dass sich dieser Fall an die drei von mir[1]) früher aus der Gegend von Konstanz geschilderten anschliesst.

Die hier gegebene Beschreibung eines einzelnen Kame erscheint vielleicht unnöthig, da es deren ja in Nordamerika Tausende in den Kameslandschaften giebt. Allein, abgesehen davon, dass bei uns, soviel ich weiss, Kames noch nicht beobachtet waren, so ist nun dargethan, dass aus dem Fehlen von Kames und Drumlins kein absoluter Unterschied zwischen alter, alpiner und ausseralpiner Vergletscherung hergeleitet werden kann, es handelt sich nur um quantitative Differenzen.

Auch unsere Kames und Drums möchte ich, wie es Geikie, Lewis, Chamberlin in anderen Gebieten thaten, für subglacial gebildete Moränen halten. Wo der Gletscher am Ende gelappt war, konnten sie wohl auch zwischen den einzelnen Gletscherzungen entstehen. Jene möchte ich für Ablagerungen der subglacialen Gletscherströmungen, diese als das Produkt der Eispressung und Eiserosion ansprechen.

---

[1]) Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern 1898.

Walther Volz.

Die Verbreitung einiger Turbellarien in den Bächen der Umgebung von Aarberg.

(Mit einer Karte)

In unsern fliessenden Gewässern finden sich hauptsächlich 4 Arten von Strudelwürmern, welche alle zu den Tricladen gehören; es sind dies Dendrocoelum lacteum, Planaria gonocephala, Planaria alpina und Polycelis cornuta. Sie sind nicht ausschliesslich Bachbewohner, sondern kommen gelegentlich auch in stehenden Gewässern vor. Mit Vorliebe wird die Unterfläche von Steinen, Blättern und Holzwerk als Wohnsitz gewählt. Bei den Untersuchungen, die ich während der Herbstferien 1898 anstellte, berücksichtigte ich nur die 3 letztgenannten Arten, weil sie mit einer gewissen Gleichmässigkeit verbreitet sind, während Dendrocoelum lacteum sich nach keiner der übrigen Arten richtet und überhaupt mehr ein Bewohner des stehenden Wassers ist. Um zu weitern Beobachtungen über die Verbreitung der 3 Arten anzuregen, lasse ich im Folgenden eine kurze Beschreibung folgen:[1])

1. **Planaria gonocephala** Dugès. (Fig. 1).

Fig. 1.

Sie ist die grösste der europäischen Planariaarten. Ihre Länge beträgt bei geschlechtsreifen Exemplaren 15—25 mm. Wie alle Glieder der Gattung Planaria, besitzt sie 2 schwarze Augenpunkte, von denen jeder am Innenrande eines weissen Fleckes liegt. Der Kopf (wenn es überhaupt gestattet ist, diesen Ausdruck zu gebrauchen) hat pfeilförmige Gestalt, und die Fühler stehen hinter den Augen. Der Umriss des Körpers ist nach den Contraktionszuständen der Muskulatur sehr wechselnd. Die Seitenränder verlaufen im vorderen Teil gewöhnlich parallel. Der

[1]) Die Beschreibungen entnehme ich zum Teil der Arbeit von W. Voigt. Die Einwanderung der Planariaden in unsere Gebirgsbäche. — Verhandlg. d. naturhist. Vereins d. preuss. Rheinlande. Westfalens u. d. Reg. Bez. Osnabrück. 52. Jahrg. 1895.

Schwanz ist ziemlich scharf zugespitzt. Die Farbe des Körpers ist auf der Rückenseite dunkler als am Bauch, hier hellbraun, dort dunkelbraun bis grünlich-schwarz. Die Mundöffnung liegt ventral, in der Mitte zwischen dem vordern und hintern Ende, oder dem letztern mehr genähert. Der Pharynx kann ausgestülpt werden, die vielen, blindsackartig abgeschlossenen Verästelungen des Darmes können leicht wahrgenommen werden, wenn man das Tier in einem Glasgefäss gegen das Licht hält. Zwischen Mund und hinterem Körperende münden die Geschlechtsorgane und zwar die männlichen und weiblichen in einer gemeinschaftlichen Öffnung. Die Eier, 10 bis 50 an der Zahl, werden in einem Cocon von rotbrauner Farbe und kugeliger Gestalt abgelegt. Ein Cocon misst $1^1/_2$—$2^1/_2$ mm im Durchmesser und ist mit einem kurzen Stielchen versehen, mit welchem er an der Unterseite von Steinen etc. befestigt wird.

2. **Planaria alpina** Dana. (Fig. 2).

Die zwei kurzen Fühler stehen vor den Augen, der Kopf ist vorn nicht zugespitzt, sondern fast so breit, wie der übrige Körper.

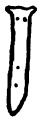


Fig. 2.

Ausgewachsene Tiere messen 12—15 mm in der Länge. Die gewöhnliche Farbe ist grau bis graubraun. Professor Zschokke fand in den Alpen je nach der Farbe des Untergrundes weisse, graue, braune und schwarze Varietäten. Die Cocons messen 1—$1^1/_2$ mm, sind ungestielt und werden nicht angeklebt, sondern frei auf den Boden der Gewässer abgesetzt. Was die Form des Körpers etc. anbelangt, so gilt das für Planaria gonocephala gesagte.

3. **Polycelis cornuta** O. Sch. (Fig. 3).

Die Gattung Polycelis besitzt eine grosse Anzahl von Augen, welche in etwas unregelmässiger Reihe den ganzen Vorderrand des

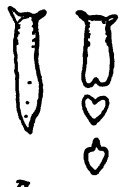


Fig. 3.

Körpers umsäumen. Polycelis cornuta hat deren ungefähr 80 bis 100. Ihre Zahl nimmt mit dem Alter des Tieres zu. Der Kopf sieht ähnlich demjenigen von Planaria alpina, hat aber etwas längere Fühler und der Vorderrand des Kopfes ist in der Mitte mehr nach vorn gewölbt. Sobald das Tier auf einen Widerstand stösst oder berührt wird, werden die Fühler rasch eingezogen. Ausgewachsene Tiere messen 15—18 mm in der Länge.

Die Färbung ist chocoladebraun bis lehmgelb. Bei der Verena-Eiseidelei bei Solothurn fand ich ein weisses Exemplar, dessen Fühler braun gefärbt waren.

Auf den ersten Blick sind manchmal Planaria alpina und Polycelis cornuta nicht zu unterscheiden; dann wird aber die Besichtigung mit einer starken Lupe bald zeigen, ob nur 2 oder ob mehrere Augenpunkte vorhanden sind.

Über die geschlechtliche Fortpflanzung von Polycelis cornuta wissen wir nicht sehr viel. Oskar Schmidt[1]) erwähnt ganz kurz, dass sich ihre Cocons von denen anderer Planariaden nicht unterscheiden. Eine weitere Angabe verdanken wir dem bekannten Erforscher der Süsswasserfauna, Zacharias.[2]) Er schreibt: „Bei einer Identifizierung der in Frage kommenden Arten stösst man auf grosse Schwierigkeiten. Ich traf eine „gehörnte" Planarie in einem kleinen Bache des Isargebirges an, die, dem äusseren Ansehen nach, vollkommen mit Polycelis cornuta O. Sch. übereinstimmte. Aber diese Dendrocoele besass keine Geschlechtsorgane, sie pflanzte sich in meinem Glasbassins ausschliesslich durch Querteilung fort. Ihre Identität mit der von Schmidt beschriebenen Form ist also sehr problematisch." Hierauf beschreibt Zacharias den Vorgang der Querteilung und fährt dann fort: „Die Teilungsprozesse hören aber ganz und gar auf, wenn man die Tiere spärlich füttert oder gar hungern lässt. Auch die Jahreszeit scheint dabei von Einfluss zu sein. Gegen Ende August dem betreffenden Bach entnommene Exemplare zeigten auch bei guter Fütterung die Querteilung nicht mehr. Dafür entdeckte ich aber zu meinem Erstaunen geschlechtlich differenzierte Exemplare unter denselben und es scheint somit, dass die Fortpflanzung durch Querteilung nur während der Sommermonate stattfindet. Dugès erwähnt nichts davon, dass er die gleiche Beobachtung gemacht habe, aber er sagt, dass ihm im Herbst ganz kleine Individuen von Planaria subtentaculata (welche wohl mit Polycelis cornuta identisch ist) zu Gesicht gekommen seien, und er macht bezüglich dieser die Bemerkung[3]): „C'est cependant surtout dans la dernière de ces

[1]) Zeitschr. f. wiss. Zoologie 1858.

[2]) Zacharias, O. Uber Fortpflanzung durch spontane Querteilung bei Süsswasserplanarien. — Zeitschr. f. wiss. Zoologie 1886.

[3]) Dugès, A. Recherches sur l'organisation et les mœurs des Planariés — Annales d. sciences naturelles, série, I. XV. 1828.

saisons (nämlich im Herbst) que j'ai trouvé en abondance des tronçons avec un commencement de reproduction des parties qui leur manquaient à la même époque, j'ai trouvé des individus bien proportionés et longs quelquefois seulement d' une ligne et demie. Les individus ne pouvaient avoir une pareille origine; des œufs, sans doute, leur avaient donné naissance." Mit anderen Worten heisst das: es müssen zur Herbstzeit Eier producierende, resp. geschlechtlich differenzierte Individuen vorhanden sein und diese habe ich unter Händen gehabt. Dugès' Vermutung hat sich also voll bestätigt." Soweit Zacharias.

Ich habe nun im Juli des Jahres 1898 in der Nähe von Neuenburg einige Exemplare von Polycelis cornuta gefunden, die gemeinschaftlich mit Planaria alpina die Unterseite von Steinen in einem kleinen Bache bevölkerten. Dieselben hatten ein wohlgenährtes, ich möchte fast sagen, fettes Aussehen. Herr Dr. Fuhrmann hatte mich darauf aufmerksam gemacht, dass die Anatomie der Geschlechtsorgane von Polycelis cornuta histologisch noch nicht bekannt sei, und so nahm ich denn diese Exemplare mit. Angefertigte Schnittserien zeigten mir sogleich, dass meine Vermutung, die Tiere möchten geschlechtsreif sein, wohl begründet war. Die zu beiden Seiten des Körpers gelegenen, follikulären Hoden waren in voller Thätigkeit, Spermatozoen zu erzeugen, die Vasa deferentia und die Vesiculae seminales strotzten von solchen. Auch der Penis war entwickelt. Zu meinem Erstaunen fand ich aber keine Spur von weiblichen Geschlechtsorganen, weder von Ovarien noch von Dotterstöcken. Die Tiere waren also „Männchen". Da ich Neuenburg bald verlassen musste, hatte ich nicht mehr Gelegenheit, noch ältere Entwicklungsstadien zu untersuchen, bei denen sich auch die weiblichen Drüsen angelegt haben würden. Die Proterandrie ist also bei Polycelis cornuta sehr stark ausgeprägt, wie bei einigen Cestoden.

Die gewöhnliche Fortpflanzungsweise von Polycelis cornuta geschieht auf ungeschlechtlichem Wege durch Querteilung. Der Vorgang wird von Zacharias in der schon erwähnten Arbeit genau beschrieben. Es entsteht zuerst hinter der Mundöffnung mitten durch den Körper hindurch ein Loch, nun erst lösen sich nach und nach auch die Seitenränder ab. Im Gegensatz hiezu beschreibt Voigt[1])

[1]) W. Voigt loc. cit.

„dass hinter der Mundöffnung eine ringförmig den Körper umfassende Einschnürung auftritt, die immer tiefer einschneidet, bis das Hinterende dadurch völlig abgetrennt wird. Die frische Wundstelle am Körperende des durch Selbstamputation verkürzten Tieres wird etwas nach innen eingezogen, sie vernarbt schnell und das verloren gegangene Stück ersetzt sich bald wieder durch Neubildung.“ — Die von mir beobachtete Querteilung ging so vor sich, wie es Zacharias beschrieben hat. Wurde eine Nadel durch das mitten durch den Körper gehende Loch gesteckt, so kam es sehr oft vor, dass durch die Bewegung des auf diese Weise festgehaltenen Tieres die hintere Partie abgerissen wurde. Beide Teilstücke haben an der Teilungsstelle einen kleinen Ausschnitt, so dass sie hier herzförmig aussehen. Das hintere Stück bleibt erst eine zeitlang ruhig liegen; nach und nach füllt sich der herzförmige Ausschnitt aus und wächst als eine kleine Spitze nach vorn. Bald beginnen sich auch die Augenpunkte zu bilden, dann entsteht am hinteren Teile der Mund und das Tier ist wieder vollständig. Auf dieselbe Weise bildet sich auch der abgeschnürte Schwanz des Vorderteiles wieder aus. Die regenerierten Teile sind anfänglich weiss gefärbt, nehmen aber nach und nach die Farbe des übrigen Körpers an. Ob die subcutan gelegenen Pigmentzellen neu gebildet werden, oder ob sie aus dem mit solchen versehenen Teilstücke geliefert werden, kann ich nicht sagen. Sollte es sich zeigen, dass nur Ende Sommer geschlechtliche Fortpflanzung eintritt und dass sich nachher die Tiere nicht mehr fortpflanzen, so hätten wir eine Art Generationswechsel vor uns. Nach den Beobachtungen von Voigt ruht die ungeschlechtliche Fortpflanzung während der Wintermonate und alle Individuen sind zu dieser Zeit mit wiederhergestellter Hinterleibspitze versehen.

Fortpflanzung durch Teilung kommt auch bei andern Turbellarien vor. Von den in dieser Arbeit erwähnten Arten verdanken wir noch eine Angabe über Planaria alpina Zschokke[1]), welcher gelegentlich seiner Untersuchungen unserer Alpenseen diese Art sehr weit verbreitet fand. Im Lünersee fand er „junge und jüngste Tiere in Menge. Eine lebhafte, ungeschlechtliche Vermehrung schien stattzufinden.“ Borelli bestätigte später diese Beobachtung.

---

[1]) Zschokke, F. Die zweite zoologische Excursion an die Seen des Rhätikon, — Verhandl. d. naturf. Gesellschaft in Basel. IX. Bd. 1893.

Dass sich die Planarien auch künstlich vermehren lassen, dadurch, dass man sie in zwei Teile verschneidet, ist eine so bekannte Thatsache, dass ich darauf nicht näher eingehe.

Angeregt durch die interessanten Arbeiten von Voigt[1]) und mit der Absicht, dem Wunsche dieses Forschers nachzukommen, auch andere Gegenden auf die Verbreitung dieser Turbellarien zu untersuchen, unternahm ich im Laufe des Juli und August 1898 einige Excursionen in der Umgegend von Aarberg. Bevor ich auf die dabei erhaltenen Resultate eingehe, will ich erst in aller Kürze die wichtigsten Ergebnisse und Schlüsse nennen, welche Voigt aus seinen Beobachtungen gezogen hat:

Planaria alpina ist als Relikt von der Eiszeit her zu betrachten. Sie bewohnte während derselben die damals existierenden, kalten Gewässer. Als dann später nach und nach ein wärmeres Klima eintrat, zog sie sich ebenfalls mit den weichenden Eismassen zurück und bewohnt heute noch vornehmlich die Gewässer der Alpen — und Bergregion. In der Ebene findet sie sich nur in solchen Bächen und Quellen, deren Temperatur nie höher als auf ungefähr 12° C. steigt. Später wanderten dann von den Flüssen her andere dendrocoele Strudelwürmer in die Bäche ein und besetzten die von Planaria alpina geräumten Plätze.

Dies geschah zuerst durch Polycelis cornuta. Viel später, jedenfalls in historischer Zeit und wahrscheinlich noch jetzt, drang dann auch Pl. gonocephala in die Unterläufe der Bäche ein. Dass dies erst vor verhältnismässig kurzer Zeit geschah, geht aus dem Umstande hervor, dass Voigt diesen Wurm eine lange Strecke eines Baches bewohnen sah, plötzlich aber verschwand er und zwar an einer Stelle, wo ein weiteres aktives Vordringen durch ein hohes Mühlenwehr verhindert war. Ob dem Wehr fand sich keine Pl. gonocephala mehr, obschon hier die Bedingungen zum Gedeihen ebenso

---

[1]) Voigt, W. Planaria gonocephala als Eindringling in das Verbreitungsgebiet von Planaria alpina und Polycelis cornuta. — Zoolog. Jahrbücher, Abt. f. System., Geogr., u. Biologie der Tiere. Bd. VIII. 1895.

Voigt, W. Über Tiere, die sich vermutlich aus der Eiszeit her in unsern Bächen erhalten haben. — Verhandl. d. naturhist. Ver. d. preuss. Rheinlande Westfalens u. d. Reg.-Bez. Osnabrück. 52. Jahrg. 1895.

Voigt, W. Die Einwanderung der Planariaden in unsere Gebirgsbäche. — ibidem 53. Jahrg. 1896.

günstig erschienen, wie unterhalb des Wehres. In Bächen, in denen alle 3 Arten vorkommen, können wir gewöhnlich 5 Zonen unterscheiden: zu unterst, der Mündung des Baches zunächst gelegen, findet sich die Pl. gonocephala-Zone; weiter hinauf folgt dann ein kürzerer oder längerer Abschnitt, wo Pl. gonocephala und Pol. cornuta gemischt vorkommen; hierauf folgt das 3. Stück, hier lebt nur Pol. cornuta. In der 4. Zone ist diese mit Pl. alpina vermischt und zu oberst endlich findet sich Pl. alpina allein. Dieses Schema trifft man nur ganz selten so, wie ich es jetzt gezeichnet habe, es kommen vielmehr alle möglichen Variationen vor. Die Karten von Voigt zeigen uns, dass in einigen Bachläufen Pol. cornuta vollkommen fehlt, in andern ist Pl. alpina gänzlich ausgerottet.

Wo sich 2 Arten treffen, findet unter diesen ein Kampf statt; dies ist aber nicht im eigentlichen Sinne des Wortes zu verstehen; denn die einzelnen Tiere befeinden sich gegenseitig nicht, wie dies Voigt an seinen in der Gefangenschaft gehaltenen deutlich beobachtete. Selbst bei gänzlichem, längere Zeit andauerndem Nahrungsmangel lassen sie sich gegenseitig vollständig in Ruhe. Nur Pl. alpina scheint einen gewissen Widerwillen gegen Pl. gonocephala zu haben, indem sie bei etwaiger Berührung mit dieser zusammenzuckt. Wenn sie aber sehr hungrig und mit Fressen beschäftigt ist, lässt sie sich durch Berühren und selbst durch Überkriechen von Pl. gonocephala nicht stören.

Der Kampf ums Dasein ist also kein direkter, das Faustrecht spielt hier keine Rolle. Es kommen ganz andere Faktoren in Betracht:

1. Die Temperatur des Wassers wirkt mit, das Verbreitungsgebiet der 3 Arten zu vergrössern oder zu beschränken. Namentlich die hohe Temperatur ist hier massgebend. In Gewässern, die von der Sonne längere Zeit beschienen sind, vermag sich am besten Pl. gonocephala zu erhalten. Bei unsern Bergbächen, die hier hauptsächlich in Betracht kommen, sind die oberen Stellen meist von Wald umsäumt, auch liegen die Quellen meist in Waldungen. Hier ist deshalb das Wasser bedeutend kühler. Pl. alpina, die das kälteste Wasser liebt, wird sich deshalb besonders in den Oberläufen der Bäche finden, auch Pol. cornuta zieht kaltes Wasser vor.

2. Reinheit des Wassers. Am empfindlichsten gegen fauliges Wasser ist Pl. gonocephala, sie geht darin bald zu Grunde. An Stellen, die durch modernde Pflanzenteile verunreinigt sind, findet

sie sich nicht. Solche Plätze liegen gewöhnlich da, wo Wald die Bachufer umsäumt. Pl. alpina und Pol. cornuta scheuen sich dagegen nicht, direkt unter einer dichten Lage von moderndem Laub zu leben. Die obere Verbreitungsgrenze von Pl. gonocephala liegt deshalb meist da, wo der Wald beginnt. Stark fauliges Wasser würde aber auch für die beiden kleinen Arten tötlich wirken, wie dies an Gefangenen, deren Wasser längere Zeit nicht gewechselt ist, bemerkt werden kann. Die Tiere sitzen dann zusammengezogen stundenlang ruhig, bis der Tod eintritt, worauf sie sehr rasch zu einer schleimigen Masse zerfallen.

Wird an einer Stelle der Wald abgeholzt, so werden wenig oder keine modernden Blätter mehr in den hier fliessenden Bächen sein. Dies wäre noch kein Grund, Pl. alpina oder Pol. cornuta, die allfällig hier ihre Wohnsitze aufgeschlagen hätten, zu vertreiben, es werden aber die Aufenthaltsbedingungen günstiger für Pl. gonocephala, welche nun, wenn sie weiter unten überhaupt schon vorkommt, in den für sie günstigen Bachteil vordringt. Ist reichliche Nahrung vorhanden, so wird sie lange Zeit gemeinschaftlich mit den vorher vorhandenen Arten hier leben, macht sich aber Nahrungsmangel geltend, so tritt ein neuer Faktor auf, nämlich:

3. Die Stärke des Tieres. Pl. gonocephala vermag durch ihre Grösse auch ältere, ausgewachsene Beutetiere zu überwältigen, die den kleineren Arten entgehen würden. Dazu kommt noch bei dieser Art die Fähigkeit, einen zähen Schleim absondern zu können, mit welchem Gammarus, der hauptsächlich die Nahrung der Planariaden bildet, und andere Bachbewohner festgehalten werden können. Tritt ein sehr grosser Mangel an Futter ein, so vermag Pl. gonocephala in Folge ihrer bedeutenden Grösse auch länger zu fasten, als die beiden andern Species. Die Jungen der beiden letztern sind bei ihrer Geburt kleiner, als die von Pl. gonocephala, sie vermögen deshalb lebende Beute weniger leicht zu überwältigen, als diese. In den Oberläufen der Bäche ist die Nahrung meist spärlicher. Dies kommt bei der Fortpflanzung sehr in Betracht. Voigt erhielt z. B. aus einem Cocon einer unter gewöhnlichen Verhältnissen lebenden Pl. alpina 15—30 Junge; dem Cocon eines der Exemplare, welche er 3 Monate hatte fasten lassen, entschlüpften deren 7, dem eines der reichlich gefütterten aber 55. Daraus erhellt, dass Pl. gonocephala, welche die Unterläufe der Bäche bewohnt, also unter

günstigeren Nahrungsverhältnissen lebt, als die weiter oben vorkommenden kleineren Arten, ein grösseres Contingent von Nachkommen zu erzeugen vermag, als die beiden andern. Die jungen Planarien helfen natürlich gleich mit, die oft sonst schon spärliche Nahrung verzehren, und schädigen auf diese Weise die schwächeren Species resp. deren Nachkommenschaft. Einen weiteren Vorteil namentlich gegenüber der alpinen Art besitzt Pl. gonocephala ferner in der Art und Weise der Ablage ihrer Cocons. Wie bereits früher erwähnt, werden dieselben vermittelst kleiner Stiele an Gegenständen, die im Wasser liegen, befestigt. Die junge Brut befindet sich deshalb beim Ausschlüpfen gleich in den günstigen Wohnsitzen. Pl. alpina dagegen legt ihre Cocons nur gleich ab, ohne dieselben zu befestigen. So werden die Eier vom Wasser mitgerissen und jedenfalls oft verschleppt oder im Sand begraben oder ans Ufer geworfen, namentlich wenn die Bäche angeschwollen sind, und dies ist oft der Fall während der Fortpflanzungszeit unserer Art. Wenn Junge aus solchen weit aus den gewöhnlichen Wohnsitzen fortgeschwemmten Cocons ausschlüpfen, so sind sie im feindlichen Lager. Falls die Nahrung hier nicht spärlich und auch die übrigen Verhältnisse günstig sind, werden sie sich längere Zeit hier aufhalten können, bis sie bei eintretendem Nahrungsmangel oder veränderten äussern Verhältnissen auch zu Grunde gehen. Auf solche herabgeschwemmte Cocons wird man die manchmal mitten im Verbreitungsgebiet einer andern Art vereinzelt vorkommenden Pl. alpina-Exemplare zurückzuführen haben.[1]) Auch die Fortpflanzung durch Teilung, die ja bei Pol. cornuta eine so grosse Rolle spielt, ist

[1]) Übrigens fand Fuhrmann (Die Turbellarien der Umgebung von Basel. — Revue Suisse de Zoologie. T II [1894]), dass Pl. alpina in den Bächen von Bärschwyl jährlich Wanderungen unternimmt. Im Sommer ist sie mehr den Quellen genähert, im Winter findet sie sich weiter nach unten. Auch in England wurde eine ähnliche Beobachtung von Wanderung bei derselben Art gemacht. Voigt bezweifelt aber, dass es ein regelmässiges Wandern ist, und ich möchte mich seiner Ansicht anschliessen, da es nicht wohl denkbar ist, dass so kleine Tiere, die dazu noch schlechte Schwimmer sind, jährlich je ein Mal gegen die starke Strömung schwimmend oder kriechend grosse Strecken zurücklegen. Dass aber Pl. alpina Wanderungen unternimmt, habe ich selbst schon beobachtet, z. B. in einer Quelle in der Nähe von Aarberg, ferner fand ich sie sowohl im kleinen Melchthal als auch auf der Arnialp (Ct. Unterwalden) an senkrechten Abstürzen, über die aber zu jener Zeit nur ein schwaches Wasseräderchen herabrieselte, hinaufkriechen; doch waren es jedenfalls nur geringe Strecken, die zurückgelegt wurden.

vorteilhafter, als die Vermehrung durch Eier. Abgeschnürte Teilstücke besitzen doch schon eine im Verhältnis zu den aus Eiern ausschlüpfenden Jungen bedeutende Grösse. Für sie ist der Kampf ums Dasein weniger herb, als für die ganz jungen.

Auch von Feinden haben unsere Tiere zu leiden. Nach Voigt ist es unter den Wirbeltieren namentlich die Bachforelle, die ihnen eifrig nachstellt. In Bächen, die diesen Fisch häufig beherbergen, werden die Planarien nicht sehr zahlreich sein. Ich vermute, dass auch die Wasseramsel, die sich noch ziemlich häufig an einsamen Bächen findet, den Turbellarien Schaden zufügt. Wie Voigt beobachtet, nähren sich auch die Larven gewisser Wasserinsekten, namentlich solcher, die unter Steinen aus Sand und Steinchen Wohnröhren bauen, von Strudelwürmern.

Ob das bis jetzt Angeführte genügt, die merkwürdige Verbreitung der 3 Tricladen zu erklären, lasse ich dahingestellt. Ich glaube aber, dass bei fortgesetzter Beobachtung, namentlich auch anderer Stellen, noch manches ans Licht gebracht wird, das bei den bis jetzt nur spärlichen Nachforschungen über die geographische Verbreitung dieser Platoden noch nicht bemerkt worden ist. Es können noch ganz andere Ursachen vorhanden sein, welche die oft frappante Begrenzung der einen oder andern Species bewirken, und man ist bei tiergeographischen Fragen oft nur zu leicht geneigt, das, was man eben gesehen oder zu sehen gemeint hat, als eigentlichen Grund zu betrachten. Darum ist es von grossem Vorteil, wenn möglichst viele am Gleichen arbeiten, so dass einer den andern ergänzen kann.

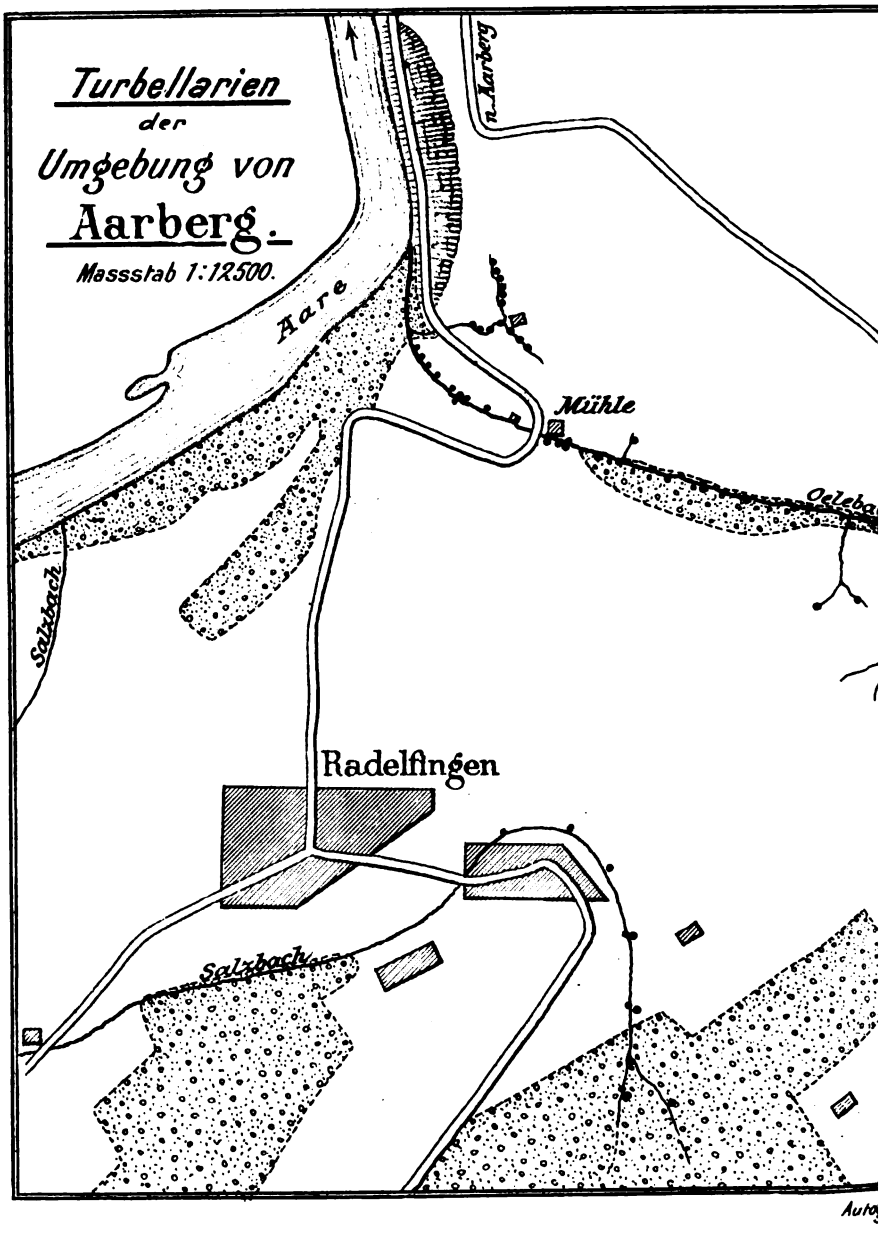
Untersuchungen über die Verbreitung der 3 Tricladenarten sind sehr leicht auszuführen. Auf meinen Excursionen bestand die ganze Ausrüstung aus einigen Fläschchen von ca. 4 cm Länge und 1 cm Durchmesser, einem grösseren, gut verschliessbaren Glas, einer Glaspipette und einer Spatel (auch das Taschenmesser kann als solche verwendet werden). Da ich auch die übrigen Bachbewohner, von denen ich etwa 40 Arten sammelte, berücksichtigte, nahm ich auch eine Pincette und Formaldehyd à 40% mit, das ich gleich beim Gebrauch soviel als nötig verdünnte. Ferner ist nötig eine Karte, in die man die Fundstellen gleich mit Farbenbleistift einträgt, sowie ein Notizbuch. Die günstigste Zeit für solche Untersuchungen sind wohl die Monate Juli und August, weil zu dieser Zeit die Tiere meist ausgewachsen sind.

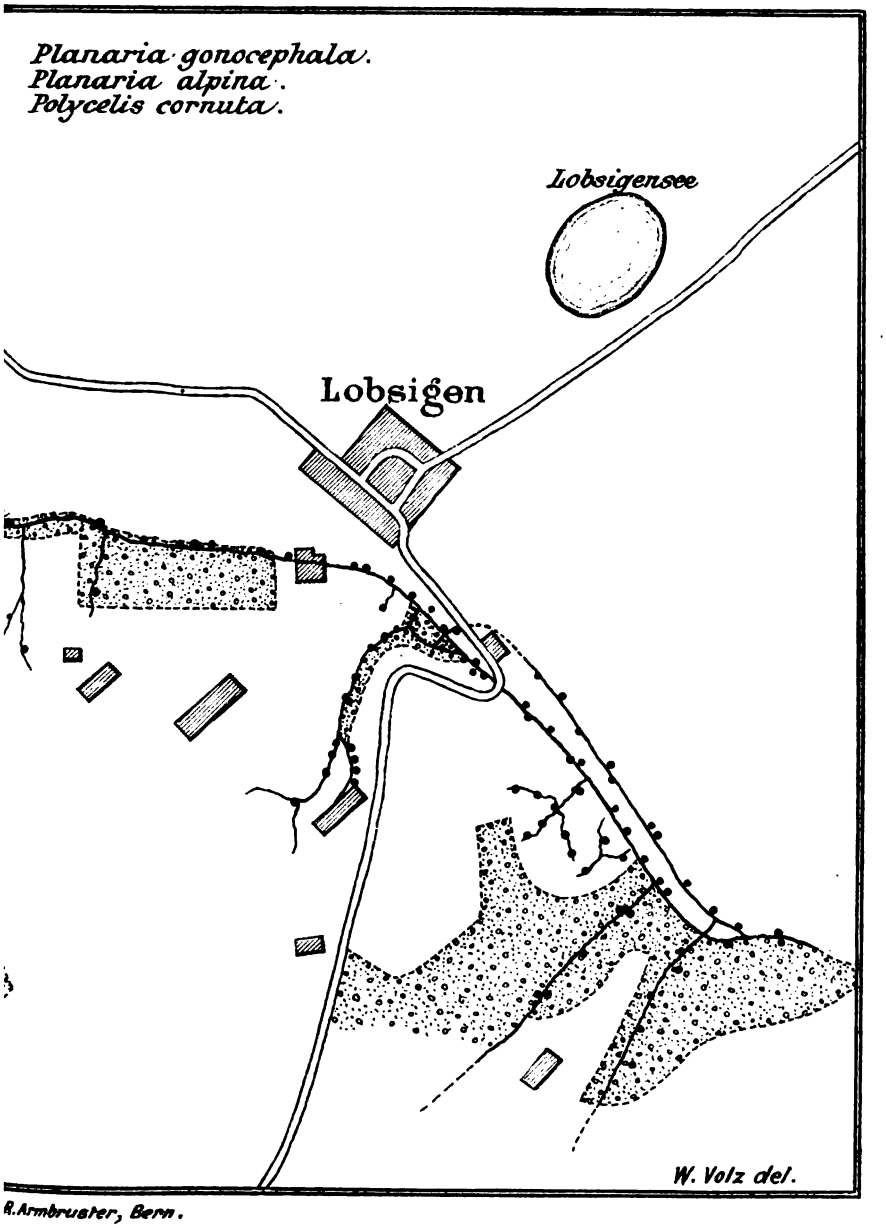
Die Untersuchung eines Baches begann ich gleich bei seiner

Mündung in die Aare. Steine, Astwerk und Blätter wurden aufgehoben; die darunter sich aufhaltenden Turbellarien konnten meist auf den ersten Blick erkannt werden, namentlich, wenn es sich um völlig ausgewachsene Tiere handelte. Wo die makroskopische Betrachtung keinen sichern Aufschluss gewährte, entschied die Lupe. Nur in einigen wenigen Fällen war es nötig, zur völlig sicheren Bestimmung Tiere lebend mitzunehmen. Dies geschah da, wo sich abgeschnürte Hinterleibsenden oder nicht ausgewachsene Individuen vorfanden. Hier war die Anzahl der Augen oft nicht zu erkennen. Es findet sich ziemlich häufig, dass unter ein und demselben Stein Vertreter zweier Arten leben. Dieser Fall tritt namentlich häufig ein in den Uebergangszonen von der einen zur andern Art, aber auch da, wo versprengte Tiere sich mitten im Verbreitungsgebiet einer andern Species finden. Die zweifelhaften wurden mittelst der Spatel sorgfältig abgehoben und mit etwas Wasser in eines der kleinen Fläschchen gesteckt, mit einer Nummer, die auch auf der Karte an der betreffenden Fundstelle verzeichnet wurde, versehen und in die grosse Flasche gebracht. Dies hat den Vorteil, dass man nicht immer die kleinen Fläschchen öffnen muss, um das Wasser zu erneuern, das meist bald warm wird; man wechselt von Zeit zu Zeit einfach das Wasser der grossen Flasche. Auch an den heissesten Tagen brachte ich auf diese Weise die Tiere stets lebend nach Hause. Hier genügt es, die zu bestimmenden Exemplare auf einen Objektträger und unter das Mikroskop zu bringen, um sofort sagen zu können, mit welcher Art man es zu thun hat. Sind mehrere oder gar keine Augenpunkte vorhanden, so ist es sicher Pol. cornuta; sind dagegen 2 Augen vorhanden, so wird die Form des Kopfes leicht entscheiden, ob man es mit Pl. alpina oder mit Pl. gonocephala zu thun hat.

Ich untersuchte in der Nähe von Aarberg hauptsächlich 3 Bäche, sowie deren Zuflüsse, die sämtlich auf dem rechten Ufer der Aare münden. 2 davon haben ihre Quellen in den waldigen Höhen des Frienisbergzuges, der das Aarethal nördlich von Bern vom Aarethal des bernischen Seelandes trennt.

Ob dem Städtchen Aarberg findet sich ein ziemlich steiler, mergeliger Absturz, die sog. Rappenfluh. (Vergl. d. Karte.) Dieselbe bildet in der Mitte ihrer Höhe einen wohl künstlich geschaffenen Absatz, auf welchem die Landstrasse angelegt ist. Der über der Strasse gelegene Teil der Fluh ist an einer Stelle durch eine Stützmauer gegen das


Turbellarien
der
Umgebung von
Aarberg.
Massstab 1:12500.
Aare
n. Aarberg
Mühle
Salzbach
Radelfingen
Salzbach



R. Armbruster, Bern.

Herabstürzen geschützt. In dieser Mauer ist eine eiserne Röhre eingelassen, die den Zweck hat, das Sickerwasser, das aus einem Wald, der über der Fluh steht, hinter die Mauer fliesst, abzuleiten. Dieses Wasser hat im Sommer eine sehr niedrige Temperatur, im Winter aber gefriert es sehr lange nicht; es fliesst in eine, neben der Strasse angelegte Rinne und bildet hier eine kleine Pfütze von ca. 1 m² Oberfläche; von hier läuft es dann rechts und links ab, um nach und nach im Boden zu verschwinden. Als ich diese Pfütze besuchte, bemerkte ich eine Unmasse schwärzlicher Tiere sich darin bewegen. Ich hielt sie zuerst für Larven von Dixa, die weiche, schleimige Consistenz belehrte mich aber, dass es nicht mit Chitin gepanzerte Tiere sein konnten, es stellte sich denn auch heraus, dass es Pl. alpina war, die hier in ganz ungeheurer Menge vorkommt. Die Tiere mochten wohl nach Tausenden zählen. Sie sassen an zufällig von der Landstrasse hereingeratenen Steinen oder schwammen frei herum. Sie waren von verhältnismässig geringer Grösse, was wohl auf Nahrungsmangel zurückzuführen war. Ein Regenwurm, den ich ihnen gab, wurde sogleich angefallen und in kurzer Zeit von einer solchen Menge von Würmern bedeckt, dass man nichts mehr von ihm sehen konnte, als die heftigen Bewegungen, mit denen er die Quäler abzuschütteln suchte, die ihn bei lebendigem Leibe auffrassen. Auch einige getötete Kaulquappen wurden gleich verzehrt. Ich besuchte diese Stelle auch während des Winters und fand die Tiere sehr wohlbehalten in ihrer engen Wohnstätte, allerdings schien es mir, als ob sie weniger zahlreich seien, als im Herbst.

Diesen Punkt erwähnte ich so ausführlich, weil er mir ein gutes Beispiel dafür zu sein scheint, dass Planaria alpina oder ihre Eier auch passiv wandern, d. h. durch Frösche oder Vögel von einer Stelle zur andern getragen werden können. Ich könnte mir sonst nicht vorstellen, wie die Würmer in diese Quelle gelangt sind. Wie bereits erwähnt, fliesst das Wasser aus dem Boden hervor, der hinter der Stützmauer gelegen ist, von oben können sie also nicht herkommen; dann versickert es im Boden, um in der unteren Hälfte der Rappenfluh da und dort wieder zum Vorschein zu kommen und sich in die Aare zu ergiessen. Von hier können die Turbellarien auch nicht stammen; denn der Fluss ist an dieser Stelle, auch bei niedrigstem Wasserstand, ziemlich tief und sehr reissend. In den stellenweise von der obern Hälfte der Fluh herabfliessenden Wasser-

äderchen finden sich keine Planarien; sie könnten sich hier auch gar nicht aufhalten, da jede Nahrung fehlt und in den Regenlachen längs des Strassenbordes wimmelt es wohl zeitweise von Fröschen und Unken, Turbellarien fehlen aber, sie würden in dem Schmutz und Schlamm gar nicht leben können. Auch der Transport oder die Wanderung bei gelegentlichem Hochwasser ist gänzlich ausgeschlossen. Endlich ist auch nicht anzunehmen, dass durch Menschen die Tiere hier eingesetzt sind. Es kann also nur der Transport durch gelegentlich wandernde Tiere in Betracht kommen und da haben wir dann in erster Linie die in der Nähe vorkommenden Frösche ins Auge zu fassen. Die nächste Fundstelle von Planaria alpina liegt ca. 200 m von der eben erwähnten Fundstelle entfernt. Es ist nun wohl denkbar, dass ein Frosch, nicht eine ganze Planarie, wohl aber einen Cocon die ganze Strecke getragen hat. Auf welche Weise dies geschah, ist schwer zu sagen, doch halte ich es nicht für ausgeschlossen, dass ein solcher zufällig mit der Nahrung in den Darm gelangen kann und es ist zu bezweifeln, dass die dicke Schale den verdauenden Säften des Digestionsapparates nicht Widerstand zu leisten im Stande ist. Letzterer Versuch könnte übrigens im Laboratorium leicht ausgeführt werden. Auch die sich gelegentlich bei diesem Tümpel herumtreibenden Bachstelzen, die von hier nach den andern Gewässern fliegen, könnten möglicherweise, sei es ein ganzes Tier, sei es einen Cocon, mitgetragen und hier abgesetzt haben.

Voigt machte Versuche, wie lange sich Planaria alpina und Planaria gonocephala ohne Wasser zu halten vermögen, und kam dabei zum Resultat, dass Planaria alpina nach 10 Minuten langem Liegen an der Luft mit dem Leben davonkommt, nach 15 Minuten geht etwa die Hälfte ein, nach 30 Minuten geben die Versuchstiere, ins Wasser zurückgebracht, zwar noch Lebenszeichen von sich, sterben aber nach kurzer Zeit ab. Planaria gonocephala zeigt sich etwas widerstandfähiger gegen Austrocknen, es kamen von ihr selbst noch Tiere mit dem Leben davon, die 30 Minuten an der Luft gelegen hatten.

Genau dieselben Versuche, wie sie Voigt ausgeführt, machte ich mit Polycelis cornuta. Die Tiere von ca. 1 cm Länge wurden mittelst einer Spatel auf trockenes Fliesspapier gelegt und sorgfältig mit einem andern Streifen Fliesspapier von dem noch an ihnen haftenden Wasser befreit. Hierauf wurden sie mit einer Glasschale

überdeckt. Anfänglich tasteten die Versuchstiere mit dem Kopf in der Luft herum, verhielten sich aber bald ruhig. Nach 10 Minuten langem Liegen auf dem Trocknen, wurden sie wieder ins Wasser zurückgebracht. Einige hatten den Pharynx ausgestülpt, den sie nun abschnürten, worauf er sich noch sehr lange selbstständig bewegte. Diese Tiere hatten alle auf dem Rücken gelegen; sie bewegten sich noch einige Zeit im Wasser, bedeckten sich aber nach und nach mit Schleim und starben dann bald ab. Diejenigen der Versuchstiere, welche mit dem Bauch nach unten gelegen hatten, fingen an, sobald sie wieder mit dem Wasser in Berührung kamen, sich zu bewegen, erst langsam und schwerfällig, dann lebhafter, blieben wieder lange Zeit mit eingezogenem Kopf liegen. Nachdem sie 4 Stunden zugebracht hatten, ohne ein Lebenszeichen von sich zu geben, wechselte ich das Wasser und bald begann die eine und die andere wieder umher zu kriechen. Am nächsten Morgen, konnte ich diejenigen, welche den Austrocknungsversuch mitgemacht hatten, von den übrigen nicht mehr unterscheiden.

15 Minuten langes Liegen an der Luft überstand keine der Polycelis cornuta. Sie gaben wohl, ins Wasser zurückgebracht, anfänglich noch dann und wann ein Lebenszeichen von sich, starben aber bald darauf. Einige lebten nach diesem Versuche noch fünf Stunden.

Nach meinen Erfahrungen würde also Polycelis cornuta die Austrocknung weniger lange aushalten können, als Planaria gonocephala, selbst weniger lange als Planaria alpina; doch müsste, um ein sicheres Resultat zu erhalten, zu gleicher Zeit und unter den gleichen Bedingungen (Temperatur der Luft) das Experiment mit allen 3 Arten gemacht werden. Aus den Versuchen von Voigt und den meinen geht aber trotzdem hervor, dass selbst erwachsene Planariaden eine Zeit lang ohne Wasser zu leben vermögen, und deshalb der Transport durch Wirbeltiere nicht ausgeschlossen erscheint.

Betrachten wir nun die Verbreitungsverhältnisse in dem etwa 200 m entfernten Mühlethalbach oder Oelebach. Gleich bei seiner Mündung fliesst derselbe noch durch ein kurzes Stück des längs der Aare stehenden Waldes. Bei meinem ersten Besuche war er stark angeschwollen und es war mir deshalb nicht möglich, ihn hier zu untersuchen. Wie es sich aber später herausstellte, fehlen dem untersten,

etwa 30 m langen Stück des Baches sämtliche Planariaden, wohl hauptsächlich deshalb, weil hier ziemlich viele Fische von der Aare her eindringen. Ich hatte vermutet, hier Planaria gonocephala, die ich zwar nur aus Abbildungen kannte, zu treffen, sah mich aber getäuscht. Um so grösser war dann die Freude, als ich gleich oberhalb des Waldes, bei einer kleinen Brücke, die gesuchte Planarie fand. Auch traf ich hier eine ganz kleine Polycelis cornuta, die wohl bei dem hohen Wasserstande heruntergeschwemmt worden war. Bei einer Besichtigung der gleichen Stelle im Winter, liess sich die letztere Species nicht mehr nachweisen, dagegen war Planaria gonocephala in gleicher Anzahl vorhanden, wie im Herbst.

Nicht weit von der Mündung des Oelebaches in die Aare ergiesst sich in diesen ein von rechts kommendes, kleines Rinnsal, das ziemlich steil über einen Abhang hinunterstürzt und sehr kalkreich ist. Trotz eifrigster Nachforschungen konnte ich in seinem untern Teil nichts finden, erst auf der andern Seite der Strasse, ziemlich weit oben fand sich unter den zwar recht seltenen Steinen stets Pl. alpina. Weiter oben bei einem Hause bildet diese kaum 20 cm breite Wasserader einen kleinen, ganz klaren Teich, der ebenfalls Pl. alpina enthielt; doch dürfte dieselbe hier bald ausgerottet sein, da kurze Zeit vor meinem Besuche daselbst einige Fische eingesetzt worden waren. Pl. alpina lässt sich im ganzen Bächlein verfolgen bis zur Quelle und namentlich hier fand ich sehr grosse Exemplare. Ferner dringt sie in die Nebenarme und Abzweigungen dieses Bächleins ein, die zum Zwecke der Wiesenbewässerung künstlich angelegt worden sind.

Kehren wir nun zum Oelebach zurück, so finden wir bis zur Mühle vor Mühlethal stets Pl. gonocephala; an einer Stelle stiess ich auch auf die beiden andern Arten, die jedoch nur in wenigen, jedenfalls versprengten, Exemplaren vorhanden waren. Vielleicht sind es auch die letzten Ueberreste früherer grösserer Kolonien. Die übrige Bachfauna ist hier ziemlich reich, Pl. gonocephala dagegen im ganzen sehr spärlich vertreten. Ich habe den Eindruck erhalten, als ob sie erst im Begriff wäre, hier festen Fuss zu fassen; möglicherweise hindert aber die hier sehr oft vorgenommene Bachkorrektion eine reichlichere Vermehrung.

Gleich oberhalb der Mühle fand ich die letzten Exemplare dieses stattlichen Strudelwurmes. Der Bach beginnt hier viel Kalk abzulagern, auch werden die Gebüsche, welche die Ufer bis hier nur stellenweise

einfassten, häufiger und dichter und mischen sich schliesslich mit höhern Bäumen zu einem kleinen Wald. Hauptsächlich dieser Grund wird es sein, dass Pl. gonocephala nicht weiter nach oben vorgedrungen ist.

Bei der Mühle wird nun Pol. cornuta häufiger und findet sich im ganzen Bachbett zahlreicher, als Pl. alpina. Weitere Détails unterlasse ich und verweise auf die beiliegende Karte, auf welcher ich mit vieler Sorgfalt die Fundpunkte eintrug. Erwähnen will ich nur, dass die Unterläufe der zahlreichen Nebenbäche und -Bächlein der Hauptsache nach von Pol. cornuta, weiter oben, namentlich in den Quellen ausschliesslich von Pl. alpina bewohnt sind. Die Art der Verbreitung der 3 Turbellarien im Oelebach ist also eine ähnliche, wie sie Voigt für einige Gegenden in Deutschland nachwies.

Werfen wir zum Schluss noch einen Blick auf 2 andere Bäche. Der eine, Salzbach genannt, mündet oberhalb des Oelebaches in die Aare. Trotz eifrigster Nachforschung fand ich von seiner Mündung bis 2 km aufwärts nicht eine einzige Dendrocœle. Diese Thatsache war mir anfänglich vollkommen unerklärlich; denn die am Ufer recht dicht stehenden Bäume konnten unmöglich die alleinige Ursache des gänzlichen Mangels sein. Wie ich erst später zufällig vernahm, ist aber hier der Bach von sehr vielen Forellen bewohnt; ich wog solche von 160 gr Gewicht. Ob dem Dorfe Radelfingen beginnen plötzlich die Planariaden wieder aufzutreten und zwar erst Pol. cornuta, bald aber auch Pl. alpina, die auch hier allein die Quellen bewohnt. Pl. gonocephala fehlt hier.

Ein weiterer Bach, den ich untersuchte, ist derjenige, der in der Nähe von Lyss in die Aare mündet (auf der Karte nicht mehr eingetragen). In seinem Unterlauf findet sich Dendrocoelum lacteum. Der Lyssbach ist ziemlich fischreich, aber auch die zahlreichen Fabriken, die an seinen Ufern stehen, scheinen ein Grund zu sein, dass hier die übrigen Tricladen fehlen. Oberhalb Lyss, in der Nähe der Bierbrauerei fand ich noch ein Stück von Pol. cornuta; im Frühling des folgenden Jahres (1899) fand sich an derselben Stelle immer noch diese Art, ich fand ebenfalls ein einziges Exemplar. Weiter oben fehlen die Planarien gänzlich. Ich untersuchte den Lyssbach von seiner Mündung an 7 km weit und sehr genau, ohne ein einziges Individuum, ausgenommen dasjenige bei der Brauerei und Dendrocœlum lacteum, finden zu können. Dem ersten von

links kommenden Nebenbach folgte ich mit dem gleichen negativen Resultat etwa 3 km weit. Ich glaube aber für diesen Mangel in dem letztgenannten Teil sichere Erklärung geben zu können:

1. In seinem Unterlaufe ist er oft sehr reissend und kalkablagernd;
2. sind die Ufer dieses Teiles stark bewaldet;
3. wird er in seinem Oberlaufe oft gereinigt, wie dies die neben dem Bache aufgehäuften Schuttdämme beweisen; und endlich
4. ist jedenfalls der Hauptgrund folgender: Der Bach entspringt aus einem kleinen See, dem sog. Lobsigensee. Derselbe wird von einigen mageren Zuflüssen gespiesen. Im Sommer hat sein Wasser eine ausserordentlich hohe Temperatur und in diesem warmen Wasser leben ja, wie bereits erwähnt, die in Betracht kommenden Arten nicht. Dendrocœlum lacteum dagegen kehrt sich nicht an die hohe Temperatur und bewohnt ziemlich häufig die Steine des Ufers.[1])

In der Strecke, die oft gereinigt wird, fiel mir überhaupt die verhältnismässige Seltenheit eigentlicher Wassertiere auf. Gammarus findet sich wohl, aber nur sporadisch, Wasserschnecken sind geradezu selten, die kleinen, schwarzen Käfer, die im Lyssbach selbst einen wesentlichen Bestandteil der Fauna ausmachen, finden sich nur hie und da; von Anneliden ist keine Spur. Dagegen treten alle die Insektenlarven, deren Imagines ein Landleben führen, in grosser Menge auf.

Dies in Kürze die Ergebnisse meiner Exkursionen; weitere Nachforschungen auf diesem Gebiet können noch manches Neue ergeben.

Es sei mir noch gestattet, Herrn Dr. Th. Steck, der so freundlich war, die Korrektur zu übernehmen, den besten Dank abzustatten.[2])

---

[1]) Sämtliche bis jetzt bekannte Fundorte der einheimischen Turbellarien habe ich in einer demnächst in der Revue Suisse de Zoologie erscheinenden Arbeit zusammengestellt.

[2]) Das Manuskript wurde fertig gestellt im Indischen Ocean, an Bord des «Sachsen» (Nordd. Lloyd), den 29. Dez. 1899.

Die nachfolgende *Abhandlung L. Schläfli's über «Praktische Integration»* ist in Briefform für einen uns unbekannten Freund bestimmt, dem beim Lesen von *J. L. Raabe's* Differenzial- und Integralrechnung gewisse Zweifel aufgestiegen waren. Er ist undatiert; jedoch lassen sich leicht Anhaltspunkte gewinnen, welche uns auf die Zeit der Abfassung schliessen lassen. Der Aufenthalt Schläfli's in Thun dauerte von 1837 bis 1847. Die ganze Abhandlung wurde veranlasst durch Fragen, die Schläfli's Freund beim Lesen des I. Bandes des Raabe'schen Werkes besonders bei S. 21 und 41 aufgestiegen waren. Dieser I. Band Raabe's ist 1839 in Zürich erschienen und wir werden kaum fehl gehen, wenn wir den Brief auf das Jahr 1840 datieren. Wir geben den Brief möglichst getreu wieder, haben uns aber erlaubt, die Nummerierung der Resultate in einer Weise zu verändern, dass das Verständnis des Aufsatzes nur gefördert wird, sowie einige Zusätze und Erläuterungen zu geben. Der Aufsatz scheint uns für die Priorität der Aufstellung der Theorie der Bernoullischen Zahlen und Funktionen von gewisser Bedeutung zu sein und beweist aufs Neue, welch' schöpferischer Geist in Schläfli wohnte.

Praktische Integration.

Von

L. Schläfli.

Wenn $f(x)$ die erste abgeleitete Funktion von der ursprünglichen Funktion $F(x)$ bezeichnet, d. h. wenn für ein unendlich werdendes w

$$\lim_{w=0} \frac{F(x+w) - F(w)}{w} = f(x) \qquad \text{(A.)}$$

ist, so schreibt man auch

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

oder mit Rücksicht nicht bloss auf die algebraische Form, sondern auf den absoluten Wert

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

wo a einen Anfangswert der Variablen x bezeichnet, von dem an man sie bis zu ihrem Endwert b wachsen lässt.

Aufgabe: Die Funktion f(x) ist gegeben; es ist aber kein Verfahren bekannt, durch welches man einen endlichen (geschlossenen) Ausdruck für die Funktion F(x) finden könnte? Man soll daher F(b) — F(a) wenigstens approximativ mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit berechnen.

Auflösung: Man teile b — a in n gleiche Teile — je mehr, desto besser. — Ein solcher Teil heisse w, also b — a = nw.

Wenn nun f(x) zwischen den Grenzen a und b kontinuierlich und endlich bleibt, so kann der Fehler, den man begeht, wenn man in der Gleichung (A.) das Zeichen lim weglässt, durch Vermehrung der ganzen Zahl n und daherige Verminderung der Grösse w so klein gemacht werden als man will, nur nicht = 0.

Begnügt man sich nun mit irgend einem Grade von Genauigkeit, und nimmt man w so klein an als es derselbe erfordert, so kann man folgende Gleichungen hinsetzen:

$$\begin{aligned}
F(a+w) - F(a) &= w\,f(a)\\
F(a+2w) - F(a+w) &= w\,f(a+w)\\
F(a+3w) - F(a+2w) &= w\,f(a+2w)\\
F(a+4w) - F(a+3w) &= w\,f(a+3w)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
F(a+nw) - F(a+(n-1)w) &= w\,f(a+(n-1)w), \quad \text{addiert}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(a+nw) - F(a) &= w\left\{f(a)+f(a+w)+\cdots\cdots+f(a+(n-1)w)\right\}\\
&= F(b) - F(a).
\end{aligned}$$

Beurteilung des an dieser Gleichung haftenden Fehlers, für den Fall, dass f(x) von x = a bis x = b beständig wächst.

Den n^{ten} Teil von b—a, d. h. w teile man ferner in p gleiche Teile; dann kann man die Gleichung

$$F(a+w) - F(a) = w\,f(a)$$

durch die *viel genauere*

$$F(a+w)-F(a)=\frac{w}{p}\left\{f(a)+f\left(a+\frac{w}{p}\right)+\cdots\cdots+f\left(a+\frac{p-1}{p}w\right)\right\}$$

ersetzen. Es ist der gemachten Annahme zufolge

$$f\left(a+\frac{w}{p}\right)>f(a)$$

$$f\left(a+\frac{2w}{p}\right)>f\left(a+\frac{w}{p}\right)$$

u. s. f., daher auch

$$f(a)+f\left(a+\frac{w}{p}\right)+f\left(a+\frac{2w}{p}\right)+\cdots\cdots+f\left(a+\frac{p-1}{p}w\right)>pf(a),$$

also $F(a+w)-F(a)>wf(a)$, analog

$$F(a+2w)-F(a+w)>wf(a+w)$$

u. s. w., daher schliesslich

$$F(b)-F(a)>w\left\{f(a)+f(a+w)+\cdots\cdots+f(a+(n-1)w)\right\}, \qquad (1.)$$

aber diese Ungleichheit nähert sich der Gleichheit so sehr als man will, wenn nur w immer kleiner angenommen wird.

Ferner ist

$$f(a)<f(a+w)$$

$$f\left(a+\frac{w}{p}\right)<f(a+w)$$

— — — — — — —

$$f\left(a+\frac{p-1}{p}w\right)<f(a+w), \text{ folglich auch}$$

$$F(a+w)-F(a)<wf(a+w)$$

$$F(a+2w)-F(a+w)<wf(a+2w)$$

— — — — — — — — — — — — —

$$F(a+nw)-F(a+(n-1)w)<wf(a+nw), \text{ addiert}$$

$$F(a+nw)-F(a)<w\left\{f(a)+w)+f(a+2w)+\cdots\cdots\right.$$
$$\left.+f(a+(n-1)w+f(a+nw)\right\}$$

aber $a+nw=b$, daher

$$F(b)-F(a)<w\left\{f(a+w)+f(a+2w)+\cdots\cdots\right.$$
$$\left.+f(a+(n-1)w)+f(b)\right\} \qquad (2.)$$

Aber auch diese Ungleichheit nähert sich der Gleichheit so sehr als man will, wenn man nur n gross genug annimmt.

Die Betrachtung der beiden approximativen Werte von $F(b) - F(a)$, von denen der eine zu klein, der andere zu gross ist, zeigt, dass der Fehler kleiner sein muss als $a\{f(b) - f(a)\}$.

Entwicklung des Fehlers in eine Reihe nach den steigenden Potenzen von w.

Man bezeichne die successiven Differentialquotienten von f(x) durch $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots\ldots\ldots$, setze

$$F(b) - F(a) = F;\ f(b) - f(a) = f$$
$$f_1(b) - f_1(a) = f_1$$
$$f_2(a) - f_2(a) = f_2$$
$$- - - - - -$$

$$S = a\{f(a) + f(a + w) + \cdots + f(a + k\,w) + \cdots + f(a + (n-1)\,w)\}$$

$$S = a\sum_{k=0}^{k=n-1} f(a + k\,w)$$

$$s = a\sum_{k=0}^{k=n-1} f_1(a + k\,w)$$

$$s_1 = a\sum_{k=0}^{k=n-1} f_2(a + k\,w)$$

$$s_2 = a\sum_{k=0}^{k=n-1} f_3(a + k\,w)$$

$$- - - - - - - - -$$

Nun hat man ganz genau

$$F(b) - F(a) = \int_a^{a+w} f(x)\,dx + \int_{a+w}^{a+2w} f(x)\,dx + \cdots + \int_{a+(n-1)w}^{a+nw} f(x).\,dx$$

$$= \sum_{k-0}^{k=n-1} \int_{a+kw}^{a+(k+1)w} f(x)\,dx. \qquad (3.)$$

Nach dem *Satze von Taylor* ist aber

$$\int_{a+kw}^{a+(k+1)w} f(x)\,dx = F(a + k\,w + w) - F(a + k\,w)$$

$$= w\,f(a+kw) + \frac{w^2}{2!} f(a+kw) + \frac{w^3}{3!} f(a+kw) + \cdots\cdots$$

Setzt man dies in die Gleichung (3.) ein, so folgt

$$F = S + \frac{w}{2!} s + \frac{w^2}{3!} s_1 + \frac{w^3}{4!} s_2 + \cdots + \frac{w^{\mu-1}}{\mu!} s_{\mu-2} + \cdots\cdots \quad (4.)$$

Weil nun aber die Funktion $f(x)$ sich zu $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ etc.,
» » $f_1(x)$ » » $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ »
» » $f_2(x)$ » » $f_3(x)$, $f_4(x)$, $f_5(x)$ »
— — — — — — — — —

ganz ebenso verhalten wie sich die Funktion $F(x)$ zu $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... verhält, so hat man folgendes System von unendlich vielen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
F &= S + \frac{w}{2!} s + \frac{w^2}{3!} s_1 + \cdots\cdots + \frac{w^{\mu-1}}{\mu!} s_{\mu-2} + \cdots\cdots \\
f &= s + \frac{w}{2!} s_1 + \frac{w^2}{3!} s_2 + \cdots\cdots + \frac{w^{\mu-1}}{\mu!} s_{\mu-1} + \cdots\cdots \\
f_1 &= s_1 + \frac{w}{2!} s_2 + \frac{w_3}{3!} s_3 + \cdots\cdots + \frac{w^{\mu-1}}{\mu!} s_{\mu} + \cdots\cdots \\
&\text{— — — — — — — — — — — — — —} \\
f_m &= s_m + \frac{w}{2!} s_{m+1} + \frac{w^2}{3!} s_{m+2} + \cdots + \frac{w^{\mu-1}}{\mu!} s_{m+\mu-1} + \cdots
\end{aligned}\right\} \text{I.}$$

Aus dem System I sollen nun $s\ s_1\ s_2\ s_3$ ..... eliminiert, d. h. der Wert von s durch $F\ f\ f_1\ f_2$ ..... ausgedrückt werden.

Um diese Elimination bequem auszuführen, wollen wir uns vorerst auf 5 Gleichungen beschränken und dieselben folgendermassen darstellen.

$$\begin{aligned}
F &= S + \frac{1}{2} w s + \frac{1}{6} w^2 s_1 + \frac{1}{24} w^3 s_2 + \frac{1}{120} w^4 s_3 + \cdots\cdots \\
wf &= \quad w s + \frac{1}{2} w^2 s_1 + \frac{1}{6} w^3 s_2 + \frac{1}{24} w^4 s_3 + \cdots\cdots \\
w^2 f_1 &= \quad w^2 s_1 + \frac{1}{2} w^3 s_2 + \frac{1}{6} w^4 s_3 + \cdots\cdots \\
w^3 f_2 &= \quad w^3 s_2 + \frac{1}{2} w^4 s_3 + \cdots\cdots \\
w^4 f_3 &= \quad w^4 s_3 + \cdots\cdots
\end{aligned}$$

Die letzte dieser 5 Gleichungen ergiebt:

$$w^4 s_3 = w^4 f_3 - \cdots\cdots, \text{ also die vorletzte}$$

$$w^3 s_2 = w^3 f_2 - \frac{1}{2} w^4 f_3 + \cdots\cdots, \text{ die dritte}$$

$$w^2 s_1 = w^2 f_1 - \frac{1}{2} w^3 f_2 + \frac{1}{12} w^4 f_3 - \cdots\cdots, \text{ die zweite}$$

$$w s = w f - \frac{1}{2} w^2 f_1 + \frac{1}{12} w^3 f_2 + 0 \cdot w^4 f_3 - + \cdots\cdots, \text{ die erste}$$

$$S = f - \frac{1}{2} w f + \frac{1}{12} w^2 f_1 + 0 \cdot w^3 f_2 - \frac{1}{720} w^4 f_3 + \cdots\cdots$$

Man entnimmt hieraus, dass gesetzt werden darf:

$$S = F + c_1 w f + c_2 w^2 f_1 + c_3 w^3 f_2 + \cdots\cdots + c_\mu w^\mu f_{\mu-1} + \cdots\cdots$$

$$s = f + c_1 w f_1 + c_2 w^2 f_2 + c_3 w^3 f_3 + \cdots\cdots + c_\mu w^\mu f_\mu + \cdots\cdots$$

$$s_1 = f_1 + c_1 w f_2 + c_2 w^2 f_3 + c_3 w^3 f_4 + \cdots\cdots + c_\mu w^\mu f_{\mu+1} + \cdots\cdots$$

— — — — — — — — — — — — — — — — —

$$s_m = f_m + c_1 w f_{m+1} + c_2 w^2 f_{m+2} + c_3 w^3 f_{m+3} + \cdots\cdots c_\mu w^\mu f_{m+\mu} + \cdots\cdots$$

Man substituiere nun diese Werte von S s s_1 s_2 $\cdots\cdots$ in die erste Gleichung des Systems I, so erhält man für die unbestimmten Coefficienten $c_1 c_2 \cdots\cdots c_\mu \cdots\cdots$ folgendes System von Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{1}{2!} + c_1 = 0 \\
\frac{1}{3!} + \frac{c_1}{2!} + c_2 = 0 \\
\frac{1}{4!} + \frac{c_1}{3!} + \frac{c_2}{2!} + c_3 = 0 \\
\frac{1}{5!} + \frac{c_1}{4!} + \frac{c_2}{3!} + \frac{c_3}{2!} + c_4 = 0 \\
\frac{1}{6!} + \frac{c_1}{5!} + \frac{c_2}{4!} + \frac{c_3}{3!} + \frac{c_4}{2!} + c_5 = 0 \\
\text{— — — — — — — — — —} \\
\frac{1}{(n+1)!} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{c_k}{(n+1-k)!} = 0
\end{array}\right\} \text{II.}$$

Es ist daher $c_1 = -\frac{1}{2}$

$$c_2 = \frac{1}{12}$$

$$c_3 = 0$$

$$c_4 = -\frac{1}{720}$$

$$c_5 = 0$$

$$c_6 = \frac{1}{30240}$$

$$c_7 = 0$$

$$c_8 = -\frac{1}{1209600}$$

$$c_9 = 0$$

$$c_{10} = \frac{1}{47900160}$$

$$c_{11} = 0$$

$$c_{12} = -\frac{691}{1307674368000}$$

$$c_{13} = 0$$

$$c_{14} = \frac{1}{74724249600} \quad \text{u. s. f.}$$

Die Gleichung, in welcher zuerst die unbestimmten Coefficienten $c_1\ c_2\ c_3 \cdots\cdots$ gebraucht wurden, kann jetzt auch so geschrieben werden

$$F = S - c_1 w f - c_2 w^2 f_1 - c_3 w^3 f_2 - c_4 w^4 f_3$$

oder wenn für die Zeichen $F, f, f_1, f_2, f_3, \cdots\cdots c_1\ c_2\ c_3 \cdots\cdots$ das durch sie bezeichnete gesetzt und auf $S - c_1 w f$ reduziert wird

$$\int_a^b f(x)\,dx = w\left\{\frac{1}{2}f(a) + f(a+w) + f(a+2w) + \cdots\cdots\cdots + f(a+(n-1)w) + \frac{1}{2}f(b)\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{1}{12}\,w^2\left\{f_1(b)-f_1(a)\right\}+\\
&\frac{1}{720}\,w^4\left\{f_3(b)-f_3(a)\right\}-\\
&\frac{1}{30240}\,w^6\left\{f_5(b)-f_5(a)\right\}+\\
&\frac{1}{1209600}\,w^8\left\{f_7(b)-f_7(a)\right\}-\\
&\frac{1}{47900160}\,w^{10}\left\{f_9(b)-f_9(a)\right\}+\\
&\frac{691}{1307674368000}\,w^{12}\left\{f_{11}(b)-f_{11}(a)\right\}-
\end{aligned}\right\}\text{III.*)}$$

$$\frac{1}{74724249600}\,w^{14}\left\{f_{13}(b)-f_{13}(a)\right\}+\ldots\ldots\text{ in inf.}$$

Schläfli bemerkt, dass *Raabe* in seinem Buch «die Differenzial- und Integralrechnung» auf S. 431 diese Gleichung (3.) auch habe, sie aber anders abteile und zwar mit dem Vorteil, einen Ausdruck für die Ergänzung zu haben, deren die Reihe in (3.) bedarf, wenn sie irgendwo abgebrochen wird. In der That findet sich im I. Bande, § III von Seite 435 ein «Allgemeines Verfahren die nummerischen Werte bestimmter Integralien näherungsweise zu ermitteln.» Seite 432 giebt er die Coefficienten dem Werte nach wie hier, während er sie Seite 433 bis mit c_{20} auf 16 Decimalstellen ausgerechnet hat, nämlich

$c_2 = 0{,}08333\ 33333\ 333333$
$c_4 = 0{,}00138\ 88888\ 888889$
$c_6 = 0{,}00003\ 30687\ 830688$
$c_8 = 0{,}00000\ 08267\ 195767$
$c_{10} = 0{,}00000\ 00208\ 767570$
$c_{12} = 0{,}00000\ 00005\ 284190$
$c_{14} = 0{,}00000\ 00000\ 133825$
$c_{16} = 0{,}00000\ 00000\ 003390$
$c_{18} = 0{,}00000\ 00000\ 000086$
$c_{20} = 0{,}00000\ 00000\ 000002$

Nun mögen noch einige Untersuchungen über diese Zahlen $c_1\ c_2\ c_3 . c_4 \ldots\ldots$ folgen. Wir werden durch Vergleichung auf folgende Fragen geführt:

*) Für die Methode, diese Gleichung abzuleiten, vergleiche *S. D. Poisson*, Traité de mécanique, III. Auflage, I, S. 16, Nr. 13.

1. *Sind wirklich mit Ausnahme von c, alle Zahlen c mit ungeradem Index = O, wie es die berechneten Werte von* $c_3\, c_5\, c_7\, c_9\, c_{11}\, c_{13}$ *vermuten lassen?*

2. *Geht der Zeichenwechsel der Werte der mit geradem Index behafteten c ungestört so weiter, wie er an den berechneten Werten von* c_2 *bis* c_{14} *sich zeigt?*

3. *Wenn man in den Nennern der Zahlen* $c_2\, c_4\, c_6$ *etc. die Faktoren 1! 3! 5! etc. weglässt, welcher Natur ist denn die Progression*

$$\frac{1}{12},\ \frac{1}{120},\ \frac{1}{252},\ \frac{1}{240},\ \frac{1}{132},\ \frac{691}{27760},\ \frac{1}{12},$$

u. s. w.? Nähern sich ihre Glieder vielleicht immer mehr einem bestimmten endlichen Werte? oder können sie vielleicht grösser werden als jede beliebige Zahl?

Man multipliziere die erste der Gleichungen II mit x^2, die zweite mit x^3, die dritte mit x^4, u. s. f., damit bei der Addition der so veränderten Gleichungen in der ersten senkrechten Reihe

$$\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\cdots \text{ in inf.} = e^x - 1 - x$$

herauskomme. In der zweiten senkrechten Reihe erhält man $c_1\, x\, (e^x - 1)$; in der dritten $c_2\, x^2\, (e^x - 1)$ u. s. f., somit im ganzen

$$e^x - 1 - x + c_1\, x\, (e^x - 1) + c_2\, x^2\, (e^x - 1) + c_3\, x^2\, (e^x - 1) + \cdots\cdots = 0$$

$$e^x - 1 + c_1\, x\, (e^x - 1) + c^2\, x_2\, (e^x - 1) + \cdots\cdots = x$$

$$1 + c_1\, x + c_2\, x^2 + c_3\, x^3 + \cdots\cdots = \frac{x}{e^x - 1}$$

$$= \frac{x}{2}\,\frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} - 1$$

also, weil $c_1 = -\frac{1}{2}$ ist

$$\frac{x}{2}\cdot\frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} = 1 + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots\cdots$$

Da aber die linke Seite dieser Gleichung den Wert nicht ändert, wenn x in $-x$ übergeht, so müssen alle mit ungeradem Index behafteten Coefficienten c der rechten Seite verschwinden. Dies die Antwort auf die erste Frage.

Zusätze: Es ist

$$\frac{x}{2}\,\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}} = 1 + c_2x^2 + c_4x^4 + c_6x^6 + \cdots\cdots \qquad (a)$$

Lässt man in dieser Gleichung x in ix übergehen, so folgt:

$$\frac{x}{2}\cot g\,\frac{x}{2} = 1 - c_2x^2 + c_4x^4 - c_6x^6 + - \cdots\cdots \qquad (b)$$

Schwieriger zu beantworten ist die *zweite* Frage.

Um kleinere Brüche zu erhalten, setze ich $c_{2n} = -(-1)^n \frac{B_n}{(2n-1)!}$

Man hat nämlich alsdann $B_1 = \frac{1}{12}$

$$B_2 = \frac{1}{120}$$

$$B_3 = \frac{1}{252}$$

$$B_4 = \frac{1}{240}$$

$$B_5 = \frac{1}{132}$$

$$B_6 = \frac{691}{32760}$$

$$B_7 = \frac{1}{12}$$

Die allgemeine Gleichung bei II muss in zwei Fällen betrachtet werden:

1. n gerade,
2. n ungerade.

1. Setzt man für n die gerade Zahl 2n, so hat man

$$\frac{1}{(2n+1)!} - \frac{1}{2}\frac{1}{(2n)!} + \frac{c_2}{(2n-1)!} + \cdots\cdots + \frac{c_{2k}}{(2n+1-2k)} + \cdots\cdots + \frac{c_{2n}}{1!} = 0.$$

Man multipliziere diese Gleichung mit (2n)!, führe die obige Bezeichnung durch B ein und bediene sich des *Raabe'schen*

$$\binom{2n}{2k-1} = \frac{2n\,(2n-1)\cdots\cdots(2n-2k+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(2k-1)},$$

so erhält man die Gleichung

$$\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k \binom{2n}{2k-1} B_k = 0. \qquad (c)$$

Diese Gleichung gilt für alle Werte der ganzen Zahlen von 1 an bis ∞.

2. Setzt man für n die ungerade Zahl $2n+1$ ein, so hat man

$$\frac{1}{(2n+2)!} - \frac{1}{2}\frac{1}{(2n+1)!} + \frac{c_2}{(2n)!} + \cdots\cdots + \frac{c_{2k}}{(2n+2-2k)!} + \cdots\cdots + \frac{c_{2n}}{2!} = 0.$$

Durch Multiplikation mit $(2n+1)!$ erhält man

$$\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k-1} \cdot B_k = 0. \qquad (d)$$

Diese Gleichung gilt auch für $n = 0$. Das System (c) würde zur Berechnung der Werte von $B_1\, B_2\, B_3 + \cdots\cdots$ genügen, aber die Gleichungen (d) sind sehr vorteilhaft zur Verifikation.

Es wird im Verlauf der Untersuchungen von Nutzen sein, wenn man jetzt schon, veranlasst durch die Form der Gleichungen (c) und (d), folgende Bezeichnung einführt:

$$\varphi(x,n) = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n}}{2} - \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k B_k \binom{2n}{2k-1} x^{2n-2k+1} \qquad (e)$$

$$\psi(x,n+1) = \frac{x^{2n+2}}{2n+2} - \frac{x^{2n+1}}{2} - \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k B_k \binom{2n+1}{2k-1} x^{2n-2k+2}$$

oder

$$\psi(x,n) = \frac{x^{2n}}{2n} - \frac{x^{2n-1}}{2} - \sum_{k=1}^{k=n-1} (-1)^k B_k \binom{2n-1}{2k-1} x^{2n-2k} \qquad (f)$$

Diese Gleichungen (e) und (f) gelten für $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ und nun lassen sich die Gleichungen (c) und (d) ganz kurz so darstellen:

$$\varphi(1,n) = 0; \quad \psi(1,n) = 0.$$

Überdies hat man noch $\varphi(0,n) = 0$; $\psi(0,n) = 0$.

Überdies hat man noch $\varphi(0,n) = 0$; $\psi(0,n) = 0$.

Multiplizieren wir (e) mit dx und integriert man zwischen den Grenzen 0 und x, so folgt

$$\int_0^x \varphi(x,n)\,dx = \int_0^x \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,dx - \int_0^x \frac{x^{2n}}{2}\,dx - \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k B_k \binom{2n}{2k-1} \int_0^x x^{2n-2k+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2n+1}\frac{x^{2n+2}}{2n+2} - \frac{x^{2n+1}}{2(2n+1)} - \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k B_k \binom{2n}{2k-1} \frac{x^{2n-2k+2}}{2n-2k+2}$$

$$\int \varphi(x,n)\,dx = \frac{1}{2n+1}\,\psi(x,n+1); \text{ analog} \qquad (g)$$

$$\int \psi(x,n)\,dx = \frac{1}{2n}\,\varphi(x,n) + (-1)^n B_n \cdot x \qquad (h)$$

Die Gleichung (a) lässt sich folgendermassen darstellen:

$$\frac{1 + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{4!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{6!} + \cdots}{\frac{1}{1!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{3!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{5!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{7!} + \cdots} = 1 + \frac{B_1}{1!}x^2 - \frac{B_2}{3!}x^4 + \frac{B_3}{5!}x^6 - + \cdots$$

Man multipliziere beide Seiten dieser Gleichung mit dem Nenner linker Hand, so müssen, da ja die Gleichung für jedes x wahr sein soll, die Coefficienten der gleich hohen Potenzen von x einander gleich sein. Dadurch erhalten wir folgendes System von Gleichungen:

$$\frac{(1/2)^2}{3!} + \frac{B_1}{1!\,1!} = \frac{(1/2)^2}{2!}$$

$$\frac{(1/2)^4}{5!} + \frac{(1/2)^2 B_1}{1!\,3!} - \frac{B_2}{3!\,1!} = \frac{(1/2)^4}{4!}$$

$$\frac{(1/2)^6}{7!} + \frac{(1/2)^4 B_1}{5!\,1!} - \frac{(1/2)^2 B_2}{3!\,3!} + \frac{B_3}{5!\,1!} = \frac{(1/2)^6}{6!}, \text{ allgemein}$$

— — — — — — — — — — — — — —

$$\frac{(1/2)^{2n}}{(2n+1)!} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(1/2)^{2n-2k} B_k \cdot (-1)^k}{(2n-2k+1)!\ (2k-1)!} = \frac{(1/2)^{2n}}{(2n)!}$$

oder wenn wir mit $\frac{1}{2}(2n)!$ multiplizieren, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(1/2)^{2n+1}}{2n+1} - \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k B_k \binom{2n}{2k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2k+1} = \frac{(1/2)^{2n}}{2} \\ &\text{oder auch wegen (e)} \\ &\varphi\left(\frac{1}{2}, n\right) = 0. \end{aligned}\right\} \text{(j)}$$

Dies ist der erste Satz. Durch Behandlung der Gleichung (a) wurde eben der Beweis und die Aufstellung dieses ersten Satzes beabsichtigt. Nun stellen wir gleich einen *zweiten Satz* auf. Es ist zu zeigen, dass

$$\cos\Theta + \frac{\cos 2\Theta}{2^{2n}} + \frac{\cos 3\Theta}{3^{2n}} + \cdots\cdots + \frac{\cos p\Theta}{p^{2n}} + \cdots\cdots \text{in inf.}$$

$$= \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\cos p\Theta}{p^{2n}} = -\frac{(-1)^n}{2} \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n-1)!} \psi\left(\frac{\Theta}{2\pi}, n\right) + \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n-1)!} B_n \quad \text{(k)}$$

Um zu zeigen, dass dieser Satz für $0 < \Theta < 2\pi$ wahr ist, zeige man vorerst, dass wenn er für n gilt, er auch für $n+1$ Giltigkeit hat; hernach soll die Richtigkeit noch für $n = 1$ nachgewiesen werden.

Durch Multiplikation mit $d\Theta = 2\pi\, d\frac{\Theta}{2\pi}$ und Integration von 0 bis Θ findet man unter Beachtung von Gleichung (h)

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\sin p\Theta}{p^{2n+1}} = -\frac{(-1)^n}{2} \frac{(2\pi)^{2n+1}}{(2n)!} \varphi\left(\frac{\Theta}{2\pi}, n\right) \quad \text{(l)}$$

Diese Gleichung liefert für die Setzungen $\Theta = 0$, $\Theta = \pi$, $\Theta = 2\pi$, die schon gefundenen Gleichungen

$$\varphi(0, n) = 0,\ \varphi\left(\frac{1}{2}, n\right) = 0,\ \varphi(1, n) = 0,$$

was für die Richtigkeit der Gleichungen (l) und (k) spricht. Durch nochmalige Multiplikation mit $d\Theta$ und Integration von 0 bis Θ folgt

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1 - \cos p\Theta}{p^{2n+2}} = -\frac{(-1)^n}{2} \frac{(2\pi)^{2n+2}}{(2n+1)!} \psi\left(\frac{\Theta}{2\pi}, n+1\right),$$

daher

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\cos p\Theta}{p^{2n+2}} = -\frac{(-1)^{n+1}}{2} \frac{(2\pi)^{2n+2}}{(2n+1)!} \psi\left(\frac{\Theta}{2\pi}, n+1\right) + \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p^{2n+2}} \quad (m)$$

Durch abermalige Multiplikation dieser Gleichung mit $d\Theta$ und nachfolgender Integration erhalten wir

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\sin p\Theta}{p^{2n+3}} = -\frac{(-1)^{n+1}}{2} \frac{(2\pi)^{2n+3}}{(2n+2)!} \varphi\left(\frac{\Theta}{2\pi}, n+1\right) - \frac{(2\pi)^{2n+2}}{2(2n+1)!} B_{n+1}\Theta + \Theta \cdot \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p^{2n+2}}.$$

Setzt man in dieser Gleichung $\Theta = \pi$ und bedenkt man, dass $\sin p\pi = 0$ und $\varphi\left(\frac{1}{2}, n+1\right) = 0$ wegen (j), so erhält man

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p^{2n+2}} = \frac{(2\pi)^{2n+2}}{2(2n+1)!} B_{n+1}.$$

Substituiert man diesen Wert nun in Gleichung (m), so unterscheidet sich dieselbe von Gleichung (k) nur dadurch, dass in ihr $n+1$ statt n steht, somit ist der erste Teil des Beweises geleistet und es ist noch zu zeigen, dass (k) auch für $n=1$ gilt. Es sei

$$y = x\cos\Theta + x^2\cos 2\Theta + x^3\cos 3\Theta + \cdots\cdots + x^m\cos m\Theta + \cdots\cdots,$$

wo x einen ächten positiven oder negativen Bruch bezeichnen mag, damit die Reihe konvergent sei. Multipliziert man diese Reihe mit $2x\cos\Theta$ und beachtet man, dass

$$2x^{m+1}\cos m\Theta\cos\Theta = x^{m+1}\cos(m-1)\Theta + x^{m+1}\cos(m+1)\Theta,$$

so findet man

$$2xy\cos\Theta = x^2(y+1) + y - x\cos\Theta,$$

$$\text{woraus } y = \frac{x\cos\Theta - x^2}{1-2x\cos\Theta+x^2} \text{ folgt, oder auch}$$

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1-x^2}{1-2x\cos\Theta+x^2}.$$

Man multipliziere nun diese Gleichung mit $d\Theta$ und integriere. Rechts führe man die Variable $t = \tang\frac{\Theta}{2}$ und berücksichtige die

Gleichungen $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ und $d\theta = \frac{2\,dt}{1+t^2}$. Man erhält alsdann wegen

$$\int \frac{(1-x^2)\,dt}{(1-x)^2+(1+x)^2\,t^2} = \text{arc tang}\,\frac{1+x}{1-x}\,t$$

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{x^p \sin p\theta}{p} = -\frac{\theta}{2} + \text{arc tang}\,\frac{1+x}{1-x}\,t$$

$$= \text{arc tang}\,\frac{x\sin\theta}{1-x\cos\theta}.$$

Man beabsichtigt nun in dieser Gleichung $x = 1$ werden zu lassen. Dann muss aber θ zwischen den Grenzen 0 und 2π enthalten sein, weil an diesen Grenzen selbst $y = 1+1+1+\cdots = \infty$ wird, also eine Integration $\int y\,d\theta$ bis an diese Grenze oder über sie hinaus keinen Sinn haben kann. Man findet also für $0 < \theta < 2\pi$, die Gleichheit von θ mit einer dieser Grenzen ausgeschlossen,

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\sin p\theta}{p} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}. \qquad (n)$$

Durch Multiplikation mit $d\theta$ und Integration von α bis θ

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\cos p\alpha - \cos p\theta}{p^2} = \frac{\pi}{2}(\theta-\alpha) - \frac{1}{4}(\theta^2-\alpha^2), \text{ also}$$

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\cos p\theta}{p^2} = \frac{1}{4}\theta^2 - \frac{1}{2}\pi\theta + \left\{\sum \frac{\cos p\alpha}{p^2} - \frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{1}{4}\pi\alpha\right\}$$

Es ist aber für ein unendlich klein werdendes α

$$\lim_{\alpha=0}\left\{\sum \frac{\cos p\alpha}{p^2} - \frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{1}{4}\pi\alpha\right\} = \sum \frac{1}{p^2},$$

$$\text{als } o\sum \frac{\cos p\theta}{p^2} = \frac{1}{4}\theta^2 - \frac{1}{2}\pi\theta + \sum \frac{1}{p^2}. \qquad (\alpha)$$

Man überzeugt sich bald, dass diese Gleichung für $\theta = 2\pi$ wahr ist. Sie gilt also für ein zwischen 0 und 2π liegendes θ und für diese Grenzen selbst. Setzt man in derselben $\theta = \pi$, so kömmt

$$-\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} + \sum \frac{1}{(2m)^2} = -\frac{1}{4}\pi^2 + \sum \frac{1}{(2m-1)^2} +$$

oder auch $\sum \frac{1}{(2m)^2}$

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$ Nun aber ist

$$\sum \frac{1}{(2m)^2} = \frac{1}{4} \sum \frac{1}{m^2};$$ folglich

$$\sum \frac{1}{p^2} = \sum \frac{1}{(2m-1)^2} + \frac{1}{4} \sum \frac{1}{p^2},$$ woraus

$$\sum \frac{1}{p^2} = \frac{4}{3} \sum \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$ und endlich

$$\sum \frac{\cos p\,\Theta}{p^2} = \frac{1}{4}\,\Theta^2 - \frac{1}{2}\,\pi\,\Theta + \frac{\pi^2}{6}. \qquad (\beta)$$

Wenn aber in Gleichung (k) $n = 1$ gesetzt wird, so kommt

$$\sum \frac{\cos p\,\Theta}{p^2} = \frac{(2\pi)^2}{2}\,\psi\left(\frac{\Theta}{2\pi}, 1\right) + \frac{(2\pi)^2}{2} B_1$$

$$= (2\pi)^2 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\Theta}{2\pi}\right)^2 - \frac{1}{2}\,\frac{\Theta}{2\pi}\right] + 2\pi^2 \cdot \frac{1}{12},$$

was mit Gleichung (β) harmoniert.

Endlich gehen wir zum *dritten Satze* über.

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{(2\pi)^{2n}}{2\,(n-1)!}\,B_n \qquad (o)$$

Dieser Satz wird sofort aus (k) erhalten, wenn in (k) $\Theta = 0$ gesetzt wird.

Nun kann auch auf die 2te und 3te Frage geantwortet werden. Da nämlich

$$\sum \frac{1}{p^{2n}} = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \cdots\cdots$$

positiv ist, so muss nach Gleichung (o) auch B_n stets positiv sein, woraus bei der angenommenen Relation $c_{2n} = -(-1)^n \frac{B_n}{(2n-1)}$ der stete Zeichenwechsel der Grössen $c_2\, c_4\, c_6\, c_8 + \cdots\cdots$ sich ergiebt. Da ferner $\sum \frac{1}{p^{2n}}$ stets grösser ist als 1, jedoch dieser Zahl mit wachsendem n fortwährend sich nähert, so hat man

$$B_n > \frac{2(2n-1)!}{(2\pi)^{2n}},$$

jedoch, so dass mit wachsendem n diese Ungleichheit sich beständig der Gleichheit nähert. Da nun im Zähler des Ausdrucks rechter Hand die mit wachsendem n neu hinzu kommenden Faktoren stets grösser werden, während diejenigen des Nenners sich gleich bleiben, so schliesst man hieraus sofort, dass B_n jede endliche positive Grösse überschreiten kann. Die Zahlen $B_1\ B_2 \cdots B_n \cdots$ heissen Bernoullische Zahlen. Ihre Werte werden successive berechnet und verificiert mittelst der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k \binom{2n}{2k-1} B_k = 0 \\ \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k-1} B_k = 0 \end{aligned}\right\} \begin{matrix}(p)\\ \text{Von } n=1\\ \text{bis } n=\infty\end{matrix}$$

Es sei auch

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x,n) &= \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n}}{2} - \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k B_k \binom{2n}{2k-1} x^{2n-2k+1} \\ \psi(x,n) &= \frac{x^{2n}}{2n} - \frac{x^{2n-1}}{2} - \sum_{k=1}^{k=n-1} (-1)^k B_k \binom{2n-1}{2k-1} x^{2n-2k} \end{aligned}\right\} (q)$$

Dann kann man mittelst dieser Bezeichnungen folgende Sätze hinstellen:

$$\int_a^b f(x)dx = w\left\{\frac{1}{2}f(a) + f(a+w)\,f(a+2w) + \cdots + f(a+(n-1)w) + \frac{1}{2}f(b)\right\}$$
$$+ \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^k B_k \frac{w^{2k}}{(2k-1)!}\left\{f_{2k-1}(b) - f_{2k-1}(a)\right\}, \quad (r)$$

wo $b-a=nw$ und $f_{2k-1}(x)$ den $(2k-1)^{\text{ten}}$ Differentialcoefficienten von $f(x)$ bezeichnet. Es ist weiter

$$\frac{x}{2}\frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} = 1 + \frac{B_1}{1!}x^2 - \frac{B_2}{3!}x^4 + \frac{B_3}{5!}x^6 - \frac{B_4}{7!}x^8 + \cdots\cdots \quad (s)$$

$$\frac{x}{2}\operatorname{cotang}\frac{x}{2} = 1 - \frac{B_1}{1!}x^2 - \frac{B_2}{3!}x^4 - \frac{B_3}{5!}x^6 - \frac{B_4}{7!}x^8 + \cdots\cdots \quad (t)$$

ferner

$$\left.\begin{aligned}\varphi(0,n) &= 0, \quad \varphi(1,n) = 0\\ \psi(0,n) &= 0, \quad \psi(1,n) = 0\end{aligned}\right\} \quad (u)$$

und

$$\varphi\left(\frac{1}{2}, n\right) = 0. \quad (v)$$

$$\sum_{1}^{p=\infty}\frac{\cos p\Theta}{p^{2n}} = +\frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n-)!}\left\{B_n - (-1)^n\,\psi\left(\frac{\Theta}{2\pi}, n\right)\right\} \quad (w)$$

$$\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{\sin p\Theta}{p^{2n+1}} = -(-1)^n\frac{(2\pi)^{2n+1}}{2(2n)!}\varphi\left(\frac{\Theta}{2\pi}, n\right) \quad (x)$$

$$\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1}{p^{2n}} = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n-1)!}B_n. \quad (y)$$

Auch lassen sich folgende zwei Sätze, welche bewiesen werden können und in welchen x eine ganze positive Zahl bezeichnet, aufstellen:

$$\left.\begin{aligned}1^{2n} + 2^{2n} + 3^{2n} + 4^{2n} + 5^{2n} + \cdots\cdots + (x-1)^{2n} &= \varphi(x,n)\\ 1^{2n-1} + 2^{2n-1} + 3^{2n-1} + 4^{2n-1} + \cdots\cdots + (x-1)^{2n-1} &= \psi(x,n)\end{aligned}\right\}. \quad (z)$$

Nun, mein Lieber, musst du mich entschuldigen, dass ich mein Versprechen dir nicht eher erfüllt habe. Aber gleich als ich von unserer letzten Zusammenkunft heim kam, dachte ich zu viel versprochen zu haben; denn ich wusste nicht, was ich über die Gleichungen (9) und (10), S. 41 in *Raabe**) dir schreiben sollte, das ich nicht

*) Es handelt sich um die Gleichungen

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = w\left\{\varphi(a) + \varphi(a+w) + \varphi(a+2w) + \cdots\cdots + \varphi(b-w)\right\} \quad (9)$$

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = w\left\{\varphi(a+w) + \varphi(a+2w) + \varphi(a+3w) + \cdots + \varphi(b-w) + \varphi(b)\right\} \quad (10)$$

Siehe S. 41 in J. L. Raabe, die Differential- und Integralrechnung, I. Bd., Zürich 1839.

damals dir mündlich gesagt hätte. So lange w zwar sehr klein ist, aber doch noch einen endlichen Wert hat, sind jene beiden Gleichungen nur approximativ und zwar ist bei der einen der Fehler in diesem Sinne, bei der andern im entgegengesetzten. Subtrahiert man sie daher von einander, so erhält man freilich auf der linken Seite 0, aber auf der rechten Seite die Summe der Fehler, die man aber doch nicht gleich o setzen darf.

Ich verwundere mich aber, dass du *Raabe's* Beweis für den *Taylor'schen* Satz begriffen hast, denn auf S. 21*) kommen Trugschlüsse vor, ähnlicher Art wie der, durch welchen du bei jenen Gleichungen (9) und (10), S. 41, ad absurdum geführt wurdest. Die Gleichung (18), S. 21, ist wirklich gar nicht wahr, wenn anders daselbst $f_1(x)$, $f_2(x)$ u. s. f. die Differentialcoefficienten von $f(x)$ bezeichnen. Die aus Poisson's Mechanik genommene Gleichung, die ich hier mit (v) bezeichnet habe, schien mir vorzüglich geeignet, dir über den Grad der Genauigkeit der Gleichungen (9) und (10), S. 41, in Raabe Licht zu geben, und da jene Gleichung (v) auf die Bernoullischen Zahlen führt, so war mir die Gelegenheit erwünscht, zugleich mehrere Beziehungen und Eigenschaften dieser Bernoullischen Zahlen dir vorzulegen und zu beweisen. Es waren die Gleichungen (z), auf die ich durch Lesung von *Bourdons***) Algebra gelangte, die mich zuerst mit jenen Zahlen bekannt machten. Seither, es *sind nun bald 10 Jahre,* bemühte ich mich vergeblich über sie nähern Aufschluss zu verlangen, namentlich zur Beantwortung obiger drei Fragen zu gelangen. Sieh nun, das Bedürfnis, das ich hatte, dir nicht nur die Gleichung (v) oben aus Poisson schlechtweg hinzuschreiben, sondern auch die

---

*) Bezieht sich auf den von *J. L. Raabe*, die Differential- und Integralrechnung, I. Bd., S. 21, gegebenen Beweis.

**) *Bourdon*, *Pierre Louis Marie*, geb. 16. August 1779 in Mençon, gest. 15. März 1854 in Paris, 1801 Professor der Mathematik zu St. Cyr, dann am Liceé Charlemagne und am Collège Henry IV., zuletzt Inspektor der Universität Paris, schrieb unter anderem «Elements d'algèbre», die bis 1851 11 Auflagen erlebten. Schläfli benutzte die 5te Auflage 1828 und das von ihm gebrauchte Exemplar befindet sich in der Schweiz. Landesbibliothek in Bern. Da er selbst seinen Namen: «L. Schläfli von Burgdorf» eingetragen hat, so ist hieraus zu schliessen, dass er Bourdon während seines Berner Aufenthalts gebraucht hat, also wahrscheinlich von 1829 an. Dies würde nochmals die Annahme bestätigen, dass der vorliegende Brief aus dem Jahr 1840 stammt. Jene Gleichungen (z) beziehen sich auf Bourdon, 5te Aufl. 1828, S. 655.

Eigenschaften der dabei vorkommenden Bernoullischen Zahlen zu beweisen, hat mich jetzt gezwungen, meine eigenen lange gehegten Wünsche zu erfüllen. Es dreht sich vorzüglich alles um die Gleichung (y). Ich kannte zwar schon vorher, ehe ich daran gieng, dir zu schreiben, zwei Beweise derselben, deren einer sich in *Raabe* findet. Aber der, den ich hier gebe, ist elementarer als jene beiden.

Es ist mir auch leid, dass du beide Male als du in Thun warst, mich nicht angetroffen hast. Das erste Mal war ich von Thun abwesend, das andere Mal war ich den ganzen Tag zu Hause gewesen und nur zwischen 5 und 6 Uhr spazieren gegangen. Ich kam zwar vor 6 Uhr zurück, erfuhr aber erst nachher, als es zu spät war, dass du da gewesen seiest.

Dich herzlich grüssend

dein

L. Schläfli.

A. Kaufmann.

Zur Systematik der Cypriden.

Durch eine Reihe von Untersuchungen von V. Vávra, G. W. Müller, G. O. Sars, W. Hartwig, W. Sharpe, C. H. Turner u. a. teils in europäischen, teils in aussereuropäischen Gebieten wurde im Verlaufe des letzten Decenniums die Kenntnis vornehmlich der Süsswassercypriden wesentlich gefördert, indem aus den verschiedensten Gebieten eine grosse Zahl neuer Arten beschrieben und meist auch genau dargestellt wurden. Dabei zeigte sich die Notwendigkeit, eine Anzahl neuer Genera aufzustellen, und je mehr die Zahl der Spezies wuchs, desto mehr stellte sich auch hier das Bedürfnis ein nach einer alle Formen umfassenden Gruppierung.

Diesem Bedürfnisse suchte V. Vávra in der Weise zu entsprechen, dass er für seine Formen aus Zanzibar (20) Untergattungen einführte und diese bei der Bearbeitung ostafrikanischer Arten wiederum zu einzelnen Gruppen vereinigte (21).

In ähnlichem Sinne wird dann auch eine *Cypridopsis*-Gruppe aufgestellt (22).

Wenn nun diese Gruppierung meist aussereuropäischer Formen, gegründet auf genaue anatomische Untersuchungen, unbestreitbar wissenschaftlichen Wert hat, so erscheint sie mir doch bei der immer noch so mangelhaften Kenntnis der einheimischen Arten und bei der noch herrschenden Unklarheit in der Auffassung der Gattungs- und Spezies-Merkmale einstweilen verfrüht, da dadurch eine rasche Orientierung erschwert wird, und wir Gefahr laufen, bei einer neuen Entdeckung, deren voraussichtlich noch viele zu machen sind, für eine einzige stark abweichende Art eine neue Gruppe aufstellen zu müssen.

Was mir aber für den gegenwärtigen Stand unserer Kenntnisse schon berechtigt und durchführbar erscheint, ist eine Zusammen-

stellung der Gattungen in Unterfamilien, wobei die erwähnte Teilung in Subgenera und Arten-Gruppen unangetastet bleibt und nach Belieben weitergeführt oder für spätere Zeiten aufgehoben werden kann.

Ich erlaube mir daher, die einheimischen Formen, die mir zur Untersuchung zugänglich waren, sowie die ausländischen Gattungen, soweit dies nach den Beschreibungen und Darstellungen möglich ist, in eine beschränkte Anzahl von Unterfamilien zusammenzustellen, in der Erwartung, dass auch die künftig neu zu bildenden Gattungen diesen einverleibt werden können, ohne weitgehende Modifikationen in den Familienmerkmalen.

Es geschieht dies z. T. im Anschluss an die Trennung in zwei Unterfamilien, welche G. W. Müller (11) für die Meerescypriden vorgenommen hat.

Die Merkmale, welche, nach meiner Ansicht, zu diesem Zwecke geeignet erscheinen, sind fast ausschliesslich in der Anatomie der Gliedmassen und nur zum geringsten Teil in dem Verhalten der Schalen zu suchen. Es sind: die Gliederzahl der zweiten Antenne, die Anwesenheit und Länge der Schwimmborsten an derselben, die Zahl der Dornen am ersten Fortsatz der Maxille, die Beborstung des Endgliedes des Putzfusses und die Gestalt der Furka. Von der Berücksichtigung des Schalenrandes, auf dessen Gestaltung besonders C. Claus (6) und G. W. Müller (11) ein grösseres Gewicht zu legen scheinen, muss einstweilen abgesehen werden, da dessen Wert zu systematischen Zwecken noch nicht allgemein nachgewiesen und in dem Verhalten desselben wohl kaum mehr als ein Art- oder Gattungsmerkmal zu suchen ist.

Familie **Cyprididae.**

1. Unterfamilie: Notodromadinae.

Letztes Glied der zweiten Antenne lang und schmal. Schwimmborsten überragen die Endklauen. Erster Fortsatz der Maxille mit sechs gefiederten Dornen. Putzfuss am letzten Glied mit drei ungleich langen Borsten. Ejaculationsapparat lang und schmal; Chitinstäbe nicht in getrennten Ringen.

Gattungen: *Notodromas* Liljeborg (10), *Cyprois* e. p. Zenker (24).

Die von Orley (13) als *Notodromas Madaraszi* Orley beschriebene Form gehört nicht dieser Gattung an, wie schon in einer ein-

lässlichen Beschreibung dieser Art durch Daday (7) nachgewiesen wurde, der sie dann der Gattung *Cyprois* einverleibt; sie kann aber auch nicht zu dieser Gattung gestellt werden, wie aus dem Vergleich mit *Cyprois marginata* deutlich hervorgeht. Sie nähert sich vielmehr der Gattung *Cypris* durch den Besitz von zwei Dornen an der Maxille, unterscheidet sich aber von ihr durch die Beborstung des letzten Gliedes des Putzfusses und besonders der Furka und ist, mit Rücksicht darauf, einer besondern Gattung zu unterstellen.

2. *Unterfamilie:* **Herpetocypridinae.**

Schwimmborsten der zweiten Antenne verkümmert. Fortsatz der Maxille mit zwei glatten oder gezähnelten Dornen. Zweites Beinpaar am Ende zangenförmig mit einer gekrümmten Klaue. Furka normal, mit zwei Klauen am distalen Ende. Schwimmvermögen fehlt.

Gattungen: *Herpetocypris* Brady and Norman (3), *Ilyodromus* Sars (16), *Prionocypris* Brady and Norman (4), *Microcypris* Kaufmann (9).

3. *Unterfamilie:* **Cypridinae.**

Schwimmborsten der zweiten Antenne erreichen die Spitzen der Endklauen oder ragen darüber hinaus. Fortsatz der Maxille mit zwei, drei oder vier Dornen. Putzfuss mit zangenförmigem Ende und einer Klaue. Furka normal.

Gattungen: *Cypris* O. F. Müller, *Strandesia* Stuhlmann (18), *Centrocypris* Vávra (20), *Acocypris* Vávra (20), *Stenocypris* Sars (15), *Cyprinotus* Brady (5), *(Heterocypris* Claus (6)*)*, *Zonocypris* G. W. Müller (12), *Chlamydotheca* Saussure (17), *Eurycypris* G. W. Müller (12), *Pachycypris* Claus (6), *Cypretta* Vávra (20), die an die *Cypridopsis*-Formen anlehnt, *Cypridella* Vávra (20), *Pionocypris* Brady (4), *Acanthocypris* Claus (6).

Die von Claus (6 p. 52) aufgestellte Gattung *Heterocypris*, welche Vávra (21) als eine besondere Gruppe der Gattung *Cyprinotus* einführt, entbehrt, nach meiner Ansicht, der Existenzberechtigung völlig. Sie soll, nach Claus, diejenigen Arten der Gattung *Cyprinotus* umfassen, welche keine dorsale Protuberanz, wohl aber eine durch eine Tuberkelreihe gebildete Crenulation am Schalenrand besitzen und geschlechtliche Vermehrung aufweisen. Dieses letztere Merkmal aber fällt

als Gattungsmerkmal unbedingt dahin, da wir auch in andern Gattungen ja selbst bei einzelnen Arten, beiderlei Vermehrungsarten antreffen. Die Tuberkelreihe der rechten Schale ist ferner individuellen Schwankungen unterworfen, kann ganz fehlen, wie bei *Cyprin. incongruens*, welche Claus, und nach ihm andere Autoren, dieser Gattung einverleiben zu müssen glaubten, und die Verhältnisse des Cuticularsaumes sind nach Vávra (21 p. 20) auch keine konstanten; Gründe genug, um die Gattung völlig aufzugeben.

Aus den gleichen Thatsachen ergiebt sich aber auch die Frage, ob die Gattung *Cyprinotus* als solche Berechtigung habe. Die dorsale Protuberanz, die für Brady der Grund zur Abtrennung war, fehlt schon bei *Cyprinotus dentato-marginatus* Sars (15, Taf. I, Fig. 1—4), und ähnliche Erscheinungen treten auch bei der *Cypridopsis*-Gruppe auf, wo die Trennung der Gattungen aus diesem Grunde nicht thunlich wäre. Ebenso ist das Vorhandensein einer Tuberkelreihe auf dem Schalenrand ein Gattungsmerkmal von sehr fraglichem Wert, da es eben ein rein äusserliches ist, und was für bedenkliche Folgen eine Berücksichtigung solcher rein äusserlicher Merkmale in der Systematik herbeiführt, haben uns die Diagnosen älterer Autoren zur Genüge gelehrt. Sie dürfen wohl bei allen Ostracoden höchstens zur Gruppierung innerhalb einer Gattung oder zur Aufstellung von Subgenera verwendet werden (siehe Vávra 21, p. 17).

4. Unterfamilie: **Cypridopsinae.**

Furka verkümmert mit geisselförmiger Endborste. Putzfuss mit einer Klaue am Endglied.

Gattungen: *Cypridopsis* Brady (2), *Paracypridopsis* Kaufmann (9), *Cypridopsella* Kaufmann (9) = *Candonella* Vávra (21) (Claus) (6), *Zonocypris* G. W. Müller (12), *Oncocypris* G. W. Müller (12), *Potamocypris* Brady (1870), nimmt eine Sonderstellung ein.

Diese Subfamilie entspricht also der von Vávra aufgestellten *Cypridopsis*-Gruppe nur teilweise, da er zu dieser auch die Gattungen *Cypridella*, *Pionocypris* und *Cypretta* stellt. Da aber bei diesen Formen die Furka vollkommen normal, bei *Cypretta* nur wenig verändert ist, sehe ich nicht ein, warum sie nicht zur *Cypris*-Gruppe gerechnet werden sollten.

Zu der Gattung *Cypridopsis* Brady zähle ich auch die weit verbreitete Art *Cyprid. vidua*, welche Brady und Norman (4) in ihrer neuesten Arbeit zu der Gattung *Pionocypris* bringen, wo sie ihr aber gleich anfangs eine Ausnahmestellung einräumen müssen.

5. *Unterfamilie:* **Cyclocypridinae.**

Schwimmborsten der zweiten Antenne überragen die Endklauen etwa um die Hälfte ihrer Länge. Zweites Beinpaar am letzten Glied mit drei Borsten, von denen die längste als Putzborste wenigstens so lang ist als die drei letzten Glieder zusammen. Furka normal, mit zwei Endklauen.

Gattungen: *Cyclocypris* Brady and Norman (3), *Cypria* Zenker (24), Untergattung *Physocypria* Vávra (21).

6. *Unterfamilie:* **Ilyocypridinae.**

Zweite Antenne in beiden Geschlechtern fünfgliedrig. Taster des Kieferfusses verkümmert, zweigliedrig. Tibia des zweiten Beinpaares mit wenigstens zwei Borsten, letztes Glied mit drei ungleich langen Borsten. Ejaculationsapparat mit vielen nicht in getrennten Ringen stehenden Chitinstäben.

Die bis anhin beschriebenen Formen wurden alle zur Gattung *Ilyocypris* Brady and Norman (3) gestellt, obschon die Schwimmborsten der zweiten Antenne von sehr verschiedener Ausbildung sind. Gestützt darauf dürfte eine Trennung dieser Gattung mit der Zeit ebenso angezeigt erscheinen, wie bei *Cypris*.

7. *Unterfamilie:* **Candoninae.**

Zweite Antenne des Weibchens fünfgliedrig, des Männchens meist(!) sechsgliedrig mit zwei Spürborsten. Schwimmborsten fehlen gänzlich. Taster des Kieferfusses beim Weibchen nicht verkümmert, dreieckig, beim Männchen ungegliedert. Putzfuss mit drei ungleichlangen Borsten am Endglied. Chitinringe des Ejaculationsapparates getrennt.

Gattungen: *Candona* Baird (1), *Typhlocypris* Vejdovsky (23), *Candonopsis* Vávra (19), *Paracandona* Hartwig (8), *Cryptocandona* Kaufmann (9).

Die marinen Cypriden weichen in der Gestaltung und Beborstung der Gliedmassen nicht unwesentlich von den Süsswasserformen ab, doch lässt sich auch hier die

8. *Unterfamilie:* **Pontocypridinae,**

welche G. W. Müller (11) als *Pontocyprinae* den *Cyprinae* gegenüberstellt, abtrennen. Sie sind nach den Darstellungen von Sars (15), G. W. Müller (11), Brady und Norman (3) dadurch gekennzeichnet, dass die Borsten am Endglied des zweiten Beinpaares in der Richtung des Gliedes verlaufen und die Hodenschläuche einen nach unten offenen Winkel bilden.

Gattungen: *Pontocypris* Sars (Oversigt 1865), *Erythrocypris* G. W. Müller (11), *Pontocypria* G. W. Müller (11), *Argilloecia* Sars (Oversigt 1865).

Die übrigen Meerescypriden, *Macrocypris* Brady und *Aglaia* Brady sind unter sich so verschieden und weichen z. T. von der Familie der *Cyprididae* so erheblich ab, dass ihre Stellung im System einstweilen noch unbestimmt ist, weshalb ich mich auf die Aufstellung dieser acht Unterfamilien beschränkte.

Bern, April 1900.

Litteratur.

1. Baird, W. — The natural history of the British Entomostraca Ray Society. 1850.
2. Brady, G. St. — A monograph of the rec. Brit. Entomostraca. Trans. Linn. Soc. Vol. XXVI. 1868.
3. Brady, G. St., and Norman, A. M. — A monograph of the marine and freshwater Ostracoda .... Trans. R. Dublin Soc. 1889.
4. — — A monograph .... Part. II. Trans. R. Dublin Soc. Vol. V. 1896.
5. Brady, G. St. — Notes on Entom. coll. by A. Haly in Ceylon. Linn. Soc. Journ. Vol. XIX. 1885.
6. Claus, C. — Beiträge zur Kenntnis der Süsswasserostracoden. Arb. zool. Inst. Wien 1892.
7. Daday, E. — Die anatomischen Verhältnisse von Cyprois dispar Termesz. Füs. Bd. XVIII. 1895.
8. Hartwig, W. — Candona euplectella bildet eine selbständige Gattung. Zool. Anz. Bd. XXII. 1900.
9. Kaufmann, A. — Neue Ostracoden aus der Schweiz. Zool. Anz. Bd. XXIII. 1900.
10. Liljeborg, W. — De crustaceis ex ord. tribus. Lund. 1853.
11. Mueller, G. W. — Ostracoden des Golfes von Neapel. Fauna und Flora des Golfes von Neapel. 1894.
12. — — Ostracoden aus Madagaskar und Ost-Afrika. Abhandl. Senckenberg. naturf. Ges. Bd. XXI. 1898.
13. Orley, L. — Über die Entomostraken-Fauna von Budapest. Termesz. Füset. Bd. X. 1886.
14. Sars, G. O. — Nye Bidrag til kundskaben om Middelhavets Invertebratfauna. Arch. f. Math. og. Naturw. Bd. 12. 1887.
15. — — On some freshwater Ostracoda. Vid. Selsk. Forhandl. No. 8. 1889.
16. — — Contribution to the knowledge of the freshwater Entom. of New-Zealand. Vid. Selsk. Skr. Mat. nat. Klasse N. 5. 1894.
17. Saussure, H. — Mémoire sur divers crustacés nouv. des Antilles et du Mexique. Mém. soc. phys. et nat. Genève. 1889.
18. Stuhlmann, F. — Vorläufiger Bericht über eine Reise nach Ost-Afrika. Sitzungsb. k. Akad. der Wiss. Berlin. Bd. XXXII. 1889.
19. Vávra, V. — Monographie der Ostracoden Böhmens. Arch. naturw. Durchforsch. v. Böhmen. Bd. VIII. 1891.
20. — — Süsswasser-Ostracoden Zanzibars. Beiheft d. Hamb. wiss. Anstalten. Bd. XII. 1895.
21. — — Süsswasser-Ostracoden Deutsch-Ost-Afrikas. Ost-Afrika, Berlin. 1897.
22. — — Süsswasser-Ostracoden. Hamb. Magalhaensische Sammelreise. 1898.
23. Vejdovsky, F. — Thierische Organismen der Brunnenwässer von Prag. 1882.
24. Zenker, W. — Monographie der Ostracoden. Arch. f. Naturg. Bd. XX. 1854.

Dr. Dutoit.

Über den Vegetationscharakter der Grajischen Alpen.

(Vorgetragen in der Sitzung vom 29. April 1900.)

Für den Touristen, welcher die Walliser Alpen überschreitet, giebt es nicht wohl einen schrofferen Gegensatz als den zwischen dem Südabhang des Simplon und demjenigen des grossen St. Bernhard. Das Simplonhospiz liegt, mit der Nordseite an einen flachen Rücken angelehnt, mit seiner Südfront ganz frei gegen die Mittagssonne; aber diese Vorahnung Italiens, welche man beim Heruntersteigen in das Thal der Doveria zu geniessen wähnt, dauert blos kurze Zeit; kaum sind wir über das Dorf Simpeln hinaus, so führt uns die Strasse durch die wilden Engpässe von Algaby und Gondo, und erst bei Isella erreichen wir die südalpine Thalstufe mit ihrer üppigen Vegetation.

Das Hospiz auf dem grossen St. Bernhard dagegen liegt noch inmitten der schaurig ernsten Natur, durch welche sich der Aufstieg von der Cantine de Proz den Pas de Marengo hinan auszeichnet. Das Gebäude selbst ist so eingezwängt zwischen dem Mont Mort und der Chenalettaz, dass es auch im höchsten Sommer blos auf wenige Stunden von der Sonne beschienen wird. Kaum hat man aber den kleinen See hinter sich, und folgt der Krümmung des Weges um den sogenannten Plan de Jupiter, einen früheren römischen Opferaltar, so öffnet sich plötzlich ganz frei die Aussicht auf das Thal des Buthier, das ohne Unterbrechung sich fortwährend erweitert, und dessen Vegetation von Stufe zu Stufe reicher und üppiger wird. Das Aostathal, in welches dasjenige des vom Grossen St. Bernhard herunterfliessenden Buthier einmündet, wird nach Süden von den Grajischen Alpen begrenzt, einer Gebirgskette, welche zwar lange nicht soviel von

den Touristen bereist wird, wie die der Walliser Alpen, ihnen jedoch an landschaftlichen Schönheiten wenig nachsteht. Vom Hauptmassiv jener Alpen münden 4 Seitenthäler in das Hauptthal der Dora Baltea: Val Grisanche, Val de Rhêmes, Val Savaranche und Val de Cogne, die 3 ersten ziemlich direkt von Süd nach Nord, das letztgenannte in einem Bogen von Südost nach Nordwest verlaufend. Das Hauptthal selbst wird im Westen vom Mont Blanc geschlossen, der sich hier mindestens eben so schön wie von Chamounix aus präsentiert. Die meisten Gipfel der Grajischen Alpen erreichen eine Höhe von über 3000 Meter, der Grand Paradis sogar 4045 Meter.

Obwohl Val Grisanche, Val de Rhêmes und Val Savaranche schon eine ziemlich reiche Flora darbieten, so werden sie doch hierin an Mannigfaltigkeit weit übertroffen vom Val de Cogne. Wie unsere Walliserthäler, ist dasselbe an seiner Einmündung in das Hauptthal ganz enge, und erst bei 1450 Meter, nach einem Marsch von 4 Stunden, gelangt man zu einer eigentlichen Thalsohle. Einen Beweis von der Fruchtbarkeit des Bodens an der Ausmündung des Thales in das der Dora Baltea liefert eine ausgedehnte Mandelbaumpflanzung, welche den Abhang bis zu einer Höhe von cirka 750 Meter bedeckt. Schon der untere enge Teil des Thales birgt, analog demjenigen der Visp, eine gewisse Zahl interessanter Pflanzen, welche zum Teil sich in ähnlichen Lagen des Wallis wiederfinden, zum Teil dem Cognethal eigentümlich angehören. Zu den ersteren gehören: Echinospermum deflexum Lehm, in der Schweiz bei Bergün, bei St. Niklaus, bei Adelboden und ob Lauterbrunnen gefunden; Anchusa italica L., sonst in Tessin und im Veltlin häufig; Centaurea valesiaca Jord. und Koeleria valesiaca Gaud., beide im Wallis nicht selten. Zu den letzteren sind zu rechnen Nepeta lanceolata Lam., eine sonst dem Süden Frankreichs angehörende Pflanze; Sisymbrium strictissimum L., aus dem Osten bis dorthin reichend; Astragalus alopecuroides L., welches dort sein Vegetationscentrum hat und nach Osten gar nicht, nach Westen bloss bis Embrun (Hautes Alpes) sich ausbreitet. Ein sehr interessantes Factum ist das Hinaufsteigen von Unkräutern; so reichen Phelipaea arenaria Walp. und Lamium amplexicaule L. bis zu 800 Meter, Veronica verna L. sogar bis zu 1600 Meter. Da das Cognethal, wie alle übrigen diesem Gebiete angehörenden, wegen der an die Bergriesen sich anlehnenden Gletscher sehr wasserreich ist, so fehlen ihm auch alle Pflanzen der trockenen Hänge, welche dem Wallis ein so eigentümliches Ge-

präge verleihen. Wenn wir von Cogne, dem letzten Pfarrdorfe des Thales, höher hinauf dem Laufe der sogenannten Grand' Eyvia entlang emporsteigen, so gelangen wir zu einer der schönsten und üppigsten Alpweiden, Alpe Chavanis, welche jedenfalls von wenigen in der Schweiz übertroffen wird. Der dort herrschende Reichtum an Pflanzen setzt sich bis zum obersten Teile des Thales, der Passhöhe des Col de Cogne fort; wir dürfen wohl behaupten, dass weder Zermatt noch das Engadin eine solche Fülle von Alpenpflanzen auf einem so beschränkten Gebiete aufweisen. Die selteneren unter ihnen (die über die ganze Alpenkette ausgebreiteten lasse ich ausser Acht) lassen sich in 3 Gruppen rubrizieren: 1) solche, welche ausschliesslich im Cognethal ihren Standort haben; 2) solche, welche von Osten oder Westen dorthin eingewandert sind; 3) solche, welche dort ihr Vegetationscentrum haben, von dem aus sie nach Westen, nach Osten oder über den Kamm der Walliser Alpen nach Norden ausstrahlen.

Zur ersten Gruppe gehören:

Aethionema Thomasianum Gay; Oxytropis Huteri Rchb. fil.;
Potentilla sanguisorbaefolia Wolf; Hieracium farinulentum Jord;
Hieracium tomentosum — villosum = eriophyllum Schleich.
Hieracium tomentosum — barbatum = pogonites Schleich.

Zur zweiten Gruppe gehören:

Sesleria pedemontana Reuter, aus den Cottischen Alpen eingewandert.
Alsine mucronata L., aus der Dauphiné. „
Anthyllis Dillenii Schult., aus Südostfrankreich. „
Sempervivum Gaudini Christ., aus den Südabhängen der Zermatteralpen „
Astragalus Onobrychis L. und monspessulames L., aus Südostfrankreich „
Armeria plantaginea Willd., aus Südostfrankreich „
Primula pedemontana Thom., aus den Thälern südlich vom Monte Rosa „
Pedicularis cenisia Gaud., aus der Dauphiné „
Asperula flaccida Ten., aus dem östlichen Piemont „
Knautia tiroliensis Grml., aus der Lombardei „
Artemisia chamaemelifolia Vill., aus den Cottischen Alpen „
Hieracium pedemontanum Burnat, aus den Cottischen Alpen „

Zur dritten Gruppe gehören:

Trisetum argenteum R. u. S., ins Wallis und in die Dauphiné ausstrahlend.

Cerastium suffruticosum L., in die Dauphiné	ausstrahlend.
Silene alpina Thom., in die Dauphiné	„
Silene vallesia L., ins Wallis und in die Dauphiné	„
Saponaria lutea L., in die Dauphiné	„
Saxifraga retusa Gouan, in die Thäler südlich von Monte Rosa und in die Dauphiné	„
Astragalus aristatus L'Hérit., in das Wallis und in die Dauphiné	„
Pedicularis caespitosa Sieber, in sämtliche südöstliche Ketten nach Osten und Westen	„
Pedicularis rosea Wulf., in die Dauphiné, und in die Ostalpen bis ins Tirol	„
Pedicularis fasciculata Bellard., in die Dauphiné, in das Tessin und bis ins Tirol	„
Campanula Allionii Vill., in die Dauphiné	„
Achillea Herba Rota L., in die Dauphiné und östlich bis zum Gardasee	„
Artemisia glacialis L., in die Dauphiné, in die Walliseralpen und ins Engadin	„
Artemisia campestris L. var. alpina, in die Dauphiné, und bis nach Zermatt und Zwischbergen	„
Artemisia Allionii Gaud., nach Zermatt, Saas u. Zwischbergen	„
Centaurea axillaris Willd., in die Dauphiné und in die Walliser Alpen	„

Wir ersehen aus dieser Übersicht, dass ein grosser Teil unserer seltenen Pflanzen, die an einigen beschränkten Standorten und daselbst meist sehr sparsam vorkommen, aus den Grajischen Alpen, wo sie in sehr grossen Mengen auftreten, wahrscheinlich über einzelne Walliser Pässe herübergewandert sind. Einige Arten können als vikariierende angesprochen werden: so ersetzt Oxytropis Huteri Rchb. fil. die verwandte O. Gaudini Reuter, Hieracium farinulentum Jord. das H. pictum Schleich., Saxifraga retusa Gouan die S. oppositifolia L., Centaurea axillaris Willd. die C. montana L., Primula pedemontana Thom. die P. villosa Jacq., Aethionema Thomasianum Gay unser Aeth. saxatile R. Br., Cerastium suffruticosum L. das C. strictum Koch, Trisetum argentum R. und S. das T. distichophyllum Vill., Achillea Herba Rota L. die A. atrata L., Campanula Allionii Vill. die bei uns so häufige C. barbata L.

Haben wir endlich nach einem steilen Aufstiege die Passhöhe des Col de Cogne, 2847 m. erreicht, so öffnet sich zu unseren Füssen, am Ostabhange der Hauptkette der Grajischen Alpen, zwischen dem Monte Rosa dei Banchi und der Punta Tersiva, ein neues, von Westen nach Osten verlaufendes Thal, das Val di Camporciero, von der Ayasse durchflossen, welche beim historisch denkwürdigen Fort Bard in die Dora Baltea sich ergiesst. Dasselbe zeichnet sich vor den zwischen Courmayeur und Aosta in das Hauptthal einmündenden, anfangs erwähnten 4 Seitenthälern dadurch aus, dass es in seiner oberen Hälfte ausserordentlich steil abfällt (auf eine Länge von 10 km um 1400 m), und auf dieser Strecke gar keine Sohle besitzt. Erst in der untern Hälfte (Senkung 1000 m auf 10 km) haben wir eine flache Thalsohle, welche von Stufe zu Stufe breiter wird, und bei der Einmündung in das Hauptthal sehr breit ausläuft. In floristischer Beziehung zeichnet sich dieses Thal durch seine ausserordentliche Armut aus; ganz zu oberst, an der Schneegrenze, treffen wir auf dem nämlichen Fleck Erde zwei Pflänzchen, die wohl nirgends sonst auf dem ganzen Erdboden zusammen vorkommen, nämlich Phyteuma pauciflorum L., bei uns bloss um Zermatt und im Ober-Engadin, und Petrocallis pyrenaica R. Br., bei uns auf den höchsten Kalkalpen vorkommend. Auf welchem Wege diese zwei Einsiedler dorthin gelangt sein mögen, ist schwer zu sagen, da sie beide in den Alpen von Cogne sonst nirgends zu finden sind. Erst von einer Höhe von 1400 m an bis hinunter zur Einmündung in das Hauptthal finden wir einige interessante Spezies wieder, die uns aus dem Wallis bekannt sind, z. B. Bromus tectorum L., Ononis Natrix L. und Campanula spicata L. Aeusserst merkwürdig ist der Unterschied in der Bewaldung der beiden Thäler. Sowie wir den Kamm der Walliser Alpen überschritten haben, vermissen wir zwei Bäume, welche bei uns die schönste Zierde unserer Berge bilden, und auf welche wir mit vollem Rechte so stolz sind: den Bergahorn und die Arve. Auf dem Südabhange des Grossen St. Bernhard begegnet uns zuerst die Lärche, von 1800 m bis 1000 m prachtvolle Bestände bildend, dann die Erle und die Buche, untermischt mit Obstbaumanlagen, und von 800 m an herrscht bis nach Aosta hinunter die Rebe vor. Beim Einbiegen in das Val de Cogne, nachdem wir über die erwähnte Mandelbaumpflanzung hinaus sind, treffen wir ein buntes Gemisch von halbverwilderten Obstbäumen (Pfirsich-, Pflaumen-, Apfel-, Birn- und Kirsch-

bäume) mit Erlen, Buchen und auffallend hochstämmigen Hippophaë-Sträuchern. Bei 1400 m gewinnt allmählich die Lärche wieder die Oberhand, und steigt, stellenweise wunderschöne Bestände bildend, bis gegen 1800 m hinan. Im Thal von Champorcher dagegen treffen wir bei 1800 m wohl wieder einige Lärchen, aber von 1600 m an wird die Föhre vorherrschend, und von 1400 m an tritt ein Baum auf, der aus allen Felsspalten herauswächst und durch die Mächtigkeit seiner Bestände dem Wanderer einen herrlichen Schutz gegen die tropische Hitze gewährt, die zahme Kastanie. Während voller 3 Stunden wandeln wir unter dem Schatten ihrer Kronen, umschwirrt von zahllosen Cicaden, bis wir das aus terrassenförmig übereinander liegenden Wällen bestehende Fort Bard erreichen. Es ist eigentlich jammerschade, die Strecke von diesem Fort das Thal der Dora Baltea aufwärts bis nach Châtillon per Bahn zurückzulegen; auf ihrer ganzen Länge von circa 30 km besteht sie aus lauter Engpässen, ähnlich unserm Dazio grande. Im Mai, wenn alle Känge in frischem Grün prangen und die Sonne noch nicht brennt, gäbe sie Gelegenheit zu einer mühelosen und prachtvoll romantischen Fusswanderung.

Das Val Tournanche, welches bei Châtillon sich öffnet und zum Theodul hinaufführt, bietet wie das Val di Camporciero bis zur Höhe von 1400 m prachtvolle Kastanienwälder, auf welche bis zu 1600 m Obstbaumanlagen, namentlich schöne Kirschbäume folgen. Auch hier, wie in den Grajischen Alpen, beherrscht die Lärche die oberste Stufe. Dieses an seltenen Pflanzen ziemlich arme Thal birgt 2 interessante Spezies: Alyssum alpestre L., dessen Vegetationscentrum auf beiden Seiten des Massivs der Zermatter-Alpen liegt, und das durch seine grossen gelben Blüten schon von weitem kenntliche Sempervivum Gaudini Christ., welches den Kamm der Walliser Alpen nirgends überschreitet und deshalb innert unserer Grenzen bloss im Zwischbergenthale vorkommt. In der Nähe der Schneegrenze treffen wir dann Saxifrag biflora All., Hieracium piliferum Hoppe, Campanula cenisia L., Epilobium nutans Tausch., nebst den den höchsten Kämmen der Alpen sonst noch eigentümlich angehörenden Zwergpflänzchen.

Das Thal von Zermatt, welches seit der Eröffnung der Bahn von einer von Jahr zu Jahr lawinenartig wachsenden Menge von Touristen besucht wird, sieht seinen Reichtum an seltenen Pflanzen rasch schwinden und dürfte seinen Ruhm, die reichste botanische Fundstätte Europas zu bieten, in kurzer Zeit einbüssen; ich möchte

wünschen, dass das Cognethal, welches jenem an Reichtum wenig nachsteht, noch Jahrzehnte lang sein jetziges Incognito bewahren könnte, damit die dort wachsende Fülle an botanischen Seltenheiten sich recht lange forterhielte.

Inhalts-Verzeichnis.

	Seite der Sitzungsberichte	Seite der Abhandlungen
Jahresbericht	III	
Jahresrechnung pro 1898	XIV	
Mitgliederverzeichnis	IX	
Asher L., Dr., Privatdozent,		
Über die Quelle der Muskelkraft	V	
Baltzer A., Prof. Dr.,		
Geologische Mitteilungen	VI	
Vorweisung zweier Reliefs mit bos primigenius	VI	
Über neuere Eruptionen des Aetna	VIII	
Vorweisung von geologischen Photographien	VIII	
Beiträge zur Kenntnis schweizerischer diluvialer Gletschergebiete (mit einem Lichtdrucke)		54
Benteli A., Rektor und Docent,		
Die Niveauschwankungen der 13 grössern Schweizerseen im Zeitraum der 31 Jahre, 1867 bis und mit 1897, mit besonderer Berücksichtigung der Jura-Seen vor und nach der Jura-Gewässer-Korrektion (mit 2 Tafeln)	VII	33
Dutoit, Dr. med.,		
Über den Vegetationscharakter der Grajischen Alpen		110
v. *Fellenberg E.*, Dr. phil.,		
Über den sogenannten fossilen Baumstamm	V	
Fischer E., Prof. Dr.,		
Über Prothallien von Lycopodium	VI	
Über fossile Cycadeen	VI	
Göldi E., Dr. phil.,		
Über die Fischfauna des Amazonenstromes	V	
Über Schmetterlingszüge im Amazonengebiete	VI	
Über die Fischfauna des Amazonengebietes	VII	
Graf J. H., Prof. Dr.,		
Praktische Integration von L. Schläfli		83
Gruner P., Dr., Privatdocent,		
Über Beugungserscheinungen	V	
Huber R., Dr. phil., Gymnasiallehrer,		
Das Wesen der Telegraphie ohne Draht	VII	
Kaufmann R., Dr. phil. und Gymnasiallehrer,		
Demonstration von Tænia	VII	
Zur Systematik der Cypriden		103
v. *Kostanecki St.*, Prof. Dr.,		
Vorweisung von galizischem Erdwachs	VI	

	Seite der Sitzungsberichte	Seite der Abhandlungen
Kronecker H., Prof. Dr., Messung von Flüssigkeits-Druckschwankungen . .	VIII	
Moser Ch., Dr. und Docent, Über eine mit der Umlaufszeit der Planeten zusammenhängende Funktion		1
Schaffer F., Dr. phil., Kantonschemiker und Docent, Über Butteruntersuchungen	VI	
Schücking, Dr., aus Pyrmont, Über die belebende Wirkung des Natrium-Saccharates auf das Herz	V	
Sidler Georg, Prof. Dr., Über eine algebraische Reihe		13
Studer Th., Prof. Dr., Über ein neues Beuteltier	VI	
Über Säugethierreste aus dem Wadi Natron in Unter-Aegypten	VI	
Vorweisung eines rekonstruierten Pfahlbau-Frauenkopfes	VI	
Vorweisung eines Abgusses von Archäopterix . .	V	
Vorweisung eines Schädels	VIII	
Tschirch A., Prof. Dr., Vorweisung eines „idealen Bildes einer Kohlenlandschaft"	VIII	
Über natürliche Auswahl von Arzneimitteln ähnlicher Wirkungskreise	VIII	3
Volz Walther, Die Verbreitung einiger Turbellarien in den Bächen der Umgebung von Aarberg (mit einer Karte) .		66

Verlag von K. J. WYSS in Bern.

(Fortsetzung von Seite 2 des Umschlags.)

Fascikel IV6: *Fauna helvetica.* Heft 5: Reptilien und Amphibien. Zusammengestellt von Dr. H. Fischer. 39 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

Fascikel IV6: *Fauna helvetica.* Heft 6: Mollusken. Zusammengestellt von Prof. Dr. Th. Studer, Dr. G. Amstein und Dr. A. Brot. Preis 60 Cts.

Fascikel IV6: *Fauna helvetica.* Heft 9: Crustacea. Von Dr. J. Heuscher etc. 35 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

Fascikel V4: *Heraldik und Genealogie.* Bearbeitet von Jean Grellet und Maurice Tripet. Bern 1895. 68 Seiten 8°. Preis Fr. 1.50.

Fascikel V6 a–c: *Architektur, Plastik, Malerei.* Zusammengestellt von Dr. B. Haendcke. Bern 1892. 100 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel V6e: *Leibesübungen.* Turnen, Fechten, Reiten, Wassersport etc. Zusammengestellt von Alois Landtwing. 165 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel V9ab: *Landwirthschaft.* Zusammengestellt v. Prof. F. Anderegg u. Dr. E. Anderegg. Bern 1893. Heft 1—3. 258 S. 8° à Fr. 3.—
id. „ 4 „ —.60
id. „ 5 und 6 „ 2.—

Fascikel V9c: *Forstwesen, Jagd und Fischerei.* Forstwesen. Zusammengestellt durch das eidgen. Oberforstinspektorat. Bern 1894, 160 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel V9c: *Forstwesen, Jagd und Fischerei.* Jagd. Zusammengestellt durch das eidgen. Oberforstinspektorat. 77 Seiten 8°. Preis Fr. 1.50

Fascikel V9c: *Forstwesen, Jagd und Fischerei.* Fischerei. Zusammengestellt durch das eidgen. Oberforstinspektorat. Bern 1898, 65 Seiten 8°. Preis Fr. 1.50

Fascikel V9d: *Schutzbauten.* Zusammengestellt durch das eidgen. Oberforstinspektorat. Bern 1895. 136 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel V9gβ: *Mass und Gewicht.* Bearbeitet von F. Ris, Direktor der eidgen. Eichstätte. Bern 1894. 36 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

Fascikel V9gγ: *Post- und Telegraphenwesen.*
Postwesen. Zusammengestellt von der Schweizer. Oberpost-Direktion.
Telegraphenwesen. Zusammengestellt von E. Abrezol, Inspektor der Central-Telegraphenverwaltung. Bern 1895. 113 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel V9gε: *Bankwesen, Handelsstatistik, Versicherungswesen.* Zusammengestellt von W. Speiser, Basel, Dr. Geering und Dr. J. J. Kummer. Bern 1893. 207 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel V9j: *Alkohol und Alkoholismus.* Zusammengestellt von Otto Lauterburg, Pfarrer in Neuenegg, E. W. Milliet, Direktor der eidgen. Alkoholverwaltung, und Antony Rochat, Pfarrer in Satigny. Bern 1895. 183 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel V10eγ: *Die christkatholische Litteratur der Schweiz.* Zusammengestellt v. Dr. F. Lauchert. Bern 1893. 32 Seiten 8°. 60 Cts.

Fascikel V10eα; *Bibliographie der evangelisch-reformirten Kirche in der Schweiz.* Heft 1: Die deutschen Kantone. Zusammengestellt von Dr. G. Finsler. Preis Fr. 2.—

Fascikel V10e: *Die katholisch-theologische und kirchliche Litteratur des Bisthums Basel* vom Jahre 1750 bis zum Jahre 1893. Zusammengestellt von Pfr. Ludwig R. Schmidlin in Biberist.
Heft 1 und 2 à Fr. 3.—

Verlag von K. J. WYSS in Bern.

Graf, J. H., Prof., Dr. *Einleitung in die Theorie der Gam funktion und der Euler'schen Integrale.* Fr. 2.
— — *Geschichte der Mathematik und der Naturwissenscha in bernischen Landen* vom Wiederaufblühen der Wis schaften bis in die neuere Zeit. Heft 1—3. Fr. 7.
— — *Leben und Wirken des Physikers und Geodäten Jac Barthélmy Micheli du Crest* aus Genf, Staatsgefang des alten Bern 1746—1766. Mit Porträt Miche einer Ansicht seines Gefängnisses in Aarburg Facsimile seines Panorama der Alpen Fr. 3.
— — *Das Leben und Wirken des Physikers und Astrono Joh. Jac. Huber* aus Basel, 1733—1798. Mit Bildnisse Huber's und einer Tafel, seine freie Uhr hemmung darstellend . . . . . Fr. 1. —
— — *Professor Dr. Rudolf Wolf, 1816—1893* . 1. —
— — *Professor Ludwig Schläfli, 1814—1895* . . 1. 20
— — *Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schläfli* . . . . . Fr. 3. —
— — *Die Exhumirung Jakob Steiner's* und Einweihung des Grabdenkmals Ludwig Schläfli's anlässlich des 100. Geburtstages Steiner's. Mit 2 Lichtdrucken Fr. 1. —
— — *Der Mathematiker Jakob Steiner von Utzenstorf.* Ein Lebensbild und zugleich eine Würdigung seiner Leistungen . . . . . Fr. 1. 50
Graf J. H., Prof. Dr. und **Gubler Ed., Dr.** *Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Funktionen.* 2 Hefte: Die Bessel'schen Funktionen erster und zweiter Art . . . . . à Fr. 4. —
Huber, G., Prof. Dr. *Sternschnuppen, Feuerkugeln, Meteorite und Meteorschwärme* . . . . Fr. 1. —
— — *Forschungen auf dem Gebiete der Spektralanalyse* —. 80
— — *Die kleinen Planeten des Asteroidenringes* . —. 60
Kissling, Dr., E. *Die versteinerten Tier- und Pflanzenreste in der Umgebung von Bern.* Exkursionsbüchlein für Studierende . . . . . Fr. 4. —
Baumberger, E. *Ueber die geologischen Verhältnisse am linken Ufer des Bielersees* . . . . Fr. 2. —
Baltzer, A., Prof. *Vom Rande der Wüste.* Populärer Vortrag, gehalten im November 1894 in der Bern. Naturforsch. Gesellschaft. Mit drei Lichtdrucktafeln. . Fr. 1. 50
Fischer, Prof., L., *Zweiter Nachtrag z. Verzeichniss der Gefässpflanzen des Berner-Oberlandes, mit Berücksichtigung der Standortsverhältnisse, der horizontalen und vertikalen Verbreitung* . . . . Fr. —. 25

Durch jede Buchhandlung zu beziehen.

OCT 17 1901

123

Mitteilungen

der

rforschenden Gesellschaft

in Bern

aus dem Jahre 1900.

Nr. 1478-1499.

Redaktion: J. H. GRAF.

BERN
Druck und Verlag von K. J. Wyss
1901

Verlag von K. J. WYSS in Bern.

BIBLIOGRAPHIE
der
Schweizerischen Landeskunde.

Unter Mitwirkung
der
hohen Bundesbehörden, eidgen. und kant. Amtsstellen
und zahlreicher Gelehrter
herausgegeben von der
Centralkommission für schweizerische Landeskunde.

In deutscher und französischer Ausgabe.

Bis jetzt erschienen:

Fascikel Ia: *Bibliographische Vorarbeiten der landeskundlichen Litteratur und Kataloge der Bibliotheken der Schweiz.* Zusammengestellt von Prof. Dr. J. H. Graf. Bern 1894. 69 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

Fascikel I b, enthaltend: *Bibliographie der Gesellschaftsschriften, Zeitungen und Kalender der Schweiz,* von Prof. J. L. Brandstetter in Luzern. 380 Seiten. Preis Fr. 3.—

Fascikel II a: *Landesvermessung und Karten der Schweiz, ihrer Landstriche und Kantone.* Herausgegeben vom eidgen. topographischen Bureau. Redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf. Bern 1892. 193 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel II b: *Karten kleinerer Gebiete der Schweiz.* Herausgegeben vom eidg. topograph. Bureau. Redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf, Bern 1892. 164 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel II c: *Stadt- und Ortschaftspläne, Reliefs und Panoramen der Schweiz.* Herausgegeben vom eidg. topograph. Bureau. Redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf. Bern 1893. 173 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel II d, enthaltend: *Generalregister, Ergänzungen und Nachträge zu den Fascikeln II a—c* (Landesvermessung, Kataloge der Kartensammlungen. Karten, Reliefs und Panoramen). Im Auftrage des eidgen. topograph. Büreaus redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf. 220 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel III: *Landes- und Reisebeschreibungen.* Ein Beitrag zur Bibliographie der schweizer. Reiselitteratur, 1479—1890. Zusammengestellt von A. Wäber, Bern. 462 Seiten 8°. Preis Fr. 4.—

Fascikel IV 3: *Balneologie und Climatotherapie.* Versuch einer schweiz. Bibliographie der Litteratur auf den Gebieten des Badewesens, der Heilquellen, der climaterischen Kurorte u. s. w. Von B. Reber in Genf. 130 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel IV 6: *Die Fauna der italienischen Schweiz.* Redigirt von Prof. Dr. A. Lenticchia. Como 1894. 19 Seiten 8°. Preis 50 Cts.

Fascikel IV 6: *Fauna helvetica:* Heft 2: Seenfauna. Zusammengestellt von Prof. D. F. Zschokke. Bern 1897. 30 Seiten. 60 Cts.

Fascikel IV6: *Fauna helvetica.* Heft 3: Säugethiere. Zusammengestellt von Dr. H. Fischer-Sigwart. Bern 1900. 119 Seiten. Fr. 2.—

Fascikel IV 6: *Fauna helvetica.* Heft 4: Vögel. Zusammengestellt von Prof. Dr. Theophil Studer. Bern 1895. 57 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

(Fortsetzung auf Seite 3 des Umschlags.)

Mitteilungen

der

Naturforschenden Gesellschaft

in Bern

aus dem Jahre 1900.

Nr. 1478-1499.

Redaktion: J. H. GRAF.

BERN
Druck und Verlag von K. J. Wyss
1901

OCT 1901

Jahresbericht

über die

Thätigkeit der bernischen Naturforschenden Gesellschaft

in der Zeit vom 1. Mai 1899 bis 11. Mai 1900.

Hochgeehrte Herren!

Im abgelaufenen Vereinsjahr hielt unsere Gesellschaft die normale Zahl von 12 Sitzungen ab, 6 davon im Saale des Hotels Storchen, 3 im geologischen Institut, je eine im physiologischen und zoologischen Institut und eine in Thun. An diesen Sitzungen beteiligten sich mit Vorträgen, kleineren Mitteilungen oder Demonstrationen die folgenden 16 Herren:

Herr	Baltzer	2 Vorträge, 2 Demonstrationen;
»	Benteli	1 Vortrag;
»	Brückner	1 »
»	Dutoit	1 »
»	Göldi	2 Vorträge;
»	Gruner	1 Demonstration;
»	Jenner	2 Demonstrationen;
»	Heffter	1 Vortrag;
»	R. Huber	1 »
»	Kaufmann	1 Demonstration;
»	Kissling	1 Vortrag;
»	Kostanecki	1 Demonstration;
»	Kronecker	1 Vortrag;
»	Steck	2 Demonstrationen;
»	Studer	2 Vorträge, 3 Demonstrationen;
»	Tschirch	1 Vortrag, 1 Demonstration.

Von diesen Mitteilungen entfallen auf Zoologie 12, auf Mineralogie, Geologie 5, Botanik 3, Physik, Astronomie 3, Chemie 2, Geographie 2, Physiologie 1.

Eine auswärtige Sitzung wurde am 25. Juni unter zahlreicher Beteiligung im Saale des Hotels «Freier Hof» in Thun abgehalten. Herr Dr. Ris daselbst hatte in dankenswerter Weise die Vorbereitungen übernommen. In der Sitzung sprach Herr Benteli: «Über die Niveauschwankungen der schweizerischen Seen, mit besonderer Berücksichtigung

der Jura-Seen», und Herr R. Huber: «Über das Wesen der Telegraphie ohne Draht.» Nachmittags erfolgte die gemeinsame Besichtigung der kantonalen Gewerbe- und Industrie-Ausstellung in Thun.

Die Mitgliederzahl hat sich im Berichtsjahre nicht wesentlich geändert. Ausgetreten sind zwei Mitglieder, durch den Tod verloren wir zwei Mitglieder. Eingetreten sind 3 neue Mitglieder.

Für das Vereinsjahr 1900/1901 wurde zum Präsidenten gewählt Herr Prof. Dr. Ed. Brückner, zum Vizepräsidenten Herr Dr. E. Kissling.

Der Präsident:

v. Kostanecki.

Sitzungs-Berichte.

944. Sitzung vom 20. Januar 1900.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Hr. St. v. Kostanecki. Anwesend: 18 Mitglieder und Gäste.

Demonstrationsabend:

1. Hr. A. Baltzer demonstriert ein **geologisches Profil** durch die Schänzlimoräne.
2. Hr. A. Baltzer weist eine Reihe **Mineralien** vor.
3. Hr. Th. Steck legt die älteste und die neueste monographische Arbeit über **Hydrachniden** (Wassermilben) vor. Die erstere hat den bekannten Naturforscher Otto Friedrich Müller zum Verfasser und behandelt die Wassermilben Dänemarks in für damalige Verhältnisse (das Werk erschien im Jahre 1781) musterhafter Weise.

   Die neueste, soeben zum Abschluss gekommene Monographie von Dr. Rich. Piersig umfasst unter dem Titel: **Deutschlands Hydrachniden**, nicht nur die in Deutschland, sondern auch sämtliche bisher in der Schweiz aufgefundenen Arten. Zum ersten Male werden auch die Entwicklungsstadien, soweit dieselben bisher bekannt sind, bei der Beschreibung der Arten berücksichtigt. Das 500 Quartseiten starke und von 51 zum Teil colorierten Tafeln begleitete Werk wird noch lange zum Ausgangspunkte für alle weiteren systematischen und faunistischen Forschungen über diese Tiergruppe dienen müssen.
4. Hr. Th. Studer demonstriert eine Anzahl **älterer und neuerer Hundeschädel.**
5. Hr. P. Gruner legt eine Arbeit von Lowell über den **Planeten Merkur**, eine Abhandlung Villigers über die **Venus** und den **photographischen Atlas** von Scheiner vor.
6. Hr. St. v. Kostanecki demonstriert eine Anzahl gelber Farbstoffe, **Chrysin** und **Tecto-Chrysin**, die er künstlich darstellen konnte.

945. Sitzung vom 27. Januar 1900.

Abends 8 Uhr im geologischen Institut.

Vorsitzender: Hr. St. v. Kostanecki. Anwesend: 25 Mitglieder und Gäste.

1. Hr. A. Baltzer spricht über **«Altes und Neues von der Insel Rügen»**.
2. Hr. A. Baltzer spricht über **«Eiszeiten und Schreibkreide»**.
3. Hr. Th. Steck referiert über eine Arbeit von Hrn. Volz, betreffend **die Turbellarien in der Gegend von Aarberg.**

946. Sitzung vom 10. Februar 1900.

Abends 8 Uhr im zoologischen Institut.

Vorsitzender: Hr. St. v. Kostanecki. Anwesend: 20 Mitglieder und Gäste.

1. Hr. Th. Studer spricht über «**die Fauna der Hawaï-Inseln**».

947. Sitzung vom 24. Februar 1900.

Abends 8 Uhr im geologischen Institut.

Vorsitzender: Hr. St. v. Kostanecki. Anwesend: 32 Mitglieder und Gäste.

1. Hr. Ed. Brückner spricht über «**neuere Probleme der Gletscherforschung.**»

948. Sitzung vom 10. März 1900.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzeuder: Hr. St. v. Kostanecki. Anwesend: 24 Mitglieder und Gäste.

1. Hr. A. Heffter spricht über «**die Peyote, ein Berauschungsmittel der mexikanischen Indianer**».
2. Hr. A. v. Jenner macht eine Mitteilung über die «**Staare**».

949. Sitzung vom 28. April 1900.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Hr. St. v. Kostanecki. Anwesend: 22 Mitglieder und Gäste.

1. Für das Vereinsjahr 1900/1901 werden gewählt:
   Hr. Prof. Dr. Ed. Brückner zum Präsidenten,
   Hr. Dr. E. Kissling zum Vize-Präsidenten.
2. Hr. E. Kissling spricht über «**Bergbau und Molassekohlen in der westlichen Schweiz**».
3. Hr. E. Dutoit spricht über den «**Vegetationscharakter des Val de Cogne**».

950. Sitzung vom 12. Mai 1900.

Vorsitzender: Hr. Ed. Brückner. Anwesend: 20 Mitglieder und Gäste.

1. Der abtretende Präsident, Hr. Prof. v. Kostanecki, verliest den Jahresbericht pro 1899/1900.
2. Herr A. Guillebeau teilt mit, dass Hr. Karl Vaerst in seinem Laboratorium über die **Fleckniere der Kälber** folgendes festgestellt hat:

Die Fleckniere kommt in Bern bei 3,5% der gemästeten, etwa 6—8 Wochen alten Kälbern vor. In kurzer Zeit können daher eine grössere Zahl dieser Nieren gesammelt werden. Die Erscheinung besteht in dem Auftreten von kleinsten, bis nussgrossen, weissen Knoten in der Rindensubstanz der Niere. Es können nur wenige aber auch einige hundert Knoten vorhanden sein, ja die Flecken sind eventuell so zahlreich, dass das normale Gewebe nur in Form dünner Schichten die weissen Herde umsäumt. Letztere wölben sich entweder über die Umgebung vor, oder ihr freies Ende bildet eine kleine Vertiefung. Das Mark erscheint dem unbewaffneten Auge als unbeteiligt, mikroskopisch aber konstatiert man auch hier das Vorkommen dünner, weisser Streifen. Die Konsistenz der Knoten ist dieselbe wie diejenige des übrigen Nierengewebes. Die wenigen Schriftsteller, die sich mit diesen Flecken beschäftigt haben, bezeichnen den Zustand als multiple Sarkome, als pyämische Metastasen,

als fibroplastische Nephritis, alles Benennungen, die sehr wenig begründet sind.

Die Herde bestehen aus einer Grundsubstanz und aus eingelagerten Drüsenbestandteilen, letztere in bald geringerer, bald grösserer Zahl. Die Grundsubstanz ist ein rundzelliges Granulationsgewebe, das sich in älteren Herden zu Spindelzellengewebe differenziert und in dem die Bindegewebsfibrillen immer zahlreicher und in demselben Masse die Kerne seltener werden.

Sehr bemerkenswert sind die Drüsenbestandteile, die bald in kleinerer, bald in grösserer Zahl in den Knoten enthalten sind. Es können eventuell alle Abschnitte der Kanälchen angetroffen werden. Vielfach enden dieselben peripher mit einer spitzen, soliden Sprosse, die dem Gebiet der gewundenen Hornkanälchen angehört, etwas seltener demjenigen der Schleifenschenkel. Die Sprossen zeichnen sich durch grosse Breite aus. Sie bestehen aus einem Mantel randständiger, gut zu Epithelien differenzierter Zellen und aus einem centralen Cylinder kleiner, mehrkerniger Randzellen, die wie ein Keil die Sprossen vortreiben. Eine Membrana propria ist da oder fehlt. In der Nähe der Sprossen ist das Grundgewebe ebenfalls sehr zellenreich.

Die Glomeruli sind bald in gewöhnlicher Zahl vorhanden, bald selten oder ganz fehlend. Sie treten dem Beobachter entweder als Haufen von Granulationsgewebe entgegen, der durch einen Spalt von der Umgebung scharf abgegrenzt ist, oder die Gefässe sind deutlich sichtbar. Sobald das Harnkanälchen mit dem Glomerulus versehen ist, verschwindet sein zellenreicher Markcylinder, das Röhrchen, das noch gestreckt ist, wird vorübergehend eng und die Zellen werden noch nicht, wie in den fertig gebildeten Röhrchen, durch Pikrinsäure gelb gefärbt, sondern sie zeigen die Farbenreaktionen der Protoplasmas von Leukocythen. Der Übergang der embryonalen in die definitive Beschaffenheit vollzieht sich zuerst im Labyrinth. Die Markstrahlen sind länger durch den Gehalt an Blastem ausgezeichnet.

Da die Fleckniere mit keiner Störung der Gesundheit in Verbindung zu bringen ist und bei erwachsenen Rindern konstant fehlt, so darf man annehmen, dass im Verlaufe von wenig Wochen die Knoten spurlos in dem übrigen Nierengewebe aufgehen.

Auf Grund dieses Befundes nötigt sich der Schluss auf, dass die weissen Knoten der Fleckniere des Kalbes aus Nierenblastem bestehen, in dem eine fortgesetzte Anbildung von Drüsenelementen stattfindet. Dieses Blastem, das in der Regel nur dem frühen embryonalen Leben angehört, überdauert beim Kalbe das intrauterine Leben um einige Wochen. Es liegt somit hier ein leicht zugängliches, bis jetzt ganz unbeachtetes Material für das Studium der Entwicklung des Metanephros vor.

3. Hr. Ed. Brückner spricht über **«Imhofs Arbeit über die Waldgrenze in der Schweiz»**.

951. Sitzung vom 26. Mai 1900.

Vorsitzender: Hr. Ed. Brückner. Anwesend: 24 Mitglieder und Gäste.

1. Hr. Ed. Fischer referiert über **die neueren Untersuchungen betreffend die Befruchtung der Gymnospermen**, speziell die Entdeckung der Spermatozoiden bei Ginkgo und Cycas durch Hirasé und Ikeno.

2. Hr. Ed. Fischer weist Exemplare von **Morchella rimosipes DC.** vor, die von Herrn Lehrer Bangerter in der Nähe von Utzenstorf gesammelt worden waren, und erläutert die Unterschiede dieser Art gegenüber M. esculenta und M. conica.
3. Hr. P. Gruner macht eine Mitteilung über die bevorstehende **Sonnenfinsternis** und über einen eigenartigen, von ihm beobachteten **Sonnenring.** Am 23. Mai, 6½ Uhr morgens, sah der Referent auf einer schön ausgebildeten Cirruswolke, die nahe am Zenith stand, einen in den schönsten Regenbogenfarben erglänzenden Bogen, dessen Öffnung auf 10—20°, dessen Länge auf ⅙ eines ganzen Kreisumfanges, geschätzt wurde; das Centrum schien nicht weit vom Zenithe zu sein, doch etwas gegen Osten, also gegen die aufgehende Sonne hin verschoben. — Nach etwa 3 Minuten löste sich die Cirruswolke auf und mit ihr der Bogen. Der Himmel war nun fast wolkenlos, nur noch im Osten, nahe der Sonne, in etwa 20° Distanz rechts von derselben zeigten sich während einer Viertelstunde Spuren eines gewöhnlichen Sonnenringes (rot innen gegen die Sonne, violett aussen); nachher lösten sich auch diese Cirri auf. — Am selben Tage fand ein gründlicher Witterungswechsel statt.

952. Sitzung vom 24. Juni 1900.

In Spiez.

1. Hr. Ringwald, Betriebsleiter des Elektrizitätswerkes an der Kander spricht über **«elektrische Kraftgewinnung und Kraftübertragung».**
2. Hr. Ringwald leitet die Besichtigung der **elektrischen und hydraulischen Anlagen an der Kander.**

953. Sitzung vom 27. Oktober 1900.

Abends 8 Uhr im pharmaceutischen Institut.

Vorsitzender: Hr. Ed. Brückner. Anwesend: 28 Mitglieder und Gäste.

1. Hr. A. Tschirch spricht über **«die Entwicklung der Chinologie im 19. Jahrhundert».**

954. Sitzung vom 10. November 1900.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Hr. Ed. Brückner. Anwesend: 60 Mitglieder und Gäste.

1. Hr. C. Marti, Sekundarlehrer in Nidau, spricht über **«die Gesetze des Wetters».**

955. Sitzung vom 24. November 1900.

Abends 8 Uhr im geologischen Institut.

Vorsitzender: Hr. Ed. Brückner. Anwesend: 26 Mitglieder und Gäste.

Demonstrationsabend:

1. Hr. Ed. Fischer weist der Gesellschaft die Bearbeitung der **Pilze** aus dem grossen von Engler und Prantl in Verbindung mit zahlreichen Mitarbeitern herausgegebenen Sammelwerke «die natürlichen Pflanzenfamilien» vor und knüpft daran einige Bemerkungen über den Plan dieses Werkes und seine Bedeutung für die Pflanzensystematik.

Derselbe legt ferner das zweite Heft der von der Kommission für die Kryptogamenflora der Schweiz herausgegebenen Beiträge zur Kryptogamenflora der Schweiz vor. Es enthält dasselbe die Bearbeitung der schweizerischen Farne und Hydropteriden von Dr. H. Christ.

2. Hr. Th. Steck berichtet über seine in Begleitung des Hrn. Paul Born-Moser aus Herzogenbuchsee und auf Kosten des Hrn. Georg Meyer-Darcis in Wohlen (Aargau) im Juli 1900 ausgeführte **entomologische Sammelreise in die grajischen Alpen** und legt einen grossen Teil der bei diesem Anlasse gemachten Ausbeute an Käfern vor.
3. Hr. A. Baltzer führt verschiedene Serien von **Projektionsbildern** vor.

956. Sitzung vom 8. Dezember 1900.

Abends 8 Uhr im zoologischen Institut.

Vorsitzender. Hr. E. Kissling. Anwesend: 22 Mitglieder und Gäste.

1. Hr. J. Schapiro spricht über **«Fortschritt und Rückschritt in biologischer Bedeutung»**.
2. Hr. Th. Studer weist eine Anzahl **neuer Präparate** vor.

Verzeichnis der Mitglieder

der

Bernischen Naturforschenden Gesellschaft.

(Am 31. Dezember 1900.)

Die mit * bezeichneten Mitglieder wurden im Jahre 1900 neu aufgenommen.

Vorstand.

Prof. Dr. *Ed. Brückner,* Präsident.
Dr. *E. Kissling,* Vice-Präsident.
B. Studer, jun., Apotheker, Kassier seit 1875.
Prof. Dr. *J. H. Graf,* Redaktor der Mitteilungen seit 1883.
Dr. *Th. Steck,* Oberbibliothekar und Geschäftsführer des Lesezirkels.
Dr. *P. Gruner,* Sekretär seit 1898.

Mitglieder.

1.	*Allemann,* J., Arzt, Zweisimmen	1898
2.	*Anderegg,* Ernst, Dr. phil. und Gymnasiallehrer, Bern	1891
3.	*Andreae,* Philipp, Apotheker, Bern	1883
4.	*Badertscher,* Dr. A., Sekundarlehrer, Bern	1888
5.	*Balmer,* Dr. Hans, Bern	1886
6.	*Baltzer,* Dr. A., Professor der Mineralogie und Geologie, Bern	1884
7.	*Beck,* Dr. Gottl., Lehrer des Freien Gymnasiums, Bern	1876
8.	*v. Benoit,* Dr. jur. G., Bern	1872
9.	*Benteli,* A., Rektor und Dozent, Bern	1869
10.	*Benteli,* A., Buchdrucker, Bern	1891
11.	*Berdez,* H., Professor an der Thierarzneischule, Bern	1879
12.	*Brückner,* Dr. Ed., Prof. der Geographie, Bern	1888
13.	*Brunner,* C., Dr. phil., Hofrath, Trautsohngasse 6, Wien	1846
14.	*Büchi,* Fr., Optiker, Bern	1874
15.	*Burri,* Dr. phil., Prosektor	1895
16.	*v. Büren,* Eug., allié von Salis, Sachwalter, Bern	1877
17.	*Coaz,* Dr., eidgenössischer Oberforstinspektor, Bern	1875
18.	*Conrad,* Dr. Fr., Arzt in Bern	1872
19.	*Dick,* Dr. Rud., Arzt in Bern	1876
20.	*Droz,* Arnold, Kantonsschullehrer in Pruntrut	1890

21. *Dubois,* Dr. med., Arzt, Privatdocent, Bern . . . 1884
22. *Dumont,* Dr. med. F., Arzt, Privatdocent, Bern . . 1890
23. *Dutoit,* Dr. med., Arzt in Bern 1867
24. *Egues,* Jules, Dr. med., Corgémont 1898
25. *Engelmann,* Dr., Apotheker in Basel 1874
26. *Farner,* Dr. A., Apotheker 1899
27. *v. Fellenberg,* Dr. phil. E., Bergingenieur, Bern . . 1861
28. *Fischer,* Dr. phil. Ed., Professor der Botanik, Bern . 1885
29. *Fischer,* Dr. L., Honorar-Professor, Bern . . . 1852
30. *v. Freudenreich,* Dr. E., Bern 1885
31. *Friedheim,* Dr. Prof., Bern 1897
32. *Geering,* Ernst, Dr. med., Reconvillier 1898
33. *de Giacomi,* J., Dr. med., Arzt und Privatdocent, Bern . 1889
34. *Girard,* Prof. Dr. med., Arzt in Bern 1876
35. *Gosset,* Philipp, Ingenieur, Wabern bei Bern . . . 1865
36. *Graf,* Dr. J. H., Professor der Mathematik, Bern . . 1874
37. *Gressly,* Alb., Oberst, Maschinen-Ingenieur, Bern . . 1872
38. *Grimm,* J., Präparator, Bern 1876
39. *Gruner,* Dr. Paul, Gymnasiallehrer und Docent, Bern . 1892
40. *Guillebeau,* Professor Dr., Bern 1878
41. *Haaf,* C., Droguist, Bern 1857
42. *Haas,* Dr. med., Sigismund, Arzt in Muri bei Bern . . 1890
43. **Häni,* Rud., Dr. med., Arzt in Köniz. 1900
44. *Hartmann,* Dr. phil., Mathemat. a. Eisenbahndepartement, Bern 1898
45. *Heffter,* Dr. A. W. A., Prof. der med. Chemie u. Pharmakologie 1899
46. *Held,* Leon, Chef des eidgen. topograph. Bureaus, Bern . 1879
47. *Huber,* Dr. G., Professor der Mathematik, Bern . . 1888
48. *Huber,* Rud., Dr. phil., Gymnasiallehrer, Bern . . . 1891
49. *Hug,* Otto, Dr. phil., Bern 1897
50. **Hugi,* E., Dr. phil., Assistent am geolog. Institut, Bern . 1900
51. *Jadassohn,* Dr. Prof., Bern 1897
52. *Jenner,* E., Entomolog, hist. Museum, Bern . . . 1870
53. *Jonquière,* Dr. med. Georg, Arzt in Bern 1884
54. *Käch,* P., Sekundarlehrer in Bern 1880
55. *Kaufmann,* Alfr., Dr. phil. und Gymnasiallehrer, Bern . 1886
56. *Kesselring,* H., Lehrer an der Sekundarschule in Bern . 1870
57. *Kissling,* Dr. E., Sekundarlehrer und Privatdocent. Bern . 1888
58. *Kobi,* Dr., Rektor der Kantonsschule Pruntrut . . . 1878
59. *Kocher,* Dr., Professor der Chirurgie, Bern . . . 1872
60. *Koller,* G., Ingenieur, Bern 1872
61. *von Kostanecki,* Dr., Professor der Chemie, Bern . . 1896
62. *König,* Emil, Dr. phil., Gymnasiallehrer, Bern . . . 1893
63. *Körber,* H., Buchhändler in Bern 1872
64. *Kraft,* Alex., Besitzer des Bernerhofs, Bern . . . 1872
65. *Krebs,* A., Seminarlehrer in Bern 1888
66. *Kronecker,* Dr. H., Professor der Physiologie, Bern . . 1884
67. *Kummer,* Dr. med. J., Arzt in Bern 1890
68. *Kürsteiner,* Dr. med., Bern 1895
69. *La Nicca,* Dr. med. R., Arzt in Bern 1899
70. *Lanz,* Dr. Em., Arztin Biel 1876
71. *Leist,* Dr. K., Lehrer an der Sekundarschule in Bern . 1888

72. *Lerch,* M., Professor Dr. in Freiburg 1898
73. *v. Lerber,* A., Dr. med., Arzt in Laupen 1898
74. *Lindt,* Dr. med., W. jun., Arzt und Dozent in Bern . 1888
75. *Lory,* C. L., Rentier in Münsingen 1894
76. *Lüscher,* E., Dr. med. in Bern 1895
77. *Lütschg,* J., gewesener Waisenvater in Bern . . . 1872
78. *Marckwald,* Dr. Max, Frankfurt a. M. 1889
79. *Marti,* Christian, Sekundarlehrer in Nidau . . . 1889
80. *Marti,* Lehrer an der Neuen Mädchenschule in Bern . 1892
81. *Moser,* Dr. phil. Ch., Privatdocent in Bern . . . 1884
82. *Müller,* Emil, Apotheker in Bern 1882
83. *Müller,* Professor Dr., P., in Bern 1888
84. *Müller,* Max, Dr. med. in Bern 1893
85. *v. Mutach,* Alfred, von Riedburg, Bern 1865
86. *Mützenberg,* Dr. med. Ernst, Spiez 1885
87. *Nanny,* Dr. Wilhelm, Arzt in Bern 1890
88. *Nicolet,* L., Pharmacien, St. Imier 1892
89. *Pfister,* J. H., Mechaniker in Bern 1871
90. *Pflüger,* Dr. Professor in Bern 1889
91. *Pulver,* E., Apotheker in Interlaken 1890
92. *Pulver,* G., Vorsteher in Hindelbank 1891
93. *Renfer,* H., Dr. Prof. an der Handelsakademie in St. Gallen 1898
94. *Ris,* F., Lehrer der Physik am städtischen Gymnasium . 1869
95. **Rothen,* A., Sekundarlehrer, Bern 1900
96. *Rothenbach,* Alfred, Alt-Gasdirektor in Bern . . . 1872
97. *Rothenbühler,* Dr., Sekundarlehrer in Bern . . . 1896
98. *Rubeli,* Dr. O., Professor an der Thierarzneischule, Bern . 1892
99. *Sahli,* Professor Dr. H., Bern 1875
100. **Sauter,* Dr. J., Ingenieur, Bern 1900
101. *Schaffer,* Dr., Kantonschemiker und Docent, Bern . . 1878
102. **Schapiro,* Dr. J., Bern 1900
103. *Schlachter,* Dr., Gymnasiallehrer, Bern 1884
104. *Schmid,* Dr. W., Oberst, Oberinstruktor der Artillerie, Bern 1891
105. *Schürch,* Otto, Dr. phil., Zahnarzt, Langnau . . . 1898
106. *Schütz,* Assistent des Kantonschemikers, Bern . . . 1896
107. *Sidler,* Dr., Honorar-Professor, Bern 1856
108. *v. Speyr,* Dr. Prof., Direktor der Waldau . . . 1898
109. *Stäger,* Rob., Dr. med., Bern 1898
110. *Steck,* Th., Dr. phil., Conservator am Naturhist. Museum Bern 1878
111. *Steiger,* Hans, Oberstlieutenant, Bern 1897
112. *Stooss,* Professor Dr. med. Max, Arzt in Bern . . 1883
113. *Strasser,* Dr. Hans, Professor der Anatomie, Bern . . 1872
114. *Strelin,* Alexander, Dr. med., Arzt, Bern 1898
115. *Streun,* G., Dr., Lehrer auf der Rütti 1898
116. *Studer,* Bernhard, sen., Bern 1844
117. *Studer,* Bernhard, Apotheker, Bern 1871
118. *Studer,* Dr. Theophil, Professor der Zoologie, Bern . . 1868
119. *Studer,* Wilhelm, Apotheker in Bern 1877
120. *Tambor,* J., Dr. phil., Docent, Laboratorium, Bern . . 1894
121. *Tanner,* G. H., Apotheker in Bern 1882
122. *Tavel,* Professor Dr. E., Bern 1892

123. *Thiessing,* Dr., Redaktor, Bern 1867
124. *v. Tscharner,* Dr. phil. L., Oberst, Bern 1874
125. *v. Tscharner-de Lessert,* Oberst, Bern 1878
126. *Tschirch,* Dr. A., Professor der Pharmakognosie in Bern . 1890
127. *Valentin,* Professor Dr. med. Ad., Arzt in Bern . . 1872
128. *Vögeli,* H., Dr. med., Thun 1898
129. *Volz,* Wilhelm, Apotheker in Bern 1887
130. *Wäber-Lindt,* A., Bern 1864
131. *Walthard,* Max, Dr. med. P.-D., Arzt in Bern . . . 1894
132. *Wanzenried,* Sekundarlehrer in Grosshöchstetten . . 1867
133. *v. Wattenwyl-v. Wattenwyl,* Jean, Oberst, Bern . . 1877
134. *Wilhelmi,* A., Dr. Thierarzt, Bern 1898
135. *Wollensack,* Heinrich, Dr. med., Giessbach . . . 1898
136. *Wüthrich,* Dr. phil. E., Direktor der Molkereischule Rütti 1892
137. *Wyss,* Dr. G., Buchdrucker in Bern 1887
138. *Wyttenbach-v. Fischer,* Dr., Arzt in Bern 1872
139. *Zeller,* R., Dr. phil., Geolog, Bern 1893
140. *Zumstein,* Dr. med., J. J., in Marburg 1885

Im Jahre 1900 ausgetreten:

Cherbuliez, Mülhausen. 1861
Crelier, Dr., Lehrer am Technikum, Biel 1896
Eggenberger, J., Dr. phil., Versicherungsbeamter . . . 1892
Flach, Arthur, Dr. med., Bern 1898
Humbel, Rud., Thierarzt, Nieder-Bipp 1898
Lochbrunner, Th., Uhrmacher, Bern 1896
Michailoff, S. Dr., meteorologische Centralstation Sofia . . 1898
Sahli, Dr. W., Bern 1898
Zwicky, Lehrer am städtischen Gymnasium, Bern . . . 1856

Im Jahre 1900 gestorben:

Hasler, Dr. phil. G., Direktor der Telegraphenwerkstätte, Bern 1861
Rothenbach, Lehrer am Lehrerseminar in Küssnacht . . 1871
Schwab, Dr. med. S., Bern 1885
Ziegler, Dr. med., A., eidgenössischer Oberfeldarzt, Bern . 1859

Korrespondierende Mitglieder:

1. *Flesch*, Dr. M., Arzt in Frankfurt 1882
2. *Gasser*, Dr. E., Professor der Anatomie in Marburg . . 1884
3. *Graf*, Lehrer in St. Gallen 1858
4. *Grützner*, Dr. A., Professor in Tübingen 1881
5. *Hiepe*, Dr. Wilhelm, in Birmingham 1874
6. *Imfeld*, Xaver, Topograph in Hottingen 1880
7. *Krebs*, Gymnasiallehrer in Winterthur 1864
8. *Landolf*, Dr., in Chili 1881
9. *Lang*, Dr. A., Professor in Zürich 1876
10. *Leonhard*, Dr., Veterinär in Frankfurt 1870
11. *Lichtheim*, Professor in Königsberg 1881
12. *Metzdorf*, Dr., Prof. der Vet.-Schule in Proskau, Schlesien. 1870
13. *Petri*, Dr. Ed., Professor der Geographie in St. Petersburg 1883
14. *Regelsperger*, Gust., Dr., rue la Boétie 85, Paris . . 1883
15. *Wälchli*, Dr. med. D. J., Buenos Ayres 1873
16. *Wild*, Dr. Professor, in Zürich 1859

Rechnung der bernischen naturforschenden Gesellschaft pro 1899.

Einnahmen:

An Jahresbeiträgen	Fr.	1208.—
An Eintrittsgeldern	»	15.—
An Zinsen	»	97.55
Aktiv-Saldo letzter Rechnung	»	287.90
	Fr.	1608.45

Ausgaben:

Mitteilungen	Fr.	658.30
Bibliothek	»	249.65
Sitzungen	»	117.35
Lesezirkel	»	160.75
Verschiedenes	»	97.75
	Fr.	1283.80

Bilanz:

Einnahmen	Fr.	1608.45
Ausgaben	»	1283.80
Aktiv-Saldo	Fr.	324.65

Reservefonds:

Ist im Jahre 1899 unverändert geblieben mit . . Fr. 1800.—

Vermögensetat:

Das Vermögen der bernischen naturforschenden Gesellschaft besteht auf 31. Dezember 1899 in dem Reservefonds wie oben	Fr.	1800.—
Dem Aktiv-Saldo pro 1899	»	324.65
	Fr.	2124.65
Auf 31. Dezember 1899 beträgt das Vermögen	Fr.	2124.65
Auf 31. Dezember 1898 betrug dasselbe	»	2087.90
Es ergiebt sich demnach eine Vermehrung um	Fr.	36.75

Der Kassier:

B. Studer-Steinhäuslin.

Genehmigt in der Sitzung vom 27. Oktober 1900.

H. Renfer.

Die Definitionen
der
Bernoullischen Funktion
und Untersuchung der Frage,
welche von denselben für die Theorie die zutreffendste ist.

[Historisch-kritisch beleuchtet.]

Einleitung.

Die Vorgeschichte des hier zu behandelnden Gegenstandes ist ziemlich rasch erschöpft, was schon aus der spärlichen Litteratur über diese Funktion hervorgehen dürfte, sind es doch äusserst wenige Autoren, die sich mit einer speziellen Untersuchung der Bernoullischen Funktion befreundet haben.[1]) Weit grösser ist die Anzahl der Schriften über die Bernoullischen Zahlen, auf deren Theorie sich diejenige der Bernoullischen Funktion aufbaut.[2]) Die vorliegende Arbeit setzt die Kenntnis der Theorie der Bernoullischen Zahlen[3]) voraus, wenigstens in Bezug auf ihre wichtigsten Eigenschaften und Beziehungen und die gebräuchlichsten Rekursionsformeln. Wo es nötig ist, wird jeweilen auf die betreffende Litteratur verwiesen.

Eingeführt in die algebraische Analysis wurde die Bernoullische Funktion von Professor Dr. *J. L. Raabe* in Zürich durch seine Arbeit «*Die Jakob Bernoullische Funktion*», die im Jahre 1848 im Verlage von Orell, Füssli & Cie. in Zürich erschien. Raabe gelangte gestützt auf Reihensummierungen und mit Hülfe der Bernoullischen Summenformel auf diese Funktion; gemäss letzterer Beziehung benannte er dieselbe nach dem grossen Basler Mathematiker Jakob Bernoulli.[4]) Als Beleg diene der Anfang des Vorwortes der oben erwähnten Schrift:

«Bei der Summation der ohne Ende fortlaufenden Reihe

$$a_1 + 2^m.a_2x + 3^m.a_3x^2 + \cdots\cdots + p^m.a_px^{p-1}$$
$$+ (p+1)^m a_1x^p + (p+2)^m a_2x^{p+1} + (p+3)^m a_3x^{p+2} + \cdots\cdots + (p+p)^m a_p x^{2p-1}$$
$$+ (2p+1)^m a_1x^{2p} + (2p+2)^m a_2x^{2p+1} + (2p+3)^m a_3x^{2p+2} + \cdots\cdots + (2p+p)^m a_p x^{3p-1}$$
$$+ (3p+1)^m a_1x^{3p} + (3p+2)^m a_2x^{3p+1} + (3p+3)^m a_3x^{3p+2} + \cdots\cdots + (3p+p)^m a_p x^{4p-1}$$
$$+ \text{in inf.}$$

an der äussersten Grenze ihrer Konvergenz, wobei m eine ganze und positive Zahl, Null mitbegriffen, vorstellt und a_1, a_2, a_3 ..... a_p endliche Konstanten sind, wird man auf einen Ausdruck geführt, der die von Jakob Bernoulli eingeführten, nach ihm benannten Zahlen impliziert, und welcher zur Summierung der Reihe mit dem allgemeinen Gliede r^m, wo r alle ganzen Zahlenwerte von 1 aufwärts gezählt annehmen kann, von ihm benutzt worden ist. Diesen Ausdruck, in seiner Allgemeinheit, nenne ich die «Jakob Bernoullische Funktion» oder kürzer die «Bernoullische Funktion», und bezeichne solche, gleich wie die Bernoullischen Zahlen, die sie enthält, durch B_1, B_2, B_3, ... B_m, ... dargestellt zu werden pflegen, durch B(z), falls z die allgemeine Grösse oder Variabele dieser Funktion ist.»

Im Jahre 1851 erschien eine zweite Abhandlung Raabes über denselben Gegenstand, betitelt «*Zurückführung einiger Summen und bestimmten Integrale auf die Jakob Bernoullische Funktion.*»[5]) Durch diese Arbeit wird seine frühere Schrift bedeutend erweitert und ergänzt.

Nach Raabe hat sich dann auch Dr. *O. Schlömilch*, Professor an der polytechnischen Schule zu Dresden, einlässlich mit dieser Funktion beschäftigt. Seine im Jahre 1856 in der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Band I, Seite 193 u. ff. veröffentlichte Abhandlung «*Ueber die Bernoullische Funktion und deren Gebrauch bei der Entwicklung halbkonvergenter Reihen*» stellt die Bernoullische Funktion elegant als Nullwert von Differentialquotienten dar. Diese Darstellung ist sehr interessant; die Ausdrücke für die Spezialwerte der verschieden hohen Derivierten sind ziemlich einfach anzusehen, doch sind die Operationen,

welche damit auszuführen sind, wie wir sehen werden, oft schwierig und erfordern viel Zeit. Die Schlömilchsche Definition stimmt nicht mit derjenigen von Raabe überein; doch ist die Beziehung zwischen beiden sehr einfach aufzustellen, was wir in einem spätern Abschnitt dieser Arbeit darstellen werden. Etwas erweitert findet sich die vorhin erwähnte Abhandlung auch in Schlömilchs «Compendium der höhern Analysis.» Braunschweig 1866, Seite 207 u. ff. des II. Bandes.

Wie aus den hinterlassenen Manuskripten von Professor Dr. *L. Schläfli* in Bern hervorgeht, hat sich auch dieser eingehend mit der Bernoullischen Funktion beschäftigt. Seine Definition stimmt mit den beiden vorher erwähnten nicht überein; er kommt, allerdings auf ganz anderem Wege, zu einer den frühern aber nahe verwandten Funktion, nämlich als Zusammenhang mit den Koeffizienten einer Binomialentwicklung. Das Interessante seiner Definition ist, dass dieselbe aus der gleichen Fundamentalbeziehung herstammt, wie die Definitionsgleichung der Bernoullischen Zahlen. Immerhin lässt sich seine Definition mit den beiden vorhergehenden in einfache Beziehungen bringen.

Schliesslich hat sich in den letzten Jahren noch der englische Mathematiker Dr. *J. W. L. Glaisher* sehr eingehend mit dieser Funktion befasst. Von demselben existieren zwei in englischen mathematischen Zeitschriften erschienene Abhandlungen über diesen Gegenstand. Nachdem derselbe in seiner ersten Arbeit «*On the Bernoullian Function,*»[6] die allgemeine Theorie der Bernoullischen Funktion ausführlich entwickelt hatte, gab er in seiner zweiten Schrift «*On the definite Integrals connected with the Bernoullian Function*»[7] meist Integraldarstellungen der Bernoullischen Funktion, wie es ja schon der Titel sagt; es finden sich jedoch auf Seite 21 einzelne Spezialwerte dieser Funktion, so dass die letztgenannte Schrift zu den vorliegenden Untersuchungen ebenfalls herbeigezogen werden musste.

Es handelt sich nun darum, nachzuweisen, welche dieser verschiedenen Definitionen von Raabe, Schlömilch, Schläfli und Glaisher, und letzterer hat selbst wieder von einander abweichende aufgestellt, für die Theorie die zutreffendste ist. Um diese Frage entscheiden zu können, müssen wir uns vorerst mit den einzelnen Definitionen vertraut machen. Wir betrachten daher der Reihe nach die verschiedenen Definitionen, möglichst erschöpfend und mit Weglassung alles Nebensächlichen. Gestützt auf diese Betrachtungen treffen wir dann unsere Folgerungen und den Entscheid der Frage. Die einzelnen Abschnitte

gliedern sich im Wesentlichen gleichartig, nur lassen sich bei der einen Definition diese Eigenschaften, bei der andern jene leichter aus der Grundgleichung ableiten. Im ganzen soll der historische Gang möglichst innegehalten werden.

Endlich sei der Vollständigkeit halber noch bemerkt, dass sich bei einzelnen Arbeiten über die Bernoullischen Zahlen hie und da einige Bemerkungen über die Bernoullische Funktion finden. Am Schlusse dieser Arbeit findet sich deshalb ein Verzeichnis sämtlicher benutzter Quellen und Werke.

Die dieser Arbeit beigefügten Tabellen und Kurven wurden selbst berechnet und dargestellt.

I. Die Bernoullische Funktion nach J. Raabe.

§ 1. Herleitung der Definition.

Wie schon in der Einleitung erwähnt, gelangt Raabe auf diese Funktion bei der Entwicklung von $\sum x^m$ in eine Potenzreihe unter Anwendung des binomischen Satzes. Der Weg der Herleitung vermittelst Summation von Differenzreihen ist so ausgedehnt, dass hier auf eine Wiedergabe desselben verzichtet werden muss, da dies den Rahmen der vorliegenden Arbeit weit überschreiten würde, umfasst die Ableitung dieser Definition in Raabes erster Schrift ja nicht weniger als dreizehn Druckseiten; zudem ist die Herleitung ziemlich einfach und bietet durchaus keine Schwierigkeiten.[8])

Raabe definiert darin

$$B(z) = \frac{z^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{2} z^m + \frac{1}{2} \binom{m}{1} B_1 z^{m-1} - \frac{1}{4} \binom{m}{3} B_2 z^{m-3} + \frac{1}{6} \binom{m}{5} B_3 z^{m-5} - + \cdots\cdots \quad (1)$$

als die »Bernoullische Funktion.«

Aus dem Grunde, dass der Funktionsexponent m nicht in der ganzen Allgemeinheit einer absoluten Variabelen auftritt, hat Raabe denselben in der Bezeichnung der Bernoullischen Funktion unbeachtet gelassen. Da sich eine Verschiedenheit der Bernoullischen Funktion

mit geradem und ungeradem Exponenten ergibt, so bezeichnet er die Bernoullische Funktion mit geradem Exponenten 2 m durch $B''(z)$ und diejenige mit ungeradem Exponenten $(2m+1)$ durch $B'(z)$, wobei m = ganz und positiv, weshalb sich folgende zwei Definitionsgleichungen ergeben

$$B''(z) = \frac{z^{2m+1}}{2m+1} - \frac{1}{2}z^{2m} + \frac{1}{2}\binom{2m}{1}B_1 z^{2m-1} - \frac{1}{4}\binom{2m}{3}B_2 z^{2m-3} + - \cdots\cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m}{2m-1}B_m \cdot z. \quad (2)$$

$$B'(z) = \frac{z^{2m+2}}{2m+2} - \frac{1}{2}z^{2m+1} + \frac{1}{2}\binom{2m+1}{1}B_1 z^{2m} - \frac{1}{4}\binom{2m+1}{3}B_2 z^{2m-2} + - \cdots\cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m+1}{2m-1}B_m z^2. \quad (3)$$

Aus diesen beiden Hauptgleichungen ist ersichtlich, dass nach Raabe auf der rechten Seite kein von der Variabelen freier Term vorkommen darf, eine Bestimmung, welche, wie wir sehen werden, die so definierte Bernoullische Funktion zu wenig allgemein macht.

Bedeutend rascher gelangt Raabe in seiner zweiten Arbeit zu der nämlichen Definitionsgleichung. Ausgangspunkt dieser Herleitung ist die bekannte Beziehung

$$x = \pi - 2\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\sin kx}{k}.$$

Dieser Ausdruck wird mehrmals nacheinander mit dx multipliziert und zwischen den Grenzen 0 und x integriert; so entstehen successive die Bernoullischen Funktionen mit den Exponenten 2, 3, 4, ..., nämlich

$$\frac{x^2}{1.2} = \pi x - 2\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1-\cos kx}{k^2},$$

und sei noch abkürzend, wie gebräuchlich, bezeichnet

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^m} = \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \cdots \text{in inf.} = S_m,$$

so werden

$$\frac{x^2}{1.2} = \pi . x - 2S_2 + 2\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\cos kx}{k^2}.$$

$$\frac{x^3}{3!} = \pi \cdot \frac{x^2}{2!} - 2\,S_2\,x + 2\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin k\,x}{k^3}.$$

$$\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} = \pi \cdot \frac{x^{2m}}{(2m)!} - 2\,S_2 \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + 2\,S_4 \frac{x^{2m-3}}{(2m-3)!} - + \cdots\cdots$$

$$+ 2(-1)^{m-1} S_{2m-2} \frac{x^3}{3!} + 2(-1)^m S_{2m}\,x + 2(-1)^{m+1} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin k\,x}{k^{2m+1}}. \quad (\alpha)$$

$$\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} = \pi \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} - 2\,S_2 \frac{x^{2m}}{(2m)!} + 2\,S_4 \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!} - + \cdots\cdots$$

$$+ 2(-1)^m S_{2m} \frac{x^2}{2!} + 2(-1)^{m+1} S_{2m+2} + 2(-1)^{m+2} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos k\,x}{k^{2m+2}}. \quad (\beta)$$

Beide gelten für alle Werte von $x = 0$ bis $x = 2\pi$; m darf gehen von 0, 1, 2, ...; eine Ausnahme bildet nur $m = 0$; denn für diesen Wert bleiben die Grenzwerte $x = 0$ und $x = 2\pi$ ausgeschlossen.

Berücksichtigen wir, dass

$$B_m = (2m)!\,\frac{2}{(2\pi)^{2m}}\,S_{2m},$$

und multiplizieren wir (α) mit $\frac{(2m)!}{(2\pi)^{2m+1}}$ und (β) mit $\frac{(2m+1)!}{(2\pi)^{2m+2}}$, so werden

$$\frac{2(-1)^{m+1}(2m)!}{(2\pi)^{2m+1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin k\,x}{k^{2m+1}} = \frac{\left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2m+1}}{2m+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2m}$$

$$+ \frac{1}{2}\binom{2m}{1} B_1 \left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2m-1} - + \cdots\cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m}{2m-1} B_m \left(\frac{x}{2\pi}\right).$$

$$\frac{2(-1)^m(2m+1)!}{(2\pi)^{2m+2}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos k\,x}{k^{2m+2}} = \frac{\left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2m+2}}{2m+2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2m+1}$$

$$+ \frac{1}{2}\binom{2m+1}{1} B_1 \left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2m} - + \cdots\cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m+1}{2m-1} B_m \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2$$

$$+ \frac{(-1)^m}{2m+2} B_{m+1}.$$

In diesen beiden letzten Gleichungen ersetzt Raabe $\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ durch x und führt die Beziehungen (2) und (3) ein; dann werden

$$B''(x) = \frac{2(-1)^{m-1}}{(2\pi)^{2m+1}}(2m)! \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin 2k\pi x}{k^{2m+1}} \quad (4)$$

$$B'(x) = \frac{2(-1)^{m}}{(2\pi)^{2m+2}}(2m+1)! \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos 2k\pi x}{k^{2m+2}} - \frac{(-1)^{m}}{2m+2} B_{m+1}. \quad (5)$$

Durch obige Substitution hat sich aber das Gültigkeitsgebiet verkleinert; die Beziehungen (4) und (5) gelten nur noch für $0 < x < 1$, inklusive Grenzen, wenn der Fall $m = 0$ ausgeschlossen wird.

Aus diesen ziemlich komplizierten Formeln leitet Raabe die Mehrzahl der Eigenschaften der Bernoullischen Funktion ab, weshalb seine Ableitungen oft etwas lang und umständlich werden.

Da wir zu spätern Vergleichungen noch die Bernoullische Funktion mit dem Exponenten $(2m-1)$ nötig haben, so geben wir Raabes Definitionsformel für dieselbe, nämlich

$$B'(z) = \frac{z^{2m}}{2m} - \frac{1}{2} z^{2m-1} + \frac{1}{2}\binom{2m-1}{1} B_1 z^{2m-2} - + \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots + \frac{(-1)^{m-2}}{2m-2}\binom{2m-1}{2m-3} B_{m-1} z^2. \quad (6)$$

§ 2. Die Derivierten der Bernoullischen Funktion.

A. Die einfachen Differentialquotienten.

Wir können dieselben aus den Definitionsgleichungen (2) und (3), oder viel einfacher aus (4) und (5) auf folgende Weise finden:

1. *Für die ungerade Bernoullische Funktion* wird nach (2)

$$\frac{\partial}{\partial z} B'(z) = \frac{2m+2}{2m+2} z^{2m+1} - \frac{1}{2}(2m+1) z^{2m}$$
$$+ \frac{1}{2}\binom{2m+1}{1} B_1 2m \cdot z^{2m-1} - + \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m+1}{2m-1} B_m 2z$$
$$= (2m+1)\left\{ \frac{z^{2m+1}}{2m+1} - \frac{1}{2} z^{2m} + \frac{1}{2}\binom{2m}{1} B_1 z^{2m-1} \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4}\binom{2m}{3} B_2 z^{2m-3} + - \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m}{2m-1} B_m z \right\}$$
$$\frac{\partial}{\partial x} B'(z) = (2m+1) B''(z). \quad (7)$$

2. Für *die gerade Bernoullische Funktion* bedienen wir uns der Formel (3); es wird

$$\frac{\partial}{\partial x}B''(z)=z^{2m}-\frac{2m}{2}z^{2m-1}+\frac{1}{2}\binom{2m}{1}B_1(2m-1)z^{2m-2}$$
$$-\frac{1}{4}\binom{2m}{3}B_2(2m-3)z^{2m-4}+-\cdots+\frac{(-1)^{m-2}}{2m-2}\binom{2m}{2m-3}B_{m-1}z^2$$
$$+\frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m}{2m-1}B_m$$
$$=2m\left\{\frac{z^{2m}}{2m}-\frac{1}{2}z^{2m-1}+\frac{1}{2}\binom{2m-1}{1}z^{2m-2}B_1\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}\binom{2m-1}{3}B_2z^{2m-4}+-\cdots+\frac{(-1)^{m-2}}{2m-2}\binom{2m-1}{2m-3}B_{m-1}z^2\right\}$$
$$+(-1)^{m-1}B_m$$

$$\frac{\partial}{\partial z}B''(z)=2m\,.\,'B(z)+(-1)^{m-1}B_m. \tag{8}$$

Es tritt hier eine Komplikation durch Hinzutritt einer Bernoullischen Zahl auf.

Noch einfacher ergeben sich dieselben Formeln aus (4) und (5), wie ersichtlich ist aus

$$\frac{\partial}{\partial z}B'(z)=\frac{2(-1)^m(2m+1)!}{(2\pi)^{2m+2}}\sum_{k=1}^{k=\infty}-2k\pi\cdot\frac{\sin 2k\pi z}{k^{2m+2}}$$
$$=\frac{2(-1)^{m+1}(2m)!\,(2m+1)}{(2\pi)^{2m+1}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\sin 2k\pi z}{k^{2m+1}}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}B'(z)=(2m+1)B''(z). \tag{7}$$

Analog wird

$$\frac{\partial}{\partial x}B''(z)=\frac{2(-1)^{m+1}(2m)!}{(2\pi)^{2m+1}}\sum_{k=1}^{k=\infty}2k\pi\cdot\frac{\cos 2k\pi z}{k^{2m+1}}$$
$$=\frac{2(-1)^{m-1}(2m-1)!\,2m}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\cos 2k\pi z}{k^{2m}}.$$

Ziehen wir die Formeln (5) und (6) in Betracht, so wird dieses zu

$$\frac{\partial}{\partial z}B''(z)=2m\,.\,'B(z)+(-1)^{m-1}B_m. \tag{8}$$

B. Die wiederholten Differentialquotienten.

Da Raabe den Exponenten der Funktion nicht, oder nur ungenügend andeutet, so lassen sich die wiederholten Ableitungen nicht direkt durch die Bernoullische Funktion, wohl aber durch trigonometrische Summenformeln darstellen; wäre bei dem Funktionszeichen der Exponent berücksichtigt worden, so könnten die Derivierten mit Leichtigkeit angegeben werden.

Durch successives Differenzieren der Beziehungen (4) und (5) gelangen wir zu folgenden einfachen Gleichungen, wenn man symbolisch setzt

$$B_{2r} = (2r)^{te} \text{ Ableitung von } B$$

$$B''_{2r-1}(z) = \frac{2(-1)^{m+r}(2m)!}{(2\pi)^{2m-2r+2}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos 2k\pi z}{k^{2m-2r+2}} \tag{9}$$

$$B'_{2r}(z) = \frac{2(-1)^{m+r}(2m+1)!}{(2\pi)^{2m-2r+2}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos 2k\pi z}{k^{2m-2r+2}} \tag{10}$$

C. Einfache Integralformeln.

Aus den Gleichungen (7) und (8) resultieren durch Multiplikation mit dz und Integration zwischen den Grenzen 0 und z

$$\int_0^z B''(z)\,dz = \frac{B'(z)}{2m+1} \qquad \text{und} \tag{11}$$

$$\int_0^z B(z)\,dz = \frac{B''(z)}{2m} + \frac{(-1)^m B_m}{2m} z. \tag{12}$$

Führen wir dieselben Operationen an den Formeln (4) und (5) aus, so erhalten wir zwei weitere Integralformeln einfachster Art, wenn als obere Grenze $z = 1$ gewählt wird; denn es werden

$$\int_0^1 B''(z)\,dz = \frac{2(-1)^{m+1}(2m)!}{(2\pi)^{2m+1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{2m+1}} \int_0^1 \sin 2k\pi z\,dz.$$

$$\int_0^1 B'(z)\,dz = \frac{2(-1)^m(2m+1)!}{(2\pi)^{2m+2}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{2m+2}} \int_0^1 \cos 2k\pi z\,dz$$

$$- \frac{(-1)^m}{2m+2} B_{m+1} \int_0^1 dz.$$

Nun ist $\int_0^1 \sin 2k\pi z\,dz = \int_0^1 \cos 2k\pi z\,dz = 0$, somit

$$\int_0^1 B''(z)dz = 0 \quad (13) \quad \text{und} \quad \int_0^1 B'(z)\,dz = \frac{(-1)^{m-1}}{2m+2} B_{m+1}. \quad (14)$$

§ 3. Die Bernoullische Funktion mit inversem und mit negativem Argument.

Raabe widmet diesen beiden Betrachtungen nur wenig Aufmerksamkeit; doch sind die Grundformeln schon bei ihm wie folgt hergeleitet. Er erhöht in Formel (25) seiner so langen Ableitung der Definitionsformel[9]), d. h., in

$$(1+a)^m - ma^{m-1} - a^m + \binom{m}{1}\left\{(1+a)^{m-1} - a^{m-1}\right\}\alpha_1$$
$$+ \binom{m}{2}\left\{(1+a)^{m-2} - a^{m-2}\right\}\alpha_2 + \cdots\cdots + \binom{m}{m-2}\left\{(1+a)^2 - a^2\right\}\alpha_{m-2}$$
$$+ \binom{m}{m-1}\left\{(1+a) - a\right\}\alpha_{m-1} = 0$$

m um die Einheit und beachtet die bekannten Ergebnisse (26) und (29) seiner Schrift und die Definitionsgleichung der Bernoullischen Funktion, wonach

$$\alpha_1 = \frac{1}{2};\ \alpha_{2h+1} = 0;\ \alpha_{2h} = (-1)^{h-1} B_h,$$

wobei h geht von 1 bis ∞, so resultiert die Gleichheit

$$B(1+z) - B(z) = z^m. \quad (15)$$

Ersetzen wir in der ursprünglichen Formel (1) z durch (—z), so wird

$$B(-z) = \frac{(-z)^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{2}(-z)^m + \frac{1}{2}\binom{m}{1} B_1 (-z)^{m-1}$$
$$- \frac{1}{4}\binom{m}{2} B_2 (-z)^{m-3} + - \cdots\cdots$$

$$(-1)^m B(-z) = -\frac{z^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{2} z^m - \frac{1}{2}\binom{m}{1} B_1 z^{m-1}$$
$$+ \frac{1}{4}\binom{m}{2} B_2 z^{m-3} - + \cdots\cdots$$

$$B(z) = \frac{z^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{2} z^m + \frac{1}{2}\binom{m}{1} B_1 z^{m-1} - \frac{1}{4}\binom{m}{2} B_2 z^{m-3} + - \cdots\cdots$$

$$B(z) + (-1)^m B(-z) = -z^m. \tag{16}$$

Spezialisieren wir diese letzte Beziehung auf die gerade und ungerade Bernoullische Funktion, so erhalten wir

$$B''(-z) = -B''(z) - z^{2m} \quad \text{und} \quad B'(-z) = B'(z) + z^{2m+1}. \tag{16a}$$

Addieren wir die Formeln (15) und (16), so erkennen wir, dass

$$B(1+z) + (-1)^m B(1-z) = 0. \tag{17}$$

Aus der letzten Gleichung ergeben sich zwei Beziehungen, die uns über die geraden und ungeraden Bernoullischen Funktionen nähern Aufschluss geben. Je nachdem m gerade oder ungerade, wird, wenn wir vorher z durch (—z) ersetzen,

$$B(1-z) + (-1)^m B(z) = 0. \tag{17a}$$

$$B''(1-z) = -B''(z); \quad B'(1-z) = B'(z). \tag{17b}$$

Für $z = 0$ folgt aus (15) $B(1) = B(0)$, und da laut Definitionsgleichung $B(0) = 0$, so wird

$$B(0) = B(1) = 0. \tag{17c}$$

Ist der Exponent gerade und $z = \frac{1}{2}$, so entsteht nach (17b)

$$B''\left(\frac{1}{2}\right) = -B''\left(\frac{1}{2}\right),$$

und dies kann nur Null sein; somit ist

$$B(0) = B\left(\frac{1}{2}\right) = B(1) = 0. \tag{17d}$$

Es sind dies alles Resultate, die uns bei der Diskussion der Bernoullischen Funktion gute Dienste leisten werden.

Später[10]) leitet Raabe dieselben Eigenschaften aus unsern Formeln (4) und (5) ab. Er ersetzt in (4) z durch (1—z); dann wird

$$B''(1-z) = \frac{2(-1)^{m+1}(2m)!}{(2\pi)^{2m+1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin 2k\pi(1-z)}{k^{2m+1}}.$$

Da aber $\sin 2k\pi(1-z) = -\sin 2k\pi z$, so wird

$$B''(1-z) = \frac{-2(-1)^{m+1}(2m)!}{(2\pi)^{2m+1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin 2k\pi z}{k^{2m+1}}, \text{ also}$$

$$B''(1-z) = -B''(z).^{11}) \qquad (17^b)$$

Desgleichen wird

$$B'(1-z) + \frac{(-1)^m}{m+2} B_{m+1} = \frac{2(-1)^m(2m+1)!}{(2\pi)^{2m+2}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos 2k\pi(1-z)}{k^{2m+2}}.$$

Da $\cos 2k\pi(1-z) = \cos 2k\pi z$, folgt

$$B'(1-z) + \frac{(-1)^m}{m+2} B_{m+1} = \frac{2(-1)^m(2m+1)!}{(2\pi)^{2m+2}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos 2k\pi z}{k^{2m+2}}$$

$$= B'(z) + \frac{(-1)^m}{m+2} B_{m+1}, \text{ somit}$$

$$B'(1-z) = B'(z).^{11}) \qquad (17^b)$$

Dass die Funktion B(z) bei der Annahme eines ganzen, positiven Exponenten m die Summe der m^{ten} Potenzen aller Zahlen 1 bis (z—1) darstellt, kann nun gestützt auf die schon gefundenen Beziehungen leicht gezeigt werden. Zum ersten Mal sind solche Reihensummierungen von Jakob Bernoulli *allgemein* gelöst worden, der in seinem für die Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung so wichtigen Werke «ars conjectandi» 1713 mit Hülfe der von ihm eingeführten Bernoullischen Zahlen, von denen er die 5 ersten berechnet[12]), solche Summierungen vornimmt. Vor ihm haben verschiedene Mathematiker wohl spezielle Potenzreihen summiert; der Engländer Wallis summierte die vierten, fünften und sechsten Potenzen[13]); auch Faulhaber führte in seiner «academia algebrae» 1631 solche Operationen aus[14]); aber Jakob Bernoulli[15]) gebührt das Verdienst, diese Aufgabe allgemein gelöst zu haben.

Ganz einfach lässt sich diese Aufgabe durch Anwendung der Bernoullischen Funktion ausführen. Wir gehen von Formel (15) aus, erhöhen successive das Argument z je um die Einheit und erhalten, wenn wir schliesslich alle diese Gleichungen addieren und z um k Einheiten fortschreitet,

$$B(k+z) = B(z) + z^m + (1+z)^m + (2+z)^m + \cdots + (k-1+z)^m. \qquad (18)$$

Daraus geht für $z = 0$ die gewünschte Summationsformel von Jakob Bernoulli hervor, nämlich

$$B(k) = 1^m + 2^m + 3^m + \cdots\cdots + (k-1)^m. \qquad (18^a)$$

Eine weitere wichtige Formel ergibt sich aus (17^b). Ersetzen wir darin z der Reihe nach durch $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \cdots\cdots, \frac{n-1}{n}$, addieren dann alle diese Gleichungen und dividieren, da jedes Glied doppelt auftritt, durch 2, so folgt für die gerade Bernoullische Funktion

$$B''\left(\frac{1}{n}\right) + B''\left(\frac{2}{n}\right) + B''\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots\cdots + B''\left(\frac{n-1}{n}\right) = 0. \quad (\alpha)$$

Setzen wir weiter für z wieder successive die Werte $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \cdots\cdots, \frac{n-1}{n}$ in (18) ein, so wird für die gerade Bernoullische Funktion

$$B''\left(k + \frac{1}{n}\right) = B''\left(\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n}\right)^{2m} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2m} + \left(2 + \frac{1}{n}\right)^{2m} + \cdots\cdots + \left(k-1 + \frac{1}{n}\right)^{2m}$$

$$B''\left(k + \frac{2}{n}\right) = B''\left(\frac{2}{n}\right) + \left(\frac{2}{n}\right)^{2m} + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2m} + \left(2 + \frac{2}{n}\right)^{2m} + \cdots\cdots + \left(k-1 + \frac{2}{n}\right)^{2m}$$

$$B''\left(k + \frac{3}{n}\right) = B''\left(\frac{3}{n}\right) + \left(\frac{3}{n}\right)^{2m} + \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{2m} + \left(2 + \frac{3}{n}\right)^{2m} + \cdots\cdots + \left(k-1 + \frac{3}{n}\right)^{2m}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B''\left(k + \frac{n-1}{n}\right) = B''\left(\frac{n-1}{n}\right) + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2m} + \left(1 + \frac{n-1}{n}\right)^{2m} + \left(2 + \frac{n-1}{n}\right)^{2m} + \cdots\cdots + \left(k-1 + \frac{n-1}{n}\right)^{2m}$$

$$^{16})B''(k) = \left(\frac{n}{n}\right)^{2m} + \left(1 + \frac{n}{n}\right)^{2m} + \left(2 + \frac{n}{n}\right)^{2m} + \cdots\cdots + \left(k-2 + \frac{n}{n}\right)^{2m}.$$

Addieren wir alle diese Gleichungen, so liefert die erste Kolonne der rechten Seite gemäss (α) Null; sämtliche übrigen Potenzen mit

dem Exponenten (2m), also von $\left(\frac{1}{n}\right)^{2m}$ bis zu $\left(k-2+\frac{n}{n}\right)^{2m}$ lassen sich gestützt auf (18ª) darstellen durch $\frac{1}{n^{2m}} B''(nk)$; deshalb wird

$$B''(k)+B''\left(k+\frac{1}{n}\right)+B''\left(k+\frac{2}{n}\right)+\cdots\cdots+B''\left(k+\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n^{2m}} B''(nk). \qquad (19)$$

Raabe weist dann nach, dass diese Formel gilt für k = beliebig rational gebrochen und positiv, dann für alle irrationalen positiven Werte von k, schliesslich zeigt er, dass dieselbe auch für negative reelle Werte von k die Gültigkeit nicht verliert.[17])

Um den entsprechenden Satz für die ungerade Bernoullische Funktion zu erhalten, verfährt er wie folgt: Ausgehend von (7), wird

$$B'_1(z) = (2m+1) B''(z).[18])$$

Er ersetzt darin z durch $\left(z+\frac{k}{n}\right)$, summiert beidseitig von $k=0$ bis $k=n-1$ und erhält unter Anwendung von (19)

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} B'_1\left(z+\frac{k}{n}\right) = (2m+1)\sum_{k=0}^{k=n-1} B''\left(z+\frac{k}{n}\right) = \frac{(2m+1)}{n^{2m}} B''(nz).$$

Nach (7) ist aber auch $B'_1(nz) = (2m+1) B''(nz)$, daher

$$\frac{1}{n^{2m}} B'_1(nz) = \sum_{k=0}^{k=n-1} B'_1\left(z+\frac{k}{n}\right).$$

Wird beidseitig mit dz multipliziert und in Beziehung auf z integriert, so folgt

$$\frac{1}{n^{2m+1}} B'(nz) = \sum_{k=0}^{k=n-1} B'\left(z+\frac{k}{n}\right) + M, \qquad (\beta)$$

wo M als Integrationskonstante von z unabhängig ist. Um diese zu bestimmen, setzen wir $z=0$, dann wird

$$0 = M + \sum_{k=0}^{k=n-1} B'\left(\frac{k}{n}\right).$$

$$M = -\left\{B'\left(\frac{1}{n}\right)+B'\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots\cdots+B'\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}.$$

Durch Vergleichung zweier für dasselbe bestimmte Integral gefundener Ausdrücke, erhält Raabe dann

$$B'\left(\frac{1}{n}\right)+B'\left(\frac{2}{n}\right)+B'\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots\cdots+B'\left(\frac{n-1}{n}\right)$$
$$=\frac{(-1)^{m-1}}{2m+2}\left\{n-\frac{1}{n^{2m+1}}\right\}B_{m+1}.$$

Setzt er die erhaltenen Werte in die vorhin erhaltene Formel (β) ein, so wird

$$B'(z)+B'\left(z+\frac{1}{n}\right)+B'\left(z+\frac{2}{n}\right)+\cdots\cdots+B'\left(z+\frac{n-1}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{n^{2m+1}}B'(nz)-\frac{(-1)^m\left\{n^{2m+2}-1\right\}}{(2m+2)n^{2m+1}}B_{m+1}, \qquad (20)$$

eine Formel, die gleich wie (19) für sämtliche reelle Werte von z und für ganze und positive Werte von n identisch Bestand hat.

Diese letzten zwei Beziehungen zeigen, wie schon Raabe andeutet, eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Gauss'schen Fundamentalsatz in der Theorie der Gamma-Funktion

$$\Gamma(a)\cdot\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdot\Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)$$
$$=\Gamma(na)\cdot n^{-na+\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}},$$

nur finden sich hier alles Produkte, während bei der Bernoullischen Funktion Summen auftreten.[19]) Es wäre wahrscheinlich sehr interessant, sämtliche Analogien beider Funktionen herauszusuchen; doch würde uns das zu weit von unserem Thema wegleiten.

§ 4. Diskussion der Bernoullischen Funktion.

Raabe diskutiert seine aufgestellten Definitionsformeln in keiner einer Arbeiten; doch müssen wir auf diese Frage auch bei dieser Definition eintreten, damit wir später mit den andern vergleichen können. Wir kommen am besten zum Ziel, wenn wir bei den Bernoullischen Funktionen mit niedrigen Exponenten anfangen und allmählich zu denjenigen mit höhern fortschreiten.

Setzt man für m der Reihe nach 0, 1, 2, 3, ..., so erhalten die acht ersten Bernoullischen Funktionen folgende Werte:

$$B_0(z) = z.$$

$$B_1(z) = \frac{1}{2} z\,(z-1).$$

$$B_2(z) = \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} z.$$

$$B_3(z) = \frac{1}{4} z^4 - \frac{1}{2} z^3 + \frac{1}{4} z^2.$$

$$B_4(z) = \frac{1}{5} z^5 - \frac{1}{2} z^4 + \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{30} z.$$

$$B_5(z) = \frac{1}{6} z^6 - \frac{1}{2} z^5 + \frac{5}{12} z^4 - \frac{1}{12} z^2.$$

$$B_6(z) = \frac{1}{7} z^7 - \frac{1}{2} z^6 + \frac{1}{2} z^5 - \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{42} z.$$

$$B_7(z) = \frac{1}{8} z^8 - \frac{1}{2} z^7 + \frac{7}{12} z^6 - \frac{7}{24} z^4 + \frac{1}{12} z^2.$$

Für uns sind diejenigen Werte am wichtigsten, für welche z innerhalb des Intervalles 0 und 1 liegt; für z ausserhalb nehmen die Funktionen rasch grosse Werte an; auch können diese Werte aus den innerhalb dieses Intervalles liegenden berechnet werden. Die Tabelle I am Schlusse dieser Arbeit gibt die Werte der sechs ersten Bernoullischen Funktionen für verschiedene z von -3 bis $+4$.

1. $B_0(z) = z$. Diese Funktion stellt somit eine Gerade dar, die durch den Ursprung der Zahlenebene geht und den Winkel der Koordinatenaxen halbiert, indem sie durch den ersten und dritten Quadranten läuft.

2. $B_1(z) = \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{2} z$. Am meisten interessieren uns die, Maximal- und Minimalwerte der Funktion. Nach der bekannten Regel aus der Theorie der Maxima und Minima entwickelter Funktionen erhalten wir hier ein Minimum für $z = \frac{1}{2}$. Es ist leicht einzusehen dass von $z = 0$ bis $z = \frac{1}{2}$ diese Funktion fortwährend abnimmt und negativ bleibt; der kleinste Wert muss somit $B_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$ sein. Von $z = \frac{1}{2}$ bis $z = 1$ beginnt die Funktion fortwährend grösser zu werden, um für $z = 1$ den Nullwert zu erreichen, von wo an die

Funktion weiter zunimmt. Der Anblick der Gleichung sagt uns überhaupt sofort, dass diese Funktion eine Parabel darstellt, die durch den Ursprung geht.

3. $B_2 = \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z$. Wir erhalten ein Minimum für $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3}$ und ein Maximum für $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3}$; zudem wird diese Funktion für $z = \frac{1}{2}$ zu 0; daher folgt:

Zwischen $z = 0$ bis $z = \frac{1}{2}$ ist diese Funktion stets positiv und weist ein Maximum auf bei $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3}$; im Intervall von $z = \frac{1}{2}$ bis $z = 1$ ist dieselbe negativ mit dem berechneten Minimum bei $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3}$. Wie wir später sehen werden, stellt diese Gleichung eine Parabel höherer Ordnung dar.

4. $B_3 = \frac{1}{4}z^4 - \frac{1}{2}z^3 + \frac{1}{4}z^2$. Die Rechnung ergibt zwei Minima, bei $z = 0$ und $z = 1$ und ein Maximum bei $z = \frac{1}{2}$. Diese Funktion ist im ganzen Zwischenraum von 0 bis 1 positiv und besitzt eine Maximalstelle für $z = \frac{1}{2}$, wofür $B_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{64}$ wird. Es stellt dieselbe wieder eine Parabel höherer Ordnung dar; diese geht durch den Nullpunkt, der aber kein Doppelpunkt ist; gleichwohl ist die Abszissenaxe Doppeltangente; sie berührt in $z = 0$ und $z = 1$.

Bei der Diskussion der höhern Bernoullischen Funktionen können wir nicht mehr analog verfahren, da wir auf Gleichungen vierten und noch höhern Grades gelangen; wir begnügen uns hier mit der graphischen Darstellung der zwei folgenden, höhern Bernoullischen Funktionen. Bei einer später zu untersuchenden Definition der Bernoullischen Funktion werden wir einen ausreichenden Weg der Diskussion der höhern Bernoullischen Funktionen kennen lernen.[20])

§ 5. Entwicklung der Bernoullischen Funktion in trig. Reihen.

Schon bei der Ableitung der Definitionsgleichung gelangte Raabe zu Reihen, welche die Bernoullischen Funktionen darstellen, ebenso

bei der Herleitung der Differentialquotienten. Wir verweisen hier nur auf die diesbezüglichen Formeln (4), (5), (9) und (10). Dieselben zeigen viel Ähnlichkeit mit den Reihenentwicklungen der übrigen Definitionen der Bernoullischen Funktion.

§ 6. Die Bernoullische Funktion als bestimmtes Integral.

Es handelt sich nicht darum, eine erschöpfende Darstellung aller Integrale der Bernoullischen Funktion zu geben; wir wählen nur die zum Vergleich mit den andern Definitionen wichtigen.

Durch Multiplikation mit $\cos 2r\pi z\,dz$, resp. $\sin 2r\pi z\,dz$ und Integration zwischen den Grenzen 0 und 1 entstehen aus den Formeln (9) und (10) unter der Voraussetzung, dass r und k ganze Zahlen seien, die vier leicht herzuleitenden Formeln.[21])

$$\int_0^1 B''(z)\cos 2r\pi z\,dz = 0. \tag{21}$$

$$\int_0^1 B''(z)\sin 2r\pi z\,dz = \frac{(-1)^{m-1}\Gamma(2m+1)}{(2\pi r)^{2m+1}}. \tag{22}$$

$$\int_0^1 B'(z)\sin 2r\pi z\,dz = 0. \tag{23}$$

$$\int_0^1 B'(z)\cos 2r\pi z\,dz = \frac{(-1)^{m}\Gamma(2m+2)}{(2\pi r)^{2m+2}}. \tag{24}$$

Multiplizieren wir (4) mit $B''(z)\,dz$ und integrieren zwischen 0 und 1, so folgt, da die Doppelsumme durch die verschwindenden Integrale zur einfachen Summe wird,

$$\int_0^1 B''^2(z)\,dz = \frac{4\,(2m)!^2}{(2\pi)^{4m+2}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^{4m+2}}\int_0^1 \sin^2 2k\pi z\,dz.$$

Der Wert des Integrales rechts ist $\frac{1}{2}$; somit

$$\int_0^1 B''^2(z)\,dz = \frac{2\,(2m)!^2}{(2\pi)^{4m+2}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^{4m+2}} = \frac{2\,(2m)!^2}{(2\pi)^{4m+2}}\,S_{4m+2}.$$

Wird S_{4m+2} durch Bernoullische Zahlen ausgedrückt, so resultiert

$$\int_0^1 B''^2(z)\,dz = \frac{\Gamma(2m+1)}{(2m+1)(2m+2)\ldots\ldots(4m+2)}\,B_{2m+1}. \qquad (25)$$

Ebenso wird aus (5)

$$\int_0^1 B'^2(z)\,dz = \frac{\Gamma(2m+2)}{(2m+2)(2m+3)\ldots\ldots(4m+4)}\,B_{2m+2} + \left\{\frac{B_{m+1}}{2m+2}\right\}^2. \qquad (26)$$

Mit Zuziehung der Gammafunktion gelangt Raabe zu einer Anzahl bestimmter Integrale, welche durch die Bernoullische Funktion dargestellt werden können.

Bekanntlich ist $\frac{\Gamma(2m+1)}{k^{2m+1}} = \int_0^\infty e^{-ku}\,u^{2m}\,du$. Setzen wir diesen Wert in Formel (4) ein, so wird

$$\frac{1}{2}(-1)^{m+1}(2\pi)^{2m+1}\,B''(z) = \int_0^\infty \left\{\sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-ku}\sin 2k\pi z\right\} u^{2m}\,du.$$

Da aber $\sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-ku}\sin 2k\pi z = \frac{\sin 2\pi z}{e^u + e^{-u} - 2\cos 2\pi z}$, so wird

$$\int_0^\infty \frac{u^{2m}}{e^u + e^{-u} - 2\cos 2\pi z}\,du = \frac{(-1)^{m+1}(2\pi)^{2m+1}}{2\sin 2\pi z}\,B''(z). \qquad (27)$$

Ebenso wird

$$\int_0^\infty \frac{(\cos 2\pi z - e^{-u})\,u^{2m+1}}{e^u + e^{-u} - 2\cos 2\pi z}\,du = \frac{1}{2}(-1)^m(2\pi)^{2m+2}\,B'(z) + \frac{1}{2}\,\frac{(2\pi)^{2m+2}}{2m+2}\,B_{m+1}. \qquad (28)$$

Durch partielle Integration findet Raabe eine weitere Anzahl von bestimmten Integralen, ausgedrückt durch Bernoullische Zahlen oder Funktionen. Ebenso erhält er noch andere kompliziertere Formeln, wenn er die Summenformeln oder andere zweckmässig gewählte, mit den Bernoullischen Funktionen in Beziehung stehende Ausdrücke in Partialbrüche zerlegt. Alle diese Beziehungen erfordern aber eine ziemlich umständliche Herleitung.[22])

II. Die Bernoullische Funktion nach O. Schlömilch.

§ 7. Herleitung der Definition.

Ausgangspunkt ist die Summation der uns schon bekannten Potenzreihe

$$1^p + 2^p + 3^p + 4^p + \cdots\cdots + (k-1)^p.$$

Das Problem bietet uns keine Schwierigkeiten, wenn die Fälle für $p = 1$, $p = 2$, $p = 3$, ... successive behandelt werden, d. h., wenn man jeden Fall auf den vorhergehenden zurückführt; eine allgemeine Formel ist dagegen auf diese Weise nicht zu finden, wohl aber durch Differentialrechnung.

Obige Reihe entsteht durch p-malige Differentiation einer andern Reihe, so dass ist

$$1^p + 2^p + 3^p + \cdots\cdots + (k-1)^p = \left\{ D^p \frac{e^{kx}-1}{e^x-1} \right\}_{x=0}^{25)}.$$

Um die Differentiation auszuführen, zerlegen wir die rechte Seite in zwei Faktoren $\frac{x}{e^x-1} \cdot \frac{e^{kx}-1}{x} = \varphi(x) \cdot \psi(x)$; dann wird nach der Regel der Differentiation von Produkten

$$D^p \left\{ \varphi(x)\, \psi(x) \right\}_{x=0} = \varphi(0)\, \psi^p(0) + \binom{p}{1} \varphi'(0)\, \psi^{p-1}(0) + \binom{p}{2} \varphi''(0)\, \psi^{p-2} + \cdots\cdots \quad (a)$$

Zur Berechnung der Werte $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$, ... benutzen wir die bekannte Formel über Bernoullische Zahlen[24])

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{x} + \frac{2^2 B_1}{2!} y - \frac{2^4 B_2}{4!} y^3 + \frac{2^6 B_3}{6!} - + \cdots\cdots,$$

wo $-\pi < y < \pi$.

Durch passende Umänderung, wobei noch $y = \frac{1}{2} x$ gesetzt wird, geht diese Formel über in

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{1}{2} x + \frac{B_1}{2!} x^2 - \frac{B_2}{4!} x^4 + \frac{B_3}{6!} x^6 - + \cdots\cdots$$

Daraus erhalten wir für $x = 0$ folgendes Wertesystem:

$$\varphi(0) = 1. \qquad \varphi''(0) = B_1.$$
$$\varphi'(0) = -\frac{1}{2}. \qquad \varphi''''(0) = -B_2.$$
$$\varphi'''(0) = 0. \qquad \varphi''''''(0) = B_3.$$
$$\varphi'''''(0) = 0.$$
$$\varphi^{(2m+1)}(0) = 0. \qquad \varphi^{(2m)}(0) = (-1)^{m-1} B_m. \qquad (\beta)$$

Zur Bestimmung von $\psi^p(0)$, $\psi^{p-1}(0)$, ... dient

$$\frac{e^{kx}-1}{x} = k + \frac{k^2}{2!}x + \frac{k^3}{3!}x^2 + \frac{k^4}{4!}x^3 + \cdots\cdots$$

Für $\psi^p(0)$ verschwinden alle Ableitungen, die x enthalten, und

$$\psi^p(0) = \frac{k^{p+1}}{p+1}. \qquad (\gamma)$$

Setzen wir die Werte (β) und (γ) in Formel (α) ein, so folgt gestützt auf eine leicht einzusehende kleine Veränderung

$$1^p + 2^p + 3^p + \cdots\cdots + (k-1)^p = \frac{k^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{2}k^p + \frac{1}{2}\binom{p}{1}B_1 k^{p-1} - \frac{1}{4}\binom{p}{3}B_2 k^{p-3} + \frac{1}{6}\binom{p}{5}B_3 k^{p-5} - + \cdots\cdots$$

Während die linke Seite nur Sinn hat für k als ganzen, positiven Wert, grösser als 1, kann die rechte Seite verallgemeinert werden; wir erhalten dann einen Ausdruck, der eine ganze, rationale Funktion darstellt. Um aber nicht Funktionen $(p+1)^{ten}$ Grades betrachten zu müssen, und um der höchsten Potenz von k oder z, wie allgemein üblich, den Koeffizienten 1 zu verschaffen, ersetzt Schlömilch p durch $(n-1)$, multipliziert mit m und definiert unter Vernachlässigung der linken Seite

$$\varphi(z, n) = z^n - \frac{1}{2}n z^{n-1} + \binom{n}{2}B_1 z^{n-2} - \binom{n}{4}B_2 z^{n-4} + \binom{n}{6}B_3 z^{n-6} - + \cdots\cdots \qquad (1)$$

als die «*Bernoullische Funktion n^{ter} Ordnung.*»

Die Herleitung dieser Fundamentalbeziehung verlangt, dass rechter Hand kein von z freier Term vorkommen darf; es ist dies eine Eigenschaft, welche die Allgemeinheit dieser Definition wesentlich einschränkt.[25])

Durch Vergleich erhalten wir folgende Definitionsformeln, welche die Bernoullischen Funktionen als Nullwerte von Differentialquotienten darstellen

$$\varphi(z, n) = n\, D_x^{n-1}\left\{\frac{e^{zx}-1}{e^x-1}\right\}_{x=0} = D_x^n\left\{x\,\frac{e^{zx}-1}{e^x-1}\right\}_{x=0}. \qquad (2)$$

Ausgehend von diesen beiden Hauptgleichungen hat Schlömilch die verschiedenen Eigenschaften der Bernoullischen Funktion genauer untersucht. Diese Definition stimmt nicht ganz mit derjenigen von Raabe überein.[25]) Die Resultate, zu denen Schlömilch gelangt, entsprechen denjenigen, die Raabe gefunden. Schlömilch ist der erste, welcher gezeigt hat, dass die Bernoullischen Funktionen Differentialquotienten sind; dass sich dadurch die Darstellung hübscher gestaltet, ist nicht zu bezweifeln; nur ist das Operieren damit hie und da ziemlich umständlich.

§ 8. Die Derivierten der Bernoullischen Funktion.

A. Die einfachen Differentialquotienten.

Um die Eigenschaften der Ableitungen von $\varphi(z, n)$ zu erfahren, differenzieren wir die gebrochene Funktion $\frac{e^{zx}-1}{e^x-1}$ $(m-1)$-mal nach x und einmal nach z und erinnern uns, dass die Reihenfolge der Operationen beliebig ist; demnach wird

$$D_z\, D_x^{n-1}\left\{\frac{e^{zx}-1}{e^x-1}\right\} = D_x^{n-1}\left\{x\,\frac{e^{zx}-1}{e^x-1} + \frac{x}{e^x-1}\right\}$$

$$= D_x^{n-1}\left\{\frac{e^{zx}-1}{e^x-1} + \varphi(x)\right\}.$$

Dies liefert für $x = 0$ unter Berücksichtigung der Definitionsgleichungen (2) $\qquad D_z\frac{\varphi(z,n)}{n} = \varphi(z, n-1) + \varphi^{(n-1)}(0).$

Trennen wir die gerade und die ungerade Bernoullische Funktion, so folgt unter Anwendung früherer Beziehungen

$$\frac{\partial}{\partial z}\,\varphi(z, 2m) = 2m\,.\,\varphi(z, 2m-1) \qquad \text{und} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\,\varphi(z, 2m+1) = (2m+1)\left\{\varphi(z, 2m) + (-1)^{m-1}\,B_m\right\}. \qquad (4)$$

Diese beiden Formeln entsprechen ganz denjenigen von Raabe. Infolge der etwas andern Definitionsgleichung zeigt hier die Ableitung der ungeraden Bernoullischen Funktion den Zusatz einer Bernoullischen Zahl, während bei Raabe die gerade.

B. Die wiederholten Differentialquotienten.

Schlömilch gibt dieselben nicht; doch sind sie durch successive Differentiation einfach zu finden; es resultieren, ausgehend von (3) und (4), folgende Formeln

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^{2\lambda}}{\partial z^{2\lambda}}\varphi(z,2m) = (2\lambda)!\binom{2m}{2\lambda}\left\{\varphi(z,2m-2\lambda)+(-1)^{m-\lambda-1}B_{m-\lambda}\right\}.\\
&\frac{\partial^{2\lambda+1}}{\partial z^{2\lambda+1}}\varphi(z,2m) = (2\lambda+1)!\binom{2m}{2\lambda+1}\varphi(z,2m-2\lambda-1).\\
&\frac{\partial^{2\lambda}}{\partial z^{2\lambda}}\varphi(z,2m+1) = (2\lambda)!\binom{2m+1}{2\lambda}\varphi(z,2m+1-2\lambda).\\
&\frac{\partial^{2\lambda+1}}{\partial z^{2\lambda+1}}\varphi(z,2m+1) = (2\lambda+1)!\binom{2m+1}{2\lambda+1}\left\{\varphi(z,2m-2\lambda)\right.\\
&\qquad\qquad\left.+(-1)^{m-\lambda-1}B_{m-\lambda}\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Die wiederholten Ableitungen der Bernoullischen Funktion sind wieder Bernoullische Funktionen; nur treten hier noch Faktoren und Bernoullische Zahlen dazu, welche die Darstellung etwas komplizieren.

C. Einfache Integralformen.

Multiplizieren wir die Formeln (3) und (4) mit dz und integrieren zwischen den Grenzen 0 und z, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^z \varphi(z,2m-1)\,dz = \frac{\varphi(z,2m)}{2m};\quad m>1 \qquad \text{und}\\
&\int_0^z \varphi(z,2m)\,dz = \frac{\varphi(z,2m+1)}{2m+1}+(-1)^m\,B_m\,.\,z.
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Die Integrale der Bernoullischen Funktion, nach Schlömilch definiert, sind wieder gleiche Funktionen, dividiert durch eine bestimmte Zahl; für die gerade Funktion tritt noch ein Produkt einer Bernoullischen Zahl mit einer Variabelen auf, das je nach dem Exponenten m entweder addiert oder subtrahiert wird.

Für die obere Grenze $z = \frac{1}{2}$ erhalten wir unter Anwendung der im folgenden § 9 zu beweisenden Formeln

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(z, 2m-1)\,dz &= \frac{(-1)^m \left\{2^{2m}-1\right\}}{m\,2^{2m}} B_m \quad \text{und} \\ \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(z, 2m)\,dz &= (-1)^m \frac{1}{2} B_m. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

§ 9. Die Funktion mit inversem Argument.

Wir ersetzen in $\frac{e^{zx}-1}{e^x-1}$ die Grösse z durch 1—z; dann geht durch leichte Umwandlung dieses über in $1 - \frac{e^{-zx}-1}{e^{-x}-1}$, und es wird

$$D_x^n \left\{ x \frac{e^{(1-z)x}-1}{e^x-1} \right\}_{x=0} = -D_x^n \left\{ x \frac{e^{-zx}-1}{e^{-x}-1} \right\}_{x=0}.$$

Ersetzen wir x durch $-\xi$, so wird

$$D_x^n \left\{ x \frac{e^{(1-z)x}-1}{e^x-1} \right\}_{x=0} = (-1)^n D_\xi^n \left\{ \xi \frac{e^{z\xi}-1}{e^\xi-1} \right\}_{\xi=0}.$$

Somit folgt nach Definitionsgleichung

$$\varphi(1-z, n) = (-1)^n \varphi(z, n). \tag{8}$$

Daraus ist ersichtlich, dass die Bernoullische Funktion für $z = \frac{1}{2}$ bis $z = 1$ in entgegengesetzter Reihenfolge dieselben Werte annimmt, welche sie von $z = 0$ bis $z = \frac{1}{2}$ hatte und zwar mit dem nämlichen oder mit entgegengesetztem Vorzeichen, je nachdem die Funktion von gerader oder ungerader Ordnung ist, was die Diskussion erleichtert.

Für die gerade Funktion folgt aus (8) und der Definitionsgleichung (1) für $x = 0$, dass

$$\varphi(1, 2m) = \varphi(0, 2m) = 0. \tag{9}$$

Für die ungerade Funktion wird für $z = 0$ und $z = \frac{1}{2}$, wie leicht einzusehen ist,

$$\varphi(1, 2m+1) = \varphi\left(\frac{1}{2}, 2m+1\right) = \varphi(0, 2m+1) = 0. \qquad (10)$$

Wir suchen nun einen Wert für $\varphi\left(\frac{1}{2}, 2m\right)$. Dazu ersetzen wir in der Definitionsformel (2) n durch 2m und z durch $\frac{1}{2}$; dann wird

$$\varphi\left(\frac{1}{2}, 2m\right) = D_x^{2m}\left\{x\frac{e^{\frac{x}{2}}-1}{e^x-1}\right\}_{x=0} = 2\,D_x^{2m}\left\{\frac{\frac{1}{2}x}{e^{\frac{x}{2}}+1}\right\}_{x=0}.$$

Es ist identisch gleich

$$\frac{\frac{1}{2}x}{e^{\frac{x}{2}}+1} = \frac{\frac{1}{2}x}{e^{\frac{x}{2}}-1} - \frac{x}{e^x-1} = \varphi\left(\frac{1}{2}x\right) - \varphi(x).$$

Durch 2m-malige Differentiation nach x und Multiplikation mit 2 erhalten wir für $x=0$ unter Berücksichtigung von $\varphi^{(2m)}(0) = (-1)^{m-1}B_m$ die Formel

$$\varphi\left(\frac{1}{2}, 2m\right) = (-1)^m \frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}} B_m. \qquad (11)$$

Diese Berechnungen der geraden und ungeraden Bernoullischen Funktion für verschiedene Argumente sind nur Spezialfälle eines allgemeinen Satzes, den Schlömilch wie folgt erhält. Er setzt in der Definitionsgleichung (2) für das Argument z der Reihe nach z, $\left(z+\frac{1}{k}\right)$, $\left(z+\frac{2}{k}\right)$, ..., $\left(z+\frac{k-1}{k}\right)$, addiert die so erhaltenen Ausdrücke, nimmt $\varphi(x) = \frac{x}{e^x-1}$ aus der Klammer und erhält die Summe

$$S = D_x^n\left\{\left[e^{zx}\left(1+e^{\frac{x}{k}}+e^{\frac{2x}{k}}+e^{\frac{3x}{k}}+\cdots\cdots+e^{\frac{(k-1)x}{k}}\right)-k\right]\varphi(x)\right\}_{x=0}.$$

Durch Summation der geometrischen Reihe in der Klammer folgt

$$S = D_x^n\left\{\left[e^{zx}\,\frac{e^x-1}{e^{\frac{x}{k}}-1} - k\right]\varphi(x)\right\}_{x=0}$$

und durch leichte Veränderung, wenn schliesslich $x = k\xi$, wird

$$S = \frac{1}{k^{n-1}} D_\xi^n\left\{\xi\,\frac{e^{kz\xi}-1}{e^\xi-1}\right\}_{\xi=0} + k\left\{\frac{1}{k^m}-1\right\}\varphi^m(0).$$

Für $n = gerade = 2m$ wird

$$\varphi(z, 2m) + \varphi\left(z + \frac{1}{k}, 2m\right) + \cdots\cdots + \varphi\left(z + \frac{k-1}{k}, 2m\right)$$
$$= \frac{1}{k^{2m-1}}\left\{\varphi(kz, 2m) + (-1)^m (k^{2m}-1) B_m\right\}. \quad (12)$$

Für $n = ungerade = (2m + 1)$ folgt

$$\varphi(z, 2m+1) + \varphi\left(z + \frac{1}{k}, 2m+1\right) + \cdots\cdots + \varphi\left(z + \frac{k-1}{k}, 2m+1\right)$$
$$= \frac{1}{k^{2m}} \varphi(kz, 2m+1). \quad (13)$$

Wir sehen hier wieder die Zweispurigkeit der geraden und ungeraden Bernoullischen Funktion.

Setzen wir $z = 0$ und $k = \frac{1}{2}$, so finden wir aus dieser allgemeinen Formel für $\varphi\left(\frac{1}{2}, 2m\right)$, also für die gerade Bernoullische Funktion, den schon früher gefundenen Wert (11). Ebenso lassen sich Ausdrücke finden für

$$\varphi\left(\frac{1}{3}, 2m\right), \quad \varphi\left(\frac{1}{4}, 2m\right) \text{ und } \varphi\left(\frac{1}{6}, 2m\right).$$

Für die ungerade Funktion kommen wir auf diese Weise zu keinen Spezialwerten.

§ 10. Die Funktion mit negativem Argument.

Um diese Funktion zu untersuchen, berechnet Schlömilch vorerst $\varphi(z+1, n)$. Nach Definitionsgleichung (2) wird durch Subtraktion

$$\varphi(z+1, n) - \varphi(z, n) = D_x^n \left\{ x \frac{e^{(z-1)x} - e^{zx}}{e^x - 1} \right\}_{x=0}$$
$$= D_x^n \left\{ x \frac{e^{zx}(e^x - 1)}{e^x - 1} \right\}_{x=0} = D_x^n \left\{ x e^{zx} \right\}_{x=0} = n z^{n-1}.$$
$$\varphi(z+1, n) = \varphi(z, n) + n z^{n-1}. \quad (14)$$

Durch Anwendung von (8) entsteht daraus

$$\varphi(-z, n) = (-1)^n \left\{ \varphi(z, n) + n z^{n-1} \right\}. \quad (15)$$

Es sind dies zwei wichtige Formeln; (14) dient dazu, aus einer Bernoullischen Funktion eine neue Bernoullische Funktion gleichen Grades, aber mit einem um die Einheit erhöhten Argument zu be-

rechnen; (15) wird gebraucht zur Verwandlung einer Bernoullischen Funktion mit negativem Argument in eine solche mit positivem.

Mit Hülfe von (14) findet Schlömilch eine Beziehung zur Darstellung der Werte der Bernoullischen Funktion auch ausserhalb des Intervalles von 0 bis 1. Lässt man nämlich z der Reihe nach die Werte $z+1,\ z+2,\ z+3, \cdots\cdots, (z+k-1)$ annehmen, wo k = positiv und ganz, und addiert dann die so erhaltenen Gleichungen, so wird

$$\varphi(z+k, n) = \varphi(z, n) + n\left\{z^{n-1} + (z+1)^{n-1} + (z+2)^{n-1} + \cdots\cdots + (z+k-1)^{n-1}\right\}. \quad (16)$$

Geben wir hierin dem k einen beliebigen ganzzahligen Wert, so können wir auch höhere Werte der Bernoullischen Funktion, ganze und gebrochene, berechnen, da z nicht ganzzahlig zu sein braucht und wir ja die Bernoullische Funktion im Intervall von 0 bis 1 genau kennen. Diese Formel wird uns die zur graphischen Darstellung der einzelnen Funktionen nötigen Werte liefern, wenn wir nicht vorziehen, solche direkt aus den Definitionsformeln zu berechnen.

Schlömilch verwandelt eine Bernoullische Funktion mit negativem Argument noch durch folgende einfache Formel, die er erhält, indem er in (8) für z den Wert $\left(z + \frac{1}{2}\right)$ setzt, in eine Funktion mit positivem Argument

$$\varphi\left(\frac{1}{2} - z, n\right) = (-1)^n \varphi\left(\frac{1}{2} + z, n\right), \quad (17)$$

die in einigen Fällen gute Dienste leistet. Aus dieser Formel ist auch ersichtlich, dass $\varphi\left(\frac{1}{2} + z, n\right)$ eine gerade oder ungerade Funktion ist, je nachdem n einen geraden oder ungeraden Wert hat. Daraus ist auch $\varphi\left(\frac{1}{2}, n\right)$ als Maximal- oder Minimalwert erkennbar.

Einzelne spezielle Werte, die Schlömilch nicht oder auf ganz andere Weise herleitet, findet *J. Worpitzky* gestützt auf Schlömilchs Definition wie folgt:[26])

1. Berechnung von $\varphi\left(\frac{1}{2}, n\right)$.

Wir ersetzen in (2) z durch $\frac{1}{2}$; dann wird

$$\varphi\left(\frac{1}{2}, n\right) = 2\,D_x^n\left\{\varphi\left(\frac{x}{2}\right) - \varphi(x)\right\} = -D_x^n \varphi(x)_0 \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}}.$$

Weil $D_x^{2m+1}\varphi(x)_0 = 0$ und $D_x^{2m}\varphi(x)_0 = (-1)^n B_n$, so wird für

$n = ungerade = (2m+1)$ $\quad \varphi\left(\frac{1}{2}, 2m+1\right) = 0$ und für

$n = gerade \quad = 2m$ $\quad \varphi\left(\frac{1}{2}, 2m\right) = (-1)^n \frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}} B_n.$ (18)

2. Berechnung von $\varphi\left(\frac{1}{4}, n\right)$.

Es ist identisch $\frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^x+1} = \frac{e^{\frac{3w}{4}}-1}{e^w-1} - \frac{e^{\frac{w}{4}}-1}{e^w-1}$, wo $w = 2x$, und somit wird nach Definition (2)

$$D_x^{n-1}\left\{\frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^x+1}\right\}_{x=0} = \frac{2^{n-1}}{n}\left\{\varphi\left(\frac{3}{4}, n\right) - \varphi\left(\frac{1}{4}, n\right)\right\}.$$

Nach (17) ist $\varphi\left(\frac{3}{4}, n\right) = (-1)^n \varphi\left(\frac{1}{4}, n\right)$; daher wird für

$n = gerade \quad = 2m.$ $\quad D_x^{2m-1}\left\{\frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^x+1}\right\}_{x=0} = 0$ und für

$n = ungerade = (2m+1).$ $\quad D_x^{2m}\left\{\frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^x+1}\right\}_{x=0}$

$$= -\frac{2^{2m+1}}{2m+1}\varphi\left(\frac{1}{4}, n\right).$$

Ebenso ist identisch

$$D_x^{n-1}\left\{\frac{e^{\frac{x}{4}}-1}{e^x-1}\right\}_{x=0} = \frac{1}{2} D_x^{n-1}\left\{\frac{1}{e^{\frac{x}{4}}+1} + \frac{1}{e^{\frac{x}{2}}+1} - \frac{e^{\frac{x}{4}}}{e^{\frac{x}{2}}+1}\right\}_{x=0} \quad (\alpha)$$

Es sind $D_x^{n-1}\left\{\frac{e^{\frac{x}{4}}}{e^{\frac{x}{2}}+1}\right\}_{x=0} = \frac{2^{n-1}}{n \cdot 2^{n-1}}\left\{(-1)^n - 1\right\}\varphi\left(\frac{1}{4}, n\right).$

$$D_x^{n-1}\left\{\frac{1}{e^{\frac{x}{4}}+1}\right\}_{x=0} = \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}}\varphi\left(\frac{1}{2}, n\right).$$

$$D_x^{n-1}\left\{\frac{1}{e^{\frac{x}{2}}+1}\right\}_{x=0} = \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{2}, n\right).$$

Substituieren wir diese letzten drei Werte in (α), so resultiert für $n = 2m$

$$\varphi\left(\frac{1}{4}, 2m\right) = \varphi\left(\frac{1}{2}, 2m\right)\frac{2^{2m-1}+1}{2^{2m}}. \quad (19)$$

Setzen wir in dieser interessanten Beziehung zwischen den Bernoullischen Funktionen mit Argument $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ für $\varphi\left(\frac{1}{2}, 2m\right)$ den früher gefundenen Wert, so erhalten wir

$$\varphi\left(\frac{1}{4}, 2m\right) = (-1)^m \frac{(2^{2m}-1)(2^{2m-1}+1)}{2^{4m-1}}. \qquad (20)$$

§ 11. Diskussion dieser Definition.

Wir könnten natürlich bei dieser Diskussion gleich verfahren wie bei Raabe. Schlömilch geht aber ganz anders vor, und wir wollen uns deshalb an seine Darstellungsweise halten.

Setzen wir für n der Reihe nach 1, 2, 3, ... , so nehmen die acht ersten Bernoullischen Funktionen folgende Werte an:

$$\varphi(z, 1) = z.$$
$$\varphi(z, 2) = z^2 - z = z(z-1).$$
$$\varphi(z, 3) = z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{1}{2}z = z(z-1)\left(z - \frac{1}{2}\right).$$
$$\varphi(z, 4) = z^4 - 2z^3 + z^2 = z^2(z-1)^2.$$
$$\varphi(z, 5) = z^5 - \frac{5}{2}z^4 + \frac{5}{3}z^3 - \frac{1}{6}z.$$
$$\varphi(z, 6) = z^6 - 3z^5 + \frac{5}{2}z^4 - \frac{1}{2}z^2.$$
$$\varphi(z, 7) = z^7 - \frac{7}{2}z^6 + \frac{7}{2}z^5 - \frac{7}{6}z^3 + \frac{1}{6}z.$$
$$\varphi(z, 8) = z^8 - 4z^7 + \frac{14}{3}z^6 - \frac{7}{3}z^4 + \frac{2}{3}z^2.$$

Schlömilch beginnt seine Diskussion mit dem einfachsten Fall, für $n = 2$ und führt sie mittelst den Differentialformeln (3) und (4) weiter.

Die erste Funktion $\varphi(z, 1) = z$ stellt wieder eine Winkelhalbierende durch den Ursprung und den ersten und dritten Quadranten dar. Hinsichtlich der zweiten Funktion $\varphi(z, 2) = z(z-1)$ erhellt unmittelbar, dass sie von $z = 0$ bis $z = \frac{1}{2}$ *negativ* bleibt und fortwährend abnimmt; der Wert $\varphi\left(\frac{1}{2}, 2\right) = -\frac{1}{4}$ ist ihr *absolutes Minimum* innerhalb dieses Intervalles.

Nach (4) wird $\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial z}\varphi(z, 3) = \varphi(z, 2) + B_1$. Die rechte Seite ist anfangs für $z = 0$ *positiv*, nimmt dann kontinuierlich ab und erhält für $z = \frac{1}{2}$ den *negativen* Wert $-\frac{1}{12}$, woraus folgt, dass es zwischen $z = 0$ und $z = \frac{1}{2}$ einen, aber auch nur einen Wert gibt, für welchen der Ausdruck verschwindet. Diesem Verhalten von $\varphi'(z, 3)$ gemäss, steigt anfangs $\varphi(z, 3)$, erreicht zwischen $z = 0$ und $z = \frac{1}{2}$ ein Maximum und fällt dann wieder. Jenes Steigen fängt an mit $\varphi(0, 3) = 0$; das nachherige Fallen hört auf mit $\varphi\left(\frac{1}{2}, 3\right) = 0$; die Funktion $\varphi(z, 3)$ bleibt also *positiv* während des Intervalles von 0 bis $\frac{1}{2}$; dazwischen liegt ein *Maximum*.

Formel (3) gibt $\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial z}\varphi(z, 4) = \varphi(z, 3)$, und da nach dem Vorigen die rechte Seite, mithin auch $\varphi'(z, 4)$ *positiv* ist, so findet bei $\varphi(z, 4)$ ein fortwährendes Wachstum statt; dieses beginnt mit $\varphi(0, 4) = 0$; mithin ist $\varphi(z, 4)$ *positiv* und *zunehmend*.

In Gleichung $\frac{1}{5}\frac{\partial}{\partial z}\varphi(z, 5) = \varphi(z, 4) - B_2$ ist die rechte Seite anfangs für $z = 0$ *negativ*, wird aber immer grösser und erreicht für $z = \frac{1}{2}$ ihren grössten Wert $\left(1 - \frac{1}{2^8}\right) B_2$, welcher *positiv* ist. Aus diesem Verhalten von $\varphi'(z, 5)$ folgt, dass $\varphi(z, 5)$ erst ab- und nachher wieder zunimmt. Die Abnahme fängt mit $\varphi(0, z) = 0$ an; die Zunahme hört mit $\varphi\left(\frac{1}{2}, 5\right)$ auf; somit bleibt $\varphi(z, 5)$ *negativ* von $z = 0$ bis $z = \frac{1}{2}$ und besitzt innerhalb dieses Intervalles ein *Minimum*.

Weil ferner $\frac{1}{6}\frac{\partial}{\partial z}\varphi(z, 6) = \varphi(z, 5)$ und die rechte Seite, also auch $\varphi'(z, 6)$ immer *negativ* ist, so nimmt $\varphi(z, 6)$ immer ab, mit $\varphi(0, 6) = 0$ anfangend; somit ist $\varphi(z, 6)$ *negativ* und *abnehmend*.

Wir überblicken augenscheinlich den Fortgang dieser Schlüsse, deren Gesamtergebnis sich graphisch darstellen lässt, wenn man z als Abszisse und $\varphi(z, n)$ als zugehörige rechtwinklige Ordinate konstruiert;

dann werden im Intervall von 0 bis 1 die Funktionen *gerader Ordnung* charakterisiert durch

Fig. 1.

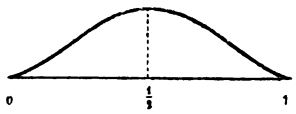


Fig. 2.

Fig. 1, wenn $n = 2, 6, 10, 14, \ldots\ldots, (4k-2)$,
Fig. 2, wenn $n = 4, 8, 12, 16, \ldots\ldots, (4k)$
und die Funktionen *ungerader Ordnung* durch

Fig. 3.

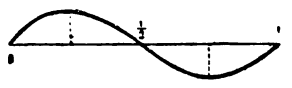


Fig. 4.

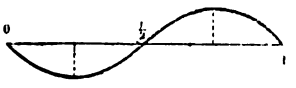


Fig. 3, wenn $n = 3, 7, 11, 15, \ldots\ldots, (4k-1)$,
Fig. 4, wenn $n = 5, 9, 13, 17, \ldots\ldots, (4k+1)$.

Auf eine genauere graphische Darstellung der verschiedenen Bernoullischen Funktionen werden wir im letzten Abschnitt eintreten.[27])

§ 12. Verwandlung der Bernoullischen Funktion in trig. Reihen.

Mit Hülfe der Schlömilchschen Definition als Differentialquotient lässt sich diese Funktion in eine nach cosinus oder sinus der Vielfachen eines Bogens fortschreitende Reihe entwickeln.

Aus der Theorie der Fourierschen Reihen und Integrale ist bekannt

$$f(z) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos\frac{\pi z}{n} + a_2 \cos\frac{2\pi z}{n} + a_3 \cos\frac{3\pi z}{n} + \cdots\cdots (0 \leqq z \leqq n),$$

wobei $$a_k = \frac{2}{n}\int_0^n f(z)\cos\frac{k\pi z}{n}\,dz.$$

Es sei $f(z) = \varphi(z, 2m)$ und $n = 1$; dann wird

$$\varphi(z, 2m) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos\pi z + a_2 \cos 2\pi z + a_3 \cos 3\pi z + \cdots\cdots$$

$$a_k = 2\int_0^1 \varphi(z, 2m)\cos k\pi z\,dz$$

$$= 2 D_x^{2m}\left\{\varphi(x)\int_0^1 (e^{xz} - 1)\cos k\pi z\,dz\right\}_{x=0}.$$

Die Integration lässt sich jetzt leicht ausführen, doch müssen wir die zwei Fälle getrennt betrachten:

1. $k = 0$, dann wird $\frac{1}{2} a_0 = D_x^{2m} \left\{ \varphi(x) \int_0^1 (e^{xz} - 1) dz \right\}_{x=0}$

$$= - \varphi^{(2m)}(0) = (-1)^m B_m.$$

2. $k > 0$, daher $a_k = 2 D_x^{2m} \left\{ \varphi(x) \left[\int_0^1 (e^{xz} \cos k \pi z \, dz - \int_0^1 \cos k \pi z \, dz \right] \right\}_{x=0}$ [38])

$$a_k = 2 D_x^{2m} \left\{ \varphi(x) \frac{e^x [(-1)^k x - x]}{x^2 + \pi^2 k^2} \right\}_{x=0}$$

Diese Formel wird für $k =$ *gerade* $a_k = 2(-1)^m \frac{(2m)!}{(k\pi)^{2m}}$.

„ $k =$ *ungerade* $a_k = 0$.

Demnach wird die gesuchte Reihenentwicklung

$$\varphi(z, 2m) = (-1)^m B_m + (-1)^{m-1} 2 \frac{(2m)!}{(\pi)^{2m}} \left\{ \frac{\cos 2\pi z}{2^{2m}} + \frac{\cos 4\pi z}{4^{2m}} + \frac{\cos 6\pi z}{6^{2m}} + \cdots \right\} \quad (21)$$

für $0 \leqq z \leqq 1$.

Auf ganz analoge Weise finden wir einen Ausdruck für die ungerade Bernoullische Funktion, so dass ist

$$\varphi(z, 2m-1) = (-1)^m 2 \frac{(2m-1)!}{\pi^{2m-1}} \left\{ \frac{\sin 2\pi z}{2^{2m-1}} + \frac{\sin 4\pi z}{4^{2m-1}} + \frac{\sin 6\pi z}{6^{2m-1}} + \cdots \right\} \quad (22)$$

für $0 \leqq z \leqq 1$; $n > 1$.

Schlömilch findet diese Formel (22) durch Differentiation der Reihe (21). Beide Formeln erinnern uns an die Raabeschen Definitionsformeln (4) und (5), von denen ja Raabe die meisten Eigenschaften seiner Bernoullischen Funktion herleitet.

Diese Reihen lassen darauf schliessen, dass die Bernoullische Funktion in enger Beziehung zu den Kreisfunktionen steht, was auch J. Worpitzky in einer Studie über «Bernoullische und Eulersche Zahlen» beweist.[39])

Er zeigt, dass der Spezialwert einer geraden Ableitung der Cotangente eines Argumentes, multipliziert mit dem Argument selbst, sich durch eine Bernoullische Zahl wie folgt ausdrücken lässt

$$D_x^{2m}\left\{x \operatorname{cotg} x\right\}_{x=0} = -2^{2m} B_m.$$

Ebenso lässt sich der Nullwert der geraden Ableitungen der trig. Tangente durch eine Bernoullische Zahl oder durch eine Bernoullische Funktion vom Argument $\frac{1}{2}$ ausdrücken, so dass ist

$$D_x^{2m}\left\{\operatorname{tg} x\right\}_{x=0} = 2^{2m-1}\,\frac{(2^{2m}-1)}{m}\,B_m.$$

Schliesslich ist auch der Nullwert der geraden Ableitung der Sekante durch eine Bernoullische Funktion darstellbar, indem wird

$$D_x^{2m}\left\{\sec x\right\}_{x=0} = (-1)^{m+1}\,\frac{2^{4m+2}}{2m+1}\,\varphi\left(\frac{1}{4}, 2m+1\right).$$

§ 13. Die Bernoullische Funktion in bestimmten Integralen.

Ausser den einfachen Integralwerten in § 8 dieses Abschnittes gibt Schlömilch weder in seinem Compendium, noch in der erwähnten Abhandlung in Band I der Zeitschrift für Mathematik und Physik andere Integralausdrücke mit Bernoullischen Funktionen, abgesehen von der Bernoullischen Funktion, welche der Restausdruck bei der Summierung der allgemeinen Differenzenreihe enthält, und dem Restgliede der Maclaurinschen Summenformel, das unter dem Integralzeichen ebenfalls eine Bernoullische Funktion aufweist.[30]) Auch bei Worpitzky finden sich keine Integralformeln der Bernoullischen Funktion, doch lassen sich den Raabeschen Formen entsprechende Ausdrücke mit Leichtigkeit aufstellen.

III. Die Bernoullische Funktion nach L. Schläfli.

§ 14. Herleitung der Definition.

Schläfli geht aus von der Summe

$$S_m = 1^m + 2^m + 3^m + 4^m + \cdots\cdots + (x-1)^m;$$

gibt er dem m die Werte 0, 1, 2, ... , m, so erhält er (m+1) Summen S_0, S_1, S_2, ... , S_m. Diese multiplizieren wir der Reihe

nach mit $y^0, \frac{y^1}{1!}, \frac{y^2}{2!}, \ldots\ldots, \frac{y^m}{m!}$, so folgt

$$\frac{S_0 y^0}{0!} = 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + 1.$$

$$\frac{S_1 y^1}{1!} = \frac{y}{1!} + \frac{2y}{1!} + \frac{3y}{1!} + \ldots\ldots + \frac{[x-1]y}{1!}.$$

$$\frac{S_2 y^2}{2!} = \frac{y^2}{2!} + \frac{(2y)^2}{2!} + \frac{(3y)^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{[(x-1)y]^2}{2!}.$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$\frac{S_m y^m}{m!} = \frac{y^m}{m!} + \frac{(2y)^m}{m!} + \frac{(3y)^m}{m!} + \ldots\ldots + \frac{[(x-1)y]^m}{m!}.$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

Addieren wir die senkrecht untereinanderstehenden Kolonnen, so erhalten wir, wenn bis ins Unendliche ausgedehnt wird,

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{S_m y^m}{m!} = 1 + e^y + e^{2y} + e^{3y} + \ldots\ldots + e^{(x-1)y} = \frac{e^{xy}-1}{e^y-1}.$$

Wir denken uns die Gleichung mit y multipliziert und dann zerrissen; so erhalten wir eine Beziehung, aus welcher wir die Bernoullischen Zahlen ebenso leicht herleiten können wie die Bernoullische Funktion. Wir definieren daher

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{S_m y^{m+1}}{m!} = \frac{y e^{xy}}{e^y-1} - \frac{y}{e^y-1} \qquad (1)$$

als die ***Fundamentalgleichung der Bernoullischen Zahlen und Bernoullischen Funktionen.***

Der erste Bruch für sich betrachtet führt auf die Bernoullische Funktion, während der zweite auf die Bernoullischen Zahlen leitet.

Wir nehmen deshalb an, es sei

$$\frac{y e^{xy}}{e^y-1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \chi(n, x)\, y^n \quad \text{und} \qquad (2)$$

definieren $\chi(0, x) =$ Konstante $= 1$ und $\chi(n, x)$ als n^{te} ***Bernoullische Funktion.*** Die Koeffizienten der Potenzen von y sind also die Bernoullischen Funktionen, und wir wollen für die n^{te} Bernoullische Funktion $\chi(n, x)$ einen Ausdruck suchen. Es wird

$$\frac{y\,e^{xy}}{e^y-1} = \frac{y}{e^y-1}\,e^{xy} = \left\{1 + c_1 y + c_2 y^2 + \cdots\cdots + c_\lambda y^\lambda + \cdots\cdots\right\} \times$$
$$\left\{1 + \frac{xy}{1!} + \frac{x^2y^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{x^{n-\lambda}\,y^{n-\lambda}}{(n-\lambda)!} + \cdots\right\}.$$

Der allgemeine Term, welcher y^n liefert, lautet

$$\text{Koeffizient von } y^n = [y^n] \overset{31)}{=} \frac{c_\lambda x^{n-\lambda}}{(n-\lambda)!}.$$

Daher wird
$$\frac{y\,e^{xy}}{e^y-1} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{c_\lambda x^{n-\lambda}}{(n-\lambda)!}\,y^n.$$

Diese Gleichung stellt denselben Wert dar wie Beziehung (2); durch Vergleichung beider folgt als Wert für $\chi(n, x)$

$$\chi(n,x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{c_\lambda x^{n-\lambda}}{(n-\lambda)!} = \frac{c_0 x^n}{n!} + \frac{c_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{\lambda=2}^{\lambda=n} \frac{c_\lambda x^{n-\lambda}}{(n-\lambda)!}.$$

Bei der letzten Summe ist ersichtlich, wie auch schon früher, dass infolge der Fakultät im Nenner λ nur bis $\lambda = n$ gehen darf.

Aus der Theorie der Bernoullischen Zahlen ist bekannt, dass bei Entwicklung von $\frac{y}{e^y-1}$ folgende Koeffizienten c_λ auftreten:

$$c_0 = 1;\ c_1 = -\frac{1}{2};\ c_{2\lambda-1} = 0;\ c_{2\lambda} = (-1)^{\lambda-1}\frac{B_\lambda}{(2\lambda)!};$$

daher wird, wenn wir noch für λ den Wert (2λ) setzen,

$$\chi(n,x) = \frac{x^n}{n!} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{n}{2}} (-1)^{\lambda-1}\frac{B_\lambda}{(2\lambda)!\,(n-2\lambda)!}\,x^{n-2\lambda}.$$

Da aber $\frac{n!}{(2\lambda)!\,(n-2\lambda)!} = \binom{n}{2\lambda}$, so definieren wir die «n^{te} *Bernoullische Funktion*» durch

$$\chi(n,x) = \frac{1}{n!}\left\{x^n - \frac{n}{2}x^{n-1} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{n}{2}} (-1)^{\lambda-1}\binom{n}{2\lambda} B_\lambda x^{n-2\lambda}\right\}. \quad (3)$$

Wir können die obere Grenze in der Summe weglassen, wenn wir bedenken, dass für $\lambda = \frac{n}{2}$ der Ausdruck $\binom{n}{n} = 1$, ebenso

$x^0 = 1$ wird und für ein grösseres λ zufolge von $\binom{n}{n+\mu} = 0$, wenn μ positiv, die Summe stets zu Null wird; die Reihe bricht also von selbst ab. Der Hauptunterschied dieser Definition gegenüber den beiden ersten ist der, dass auf der rechten Seite auch Terme mit x^0, also solche, die x gar nicht mehr enthalten, vorkommen dürfen, was diese Definition viel allgemeiner macht. Auch der vorgesetzte Faktor $\frac{1}{n!}$ leistet gute Dienste, da er das Konvergenzgebiet der Funktion vergrössert.[32]) Die kürzere Schreibweise durch Einführung der Summenformel könnte bei den übrigen Definitionen auch angewendet werden.

§ 15. Die Derivierten dieser Funktion.

A. Einfache Differentialquotienten.

Wir wollen vorerst die gerade und ungerade Bernoullische Funktion trennen. Ist n gerade, so wird für

1. $n =$ gerade $= 2m$.

$$\frac{\partial}{\partial x}\chi(2m,x) = \frac{1}{(2m)!}\left\{2m\,x^{2m-1} - \frac{2m(2m-1)}{2}x^{2m-2} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m}(-1)^{\lambda-1}\binom{2m}{2\lambda}B_\lambda(2m-2\lambda)\,x^{2m-2\lambda-1}\right\},$$

$$= \frac{1}{(2m-1)!}\left\{x^{2m-1} - \frac{2m-1}{2}x^{2m-2} + \sum_{\lambda=1}^{\substack{\lambda=m\\ \lambda=m-1}}(-1)^{\lambda-1}\binom{2m-1}{2\lambda}B_\lambda\,x^{2m-2\lambda-1}\right\}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\chi(2m,x) = \chi(2m-1,x).$$

2. $n =$ ungerade $= (2m+1)$. Dann ist

$$\frac{\partial}{\partial x}\chi(2m+1,x) = \frac{1}{(2m+1)!}\left\{(2m+1)x^{2m} - (2m+1)\frac{2m}{2}x^{2m-1} + \sum_{\lambda=1}(-1)^{\lambda-1}\binom{2m+1}{2\lambda}B_\lambda(2m+1-2\lambda)\,x^{2m-2\lambda}\right\}$$

$$= \frac{1}{(2m)!}\left\{ x^{2m} - \frac{2m}{2} x^{2m-1} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} (-1)^{\lambda-1} \binom{2m}{2\lambda} B_\lambda x^{2m-2\lambda} \right\}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \chi(2m+1, x) = \chi(2m, x).$$

Wir haben beide Funktionen getrennt betrachtet wegen der obern Grenze; wir hätten aber ebenso gut direkt von (3) ausgehen können und dann erhalten

$$\frac{\partial}{\partial x} \chi(n, x) = \chi(n-1, x). \qquad (4)$$

Die Ableitung einer Bernoullischen Funktion wird gefunden, indem man den Exponenten um die Einheit vermindert.

B. Die wiederholten Differentialquotienten.

Gestützt auf (4) werden

$$D^2 \chi(n, x) = D \chi(n-1, x) = \chi(n-2, x).$$
$$D^3 \chi(n, x) = \chi(n-3, x).$$
— — — — — — — —
$$D^\lambda \chi(n, x) = \chi(n-\lambda, x). \qquad (5)$$

Die wiederholte Ableitung einer Bernoullischen Funktion wird gefunden, indem man den Exponenten um die Zahl, welche die Anzahl der Ableitungen angibt, vermindert.

Wir finden hier den ersten grossen Vorteil dieser Funktion gegenüber den zwei frühern Definitionen; es treten keine Bernoullischen Zahlen zu den Ableitungen; die Definition ist demnach allgemeiner und liefert einfachere Resultate.

C. Einfache Integralformen.

Da die Differentialformeln sich einfacher gestalten, so thun dies auch die Integralformeln. Auch hier können wir vom allgemeinen Fall ausgehen und es resultiert

$$\int_0^x \chi(n-1, x)\, dx = \left\{ \chi(n, x) \right\}_0^x.$$

Da, wie wir später sehen werden, $\chi(2m, 0) = (-1)^{m-1} \frac{B_m}{(2m)!}$ und $\chi(2m+1, 0) = 0$, so entstehen die beiden Beziehungen

$$\int_0^x \chi(2m-1, x)\,dx = \chi(2m, x) + (-1)^m \frac{B_m}{(2m)!} \quad \text{und} \quad (6)$$

$$\int_0^x \chi(2m, x)\,dx = \chi(2m+1, x). \quad (7)$$

Durch Integration wird somit der Exponent um die Einheit erhöht. *Das bestimmte Integral zwischen den Grenzen 0 und x einer Bernoullischen Funktion ist wieder eine Bernoullische Funktion mit um die Einheit erhöhtem Exponenten und ± einer Bernoullischen Zahl für die ungerade Bernoullische Funktion.*

Wir haben hier insofern eine Vereinfachung, als das Argument bei der Bernoullischen Zahl fehlt, das bei Raabe und Schlömilch noch hinzutritt.

Für die obere Grenze $x = \frac{1}{2}$ wird nach (7)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \chi(2m, x)\,dx = \chi\left(2m+1, \frac{1}{2}\right) = 0$$

und nach (6)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \chi(2m-1, x)\,dx = \chi\left(2m, \frac{1}{2}\right) + (-1)^m \frac{B_m}{(2m)!}.$$

Setzen wir für $\chi\left(2m, \frac{1}{2}\right)$ den später zu beweisenden Wert[88]) ein, so wird

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \chi(2m-1, x)\,dx = (-1)^m \frac{B_m}{(2m)!} \cdot \frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}.$$

§ 16. Die Bernoullische Funktion mit inversem Argument.

Ersetzen wir in (2) den Wert x durch (1—x), so wird

$$-\frac{y\,e^{(1-x)y}}{e^y-1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \chi(n, 1-x)\,y^n, \text{ d. h.,}$$

$$\chi(n, 1-x) = [y^n] \text{ in } \frac{y\, e^{(1-x)y}}{e^y - 1}.$$

Nun wird

$$\frac{y\, e^{(1-x)y}}{e^y - 1} = (-y)\frac{e^{x(-y)}}{e^{(-y)} - 1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \chi(n, x)(-y)^n = \sum_{n=0}^{n=\infty} \chi(n, x) y^n (-1)^n;$$

somit ist $$\chi(n, 1-x) = (-1)^n \chi(n, x). \qquad (8)$$

Daraus folgt für $x = 0$ unter Anwendung der Definitionsgleichung (3), wenn $n = gerade = 2m$

$$\chi(2m, 0) = \chi(2m, 1) = (-1)^{m-1} \frac{B_m}{(2m)!}, \qquad (9)$$

dagegen für $n = ungerade = (2m+1)$, wenn x auch $= \frac{1}{2}$,

$$\chi(2m+1, 0) = \chi\left(2m+1, \frac{1}{2}\right) = \chi(2m+1, 1) = 0, \text{ d. h.,} \qquad (10)$$

alle Bernoullischen Funktionen ungerader Ordnung verschwinden für die Argumente 0, $\frac{1}{2}$ und 1.

Wir fragen uns nun, was wird aus $\chi\left(2m, \frac{1}{2}\right)$. Um diesen Wert ausmitteln zu können, müssen wir vorerst über die Vervielfachung des Argumentes aufgeklärt sein.

Wir denken uns die χ-Funktionen $\chi(n, x)$, $\chi\left(n, x + \frac{1}{k}\right)$, $\chi\left(n, x + \frac{2}{k}\right), \ldots\ldots\ldots, \chi\left(n, x + \frac{k-1}{k}\right)$ aufgefasst als Koeffizienten von y^n in den dazu gehörenden Entwicklungen; dann addieren wir diese; die Summe T wird, wenn wir dieselbe als geometrische Progression summieren,

$$T = \frac{1}{e^y - 1} \cdot \frac{e^y - 1}{e^{\frac{y}{k}} - 1}\, y\, e^{xy} = \frac{y\, e^{xy}}{e^{\frac{y}{k}} - 1}, \text{ also}$$

$$\chi(n, x) + \chi\left(n, x + \frac{1}{k}\right) + \cdots + \chi\left(n, x + \frac{k-1}{k}\right) = [y^n] \text{ in } \frac{y\, e^{xy}}{e^{\frac{y}{k}} - 1}.$$

Es ist aber $$\frac{y\, e^{xy}}{e^{\frac{y}{k}} - 1} = \frac{k\left(\frac{y}{k}\right) e^{kx\left(\frac{y}{k}\right)}}{e^{\left(\frac{y}{k}\right)} - 1} = k \sum_{n=0}^{n=\infty} \chi(n, kx) \left(\frac{y}{k}\right)^n.$$

$$[y^n] = \frac{1}{k^{n-1}}\,\chi(n, kx).$$

Daraus ergibt sich

$$\chi(n, x) + \chi\left(n, x + \frac{1}{k}\right) + \chi\left(n, x + \frac{2}{k}\right) + \cdots\cdots + \chi\left(n, x + \frac{k-1}{k}\right) = \frac{1}{k^{n-1}}\,\chi(n, kx) \qquad (11)$$

als wichtige Formel, die über jede Vervielfachung des Argumentes Auskunft gibt. Infolge von $\frac{k-1}{k}$ bricht die Reihe links von selbst ab. Die beiden entsprechenden Formeln der frühern zwei Definitionen lieferten stets zwei getrennte Werte, je nachdem die Bernoullische Funktion gerade oder ungerade war. Wir ersehen auch daraus, dass die so definierte Bernoullische Funktion die allgemeinere ist; zudem ist diese Herleitung vorliegender Formel wesentlich einfacher als bei Raabe und Schlömilch.

Aus derselben lassen sich verschiedene Spezialwerte berechnen.

I. Verdopplung des Argumentes. $k = 2$.

$$\chi(n, x) + \chi\left(n, x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}\,\chi(n, 2x).$$

Ersetzen wir in (8) die Grösse x durch $\left(x + \frac{1}{2}\right)$ und setzen diesen Wert in die letzte Formel ein, so wird

$$\chi(n, x) + (-1)^n\,\chi\left(n, \frac{1}{2} - x\right) = \frac{1}{2^{n-1}}\,\chi(n, 2x). \qquad (\alpha)$$

Ist darin $x = 0$ *und* $n =$ *ungerade* $= (2m+1)$, so wird

$$\chi\left(2m+1, \frac{1}{2}\right) = 0;$$

dagegen wird für $x = 0$ *und* $n =$ *gerade* $= 2m$, wenn für $\chi(2m, 0)$ der bekannte Wert gesetzt wird,

$$\chi\left(2m, \frac{1}{2}\right) = (-1)^m\,\frac{2^{2m-1}-1}{2^{2m-1}} \cdot \frac{B_m}{(2m)!} \qquad (12)$$

II. Verdreifachung des Argumentes. $k = 3$.

$$\chi(n, x) + \chi\left(n, x + \frac{1}{3}\right) + \chi\left(n, x + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3^{n-1}}\,\chi(n, 3x). \qquad (\beta)$$

Unter Anwendung von (8) wird für $x = 0$

$$\chi(n,0)+\chi\left(n,\frac{1}{3}\right)+(-1)^n\chi\left(n,\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{3^{n-1}}\chi(n,0);$$

n = *ungerade* liefert die identische Gleichung $0=0$; dagegen ist für n = *gerade*, wenn für $\chi(2m,0)$ der gefundene Wert gesetzt wird,

$$\chi\left(2m,\frac{1}{3}\right)=(-1)^m\frac{1}{2}\cdot\frac{3^{2m-1}-1}{3^{2m-1}}\cdot\frac{B_m}{(2m)!}. \qquad (13)$$

Aus Gleichung (α) resultiert für $x=\frac{1}{3}$ und $n=2m$

$$\chi\left(2m,\frac{2}{3}\right)=2^{2m-1}\left\{\chi\left(2m,\frac{1}{3}\right)+\chi\left(2m,\frac{1}{6}\right)\right\}. \qquad (\gamma)$$

Einen Wert für $\chi\left(2m,\frac{1}{6}\right)$ erhalten wir, wenn wir in (β) für $x=\frac{1}{6}$ und $n=2m$ setzen; es ist dann

$$\chi\left(2m,\frac{1}{6}\right)+\chi\left(2m,\frac{1}{2}\right)+\chi\left(2m,\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{3^{2m-1}}\chi\left(2m,\frac{1}{2}\right).$$

Daraus folgt, wenn für $\chi\left(2m,\frac{1}{2}\right)$ der früher gefundene Wert (12) gesetzt wird,

$$\chi\left(2m,\frac{1}{6}\right)=(-1)^m\frac{1}{2}\cdot\frac{(2^{2m-1}-1)(1-3^{2m-1})}{6^{2m-1}}\cdot\frac{B_m}{(2m)!}. \qquad (14)$$

Setzen wir die gefundenen Formeln (13) und (14) in (γ) ein, so ist, was zwar einfacher aus Formel (8) für $x=\frac{2}{3}$ und $n=2m$ hervorgeht,

$$\chi\left(2m,\frac{2}{3}\right)=(-1)^m\frac{1}{2}\cdot\frac{3^{2m-1}-1}{3^{2m-1}}\cdot\frac{B_m}{(2m)!}. \qquad (15)$$

Wir hätten schon dort die zwei Sätze aufstellen können:

1. *Jede zwei geraden Bernoullischen Funktionen, deren Argumente sich zu 1 ergänzen, sind nach absolutem Wert und nach Vorzeichen einander gleich.*
2. *Jede zwei ungeraden Bernoullischen Funktionen, deren Argumente sich zu 1 ergänzen, sind wohl dem Vorzeichen nach entgegengesetzt, dem absoluten Werte nach aber gleich.*

III. Vierfaches Argument. $k = 4$.

$$\chi(n, x) + \chi\left(n, x + \frac{1}{4}\right) + \chi\left(n, x + \frac{1}{2}\right) + \chi\left(n, x + \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4^{n-1}}\chi(n, 4x).$$

Für $x = 0$ wird unter Anwendung von Formel (8) und Einsetzen der Werte für $\chi(2m, 0)$ und $\chi\left(2m, \frac{1}{2}\right)$ für die gerade Bernoullische Funktion

$$\chi\left(2m, \frac{1}{4}\right) = \chi\left(2m, \frac{3}{4}\right) = (-1)^m \frac{2^{2m-1}-1}{2^{4m-1}} \cdot \frac{B_m}{(2m)!}. \quad (16)$$

Auf ähnliche Weise lassen sich $\chi\left(2m, \frac{5}{6}\right)$, $\chi\left(2m, \frac{1}{8}\right)$, ..., $\chi\left(2m, \frac{7}{8}\right)$ und andere χ-Funktionen berechnen; die Ausdrücke werden aber ziemlich kompliziert.

§ 17. Die Bernoullische Funktion mit negativem Argument.

Wir können auf zwei getrennten Wegen das Verhalten der Bernoullischen Funktion mit negativem Argument untersuchen. Vorerst gehen wir von der Definitionsformel (3) aus, müssen aber dabei die geraden und ungeraden Funktionen getrennt betrachten.

1. Die gerade Bernoullische Funktion. Wir ersetzen in (3) n durch $2m$ und x durch $(-x)$; dann wird

$$\chi(2m, -x) = \frac{1}{(2m)!}\left\{x^{2m} + \frac{2m}{2}x^{2m-1} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m}(-1)^{\lambda-1}\binom{2m}{2\lambda}B_\lambda x^{2m-2\lambda}\right\}.$$

Durch Addition und Subtraktion desselben Ausdruckes $\frac{2m\,x^{2m-1}}{(2m)!}$ und passendes Zusammennehmen wird

$$\chi(2m, -x) = \chi(2m, x) + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}.$$

2. Die ungerade Bernoullische Funktion. Durch analoges Verfahren wird

$$\chi(2m+1, -x) = \frac{1}{(2m+1)!}\left\{-x^{2m+1} - \frac{2m+1}{2}x^{2m}\right.$$

$$+\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m}(-1)^{\lambda-1}\binom{2m+1}{2\lambda}B_\lambda(-x)^{2m+1-2\lambda}\Bigg\}.$$

Hier addieren und subtrahieren wir $\frac{(2m+1)x^{2m}}{(2m+1)!}$; nun ist

$$\chi(2m+1,-x) = -\chi(2m+1,x) - \frac{x^{2m}}{(2m)!}.$$

Eine *allgemeine* Formel für die Bernoullische Funktion mit negativem Argument finden wir aus folgender Betrachtung:

Ersetzen wir in Formel (2) den Wert x durch (1+x), so ist

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\chi(n,1+x)\,y^n = \frac{y\,e^{(1+x)y}}{e^y-1}. \qquad (\alpha)$$

$$\frac{y\,e^{(1+x)y}}{e^y-1} = y\,e^{xy} + \frac{y\,e^{xy}}{e^y-1} = y\,e^{xy} + \sum_{n=0}^{n=\infty}\chi(n,x)\,y^n.$$

Durch Reihenentwicklung von e^{xy} folgt

$$\frac{y\,e^{(1+x)y}}{e^y-1} = \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{x^{n-1}y^n}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{n=\infty}\chi(n,x)\,y^n. \qquad (\beta)$$

Vergleichen wir die Koeffizienten von y^n der Gleichungen (α) und (β), so erhalten wir

$$\chi(n,1+x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \chi(n,x). \qquad (17)$$

Ersetzen wir darin x durch (−x), so wird unter Berücksichtigung von (8)

$$\chi(n,-x) = (-1)^n\left\{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \chi(n,x)\right\}. \qquad (18)$$

Diese Formel geht für $n = 2m$ und $n = (2m+1)$ in die eingangs dieses Paragraphen hergeleiteten über. Sie dient zur Berechnung der Bernoullischen Funktion mit negativem Argument. Auch hier zeigt sich wieder die Vereinfachung, da Raabe und Schlömilch je zwei entsprechende Formeln nötig haben.

Um die χ-Funktion auch ausserhalb des Intervalles 0 bis 1 zu untersuchen, dient eine Formel, welche wir erhalten, indem wir in (17) für (x+1) der Reihe nach setzen (x+1), (x+2), ... , (x+k) und sämtliche so entstandenen Gleichungen addieren; es wird dann

$$\chi(n, k+x) = \chi(n, x) + \frac{1}{(n-1)!}\left\{ x^{n-1} + (1+x)^{n-1} + (2+x)^{n-1} + \cdots\cdots + (k-1+x)^{n-1}\right\}. \qquad (19)$$

Eine weitere Formel zur Untersuchung der Bernoullischen Funktion mit negativem Argument, die uns gute Dienste zur numerischen Ausrechnung und Kontrolle der Werte leistet, finden wir, wenn wir in (8) für x den Wert $\left(x + \frac{1}{2}\right)$ setzen; dieselbe geht dann über in

$$\chi\left(n, \frac{1}{2} - x\right) = (-1)^n \chi\left(n, \frac{1}{2} + x\right). \qquad (20)$$

Diese Formel charakterisiert uns den Punkt $x = \frac{1}{2}$ als *Maximal-* oder *Minimalstelle.*

§ 18. Diskussion dieser Definition.

Setzen wir in der Definitionsformel (3) der Reihe nach für n die Werte 1, 2, 3, ..., so nehmen die acht ersten Funktionen dieser Definition folgende Werte an, die nacheinander diskutiert werden sollen:

$$\chi(1, x) = x - \frac{1}{2}.$$

$$\chi(2, x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}.$$

$$\chi(3, x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12}.$$

$$\chi(4, x) = -\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{24} - \frac{1}{720}.$$

$$\chi(5, x) = -\frac{x^5}{120} - \frac{x^4}{48} + \frac{x^3}{72} - \frac{x}{720}.$$

$$\chi(6, x) = \frac{x^6}{720} - \frac{x^5}{240} + \frac{x^4}{288} - \frac{x^2}{1440} + \frac{1}{30240}.$$

$$\chi(7, x) = \frac{x^7}{5040} - \frac{x^6}{1440} + \frac{x^5}{1440} - \frac{x^3}{4320} + \frac{x}{30240}.$$

$$\chi(8, x) = \frac{x^8}{40320} - \frac{x^7}{10080} + \frac{x^6}{8640} - \frac{x^4}{17280} + \frac{x^2}{60480} - \frac{1}{1.209600}.$$

Wir gelangen hier zu ähnlichen Resultaten wie früher; da aber auf der rechten Seite auch Terme vorkommen dürfen, die von der Variabelen befreit sind, so ist leicht ersichtlich, dass nur die ungeraden Bernoullischen Funktionen für die Werte $x = 0$ und $x = 1$ erfüllt sind; das Glied der geraden Bernoullischen Funktion, das die Veränderliche nicht enthält, gibt für das Argument 0 und 1 sofort den Wert der ganzen Funktion an.

$\chi(1, x) = x - \frac{1}{2}$ stellt eine Gerade dar, die aber für diese Definition nicht mehr durch den Ursprung geht.

$\chi(2, x)$ ist die Gleichung einer Parabel; die Funktion besitzt ein Minimum bei $x = \frac{1}{2}$ vom Werte $\chi\left(2, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12}$.

$\chi(3, x)$ besitzt im Intervall 0 bis 1 sowohl ein Maximum als ein Minimum, und zwar liegt ersteres bei $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3}$, das letztere dagegen bei $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3}$; zudem ist $\chi\left(3, \frac{1}{2}\right) = 0$; diese Kurve, analytisch gesprochen, ist eine Art Parabel höhern Grades.

Die Funktion $\chi(4, x)$ besitzt bei $x = \frac{1}{2}$ ein Maximum vom Werte $\frac{7}{5760}$; zudem ergeben sich zwei Minima bei $x = 0$ und $x = 1$, so dass $\chi(4, 0) = \chi(4, 1) = -\frac{1}{720}$.

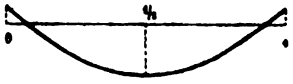
Was $\chi(5, x)$ anbetrifft, so ist diese Funktion als ungerade Bernoullische Funktion erfüllt für $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ und $x = 1$; sie weist ein Maximum auf zwischen $\frac{1}{2}$ und 1, wie auch ein Minimum zwischen 0 und $\frac{1}{2}$.

Alle diese höhern Bernoullischen Funktionen stellen Parabeln höherer Ordnung dar.

Wir erhalten somit folgende Bilder des Verlaufes der Bernoul-

lischen Funktion zwischen den Grenzen 0 und 1; im wesentlichen stimmen sie mit den bei Schlömilch dargestellten überein.

Figur 1.

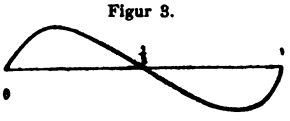


Figur 2.

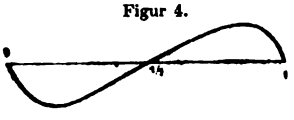
Die Funktionen sind charakterisiert durch[84])

Figur 1, wenn $n = 2, 6, 10, \ldots\ldots, (4k-2)$.
» 2, » $n = 4, 8, 12, \ldots\ldots, 4k$,
» 3, » $n = 3, 7, 11, \ldots\ldots, (4k-1)$,
» 4, » $n = 5, 9, 13, \ldots\ldots, (4k+1)$.

Figur 3.



Figur 4.



§ 19. Entwicklung der Bernoullischen Funktion in Reihen.

Wir könnten hier analog verfahren wie Schlömilch[85]); zudem würden wir noch viel rascher ans Ziel kommen, da das Integral, welches bei dieser Herleitung auszuwerten ist, leicht dargestellt werden kann.[86]) Schläfli geht aber ganz auf seine Art und Weise vor; er untersucht vorerst, was wird aus

$$\frac{\alpha}{\lambda-\alpha} = \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\alpha^2}{\lambda^2} + \cdots\cdots\cdots + \frac{\alpha^n}{\lambda^n} + \cdots\cdots\cdots = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\alpha^n}{\lambda^n}.$$

Multiplizieren wir mit x^λ, so wird

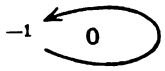
$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^\lambda}{\lambda^n} = \left[\alpha^n\right] \text{ in } \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\alpha x^\lambda}{\lambda-\alpha}. \qquad (\alpha)$$

Laut Theorie der Gammafunktion gilt für ein beliebiges a die Beziehung[87])

$$\int_{-1 \;\circlearrowleft\; 0} x^{-a}(1-x)^{b-1}\,dx = 2i \sin a\pi \,\frac{\Gamma(1-a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(b-a+1)};$$

substituieren wir für a den Wert (1—n) und setzen $b = 1$, so wird

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2i \sin n\pi} \int x^{n-1}\, dx. \qquad (\beta)$$



Diese Formel gibt uns ein Mittel an die Hand, obige Summe durch ein bestimmtes Integral auszudrücken. Ist t die Integrationsvariabele, so wird nach (β)

$$\frac{1}{(\alpha-\lambda)} = \frac{1}{2i \sin(\alpha-\lambda)\pi} \int t^{\alpha-\lambda-1}\, dt = \frac{(-1)^{\lambda}}{2i \sin \alpha\pi} \int t^{\alpha-\lambda-1}\, dt.$$

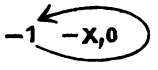
Die Summe geht dann über in

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\alpha x^{\lambda}}{\lambda-\alpha} = \frac{1}{2i \sin \alpha\pi} \int \alpha t^{\alpha-1} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} (-1)^{\lambda-1} \left(\frac{x}{t}\right)^{\lambda} dt$$

$$= \frac{\alpha}{2i \sin \alpha\pi} \int t^{\alpha} \frac{x}{t+x} \cdot \frac{dt}{t}.$$

Der gefährliche Punkt des Integrales ist $t = -x$; für diesen wird der Nenner zu Null, so dass der Wert des Integrales ∞ ist, wir müssen daher die Schlinge um $(-x)$ gehen lassen, diesen Pol also ausschliessen, und wir betrachten

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\alpha x^{\lambda}}{\lambda-\alpha} = \frac{\alpha}{2i \sin \alpha\pi} \int t^{\alpha} \frac{x\, dt}{t(t+x)}. \qquad (\gamma)$$



Dieses Integral ist aber kein Schlingenintegral mehr; denn es nimmt nach einem ganzen Umlauf seinen ursprünglichen Wert an. Wir dürfen dann auch später, ohne den Wert des Integrales zu verändern, eine additive Konstante beifügen, welche wir so auswählen, dass sie für unsere Zwecke passt.

Durch Substitution von $t^{\alpha} = e^{\alpha \operatorname{Log} t}$ wird

$$\frac{\alpha t^{\alpha}}{2i \sin \alpha\pi} = \frac{\alpha t^{\alpha}}{e^{i\alpha\pi} - e^{-i\alpha\pi}} = \frac{1}{2i\pi} \cdot \frac{2i\pi\alpha e^{2i\pi\alpha\left(\frac{\operatorname{Log} t}{2i\pi} + \frac{1}{2}\right)}}{e^{2i\alpha\pi} - 1}$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} \chi\left(n, \frac{\operatorname{Log} t}{2i\pi} + \frac{1}{2}\right) (2i\pi\alpha)^{n}. \quad ^{88})$$

Somit ist $\left[\alpha^{n}\right] = \frac{1}{2i\pi} \chi\left(n, \frac{\operatorname{Log} t}{2i\pi} + \frac{1}{2}\right) (2i\pi)^{n}.$

Deshalb wird, wenn wir die Gleichungen (α) und (γ) berücksichtigen,

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{x^{\lambda}}{\lambda^{n}} = \frac{(2i\pi)^{n}}{2i\pi} \int_{-1}^{-x,0} \left\{ \chi\left(n, \frac{\operatorname{Log} t}{2i\pi} + \frac{1}{2}\right) - \chi\left(n, -\frac{\operatorname{Log} x}{2i\pi}\right) \right\} \frac{x\,dt}{t(t+x)}, \quad (\delta)$$

wobei die zugefügte Konstante den Wert hat

$$K = -\frac{(2i\pi)^{n}}{2i\pi} \int_{-1}^{-x,0} \chi\left(n, \frac{\operatorname{Log} x}{2i\pi}\right) \frac{x\,dt}{t(t+x)}.$$

Wir wollen nun darnach trachten, x auf die Peripherie des Einheitskreises zu bringen; zu diesem Zweck müssen wir uns aber zuerst über Log t und Log (—x) ins Klare setzen; vor dem Nullpunkt wollen wir uns hüten, weil in demselben eine starke Transcendenz vorhanden ist.

$\operatorname{Log}(-x) = -i\pi(-\varrho) + 2i\pi\Theta$; Θ = Konstante. $\varrho = 0$, sobald (—x) auf der Peripherie des Einheitskreises liegt.

Wenn $t = e^{2i\pi\varphi - i\pi}$, wird $\operatorname{Log} t = -i\pi + 2i\pi\varphi$.

φ = Bogen von 0 bis 1; wenn $t = x$, soll $\varphi = \Theta$ werden. Dann sind

$\operatorname{Log} t = 2i\pi\left(\varphi - \frac{1}{2}\right)$; $\varphi = \frac{\operatorname{Log} t}{2i\pi} + \frac{1}{2}$; Θ = Konstante $= \frac{\operatorname{Log} x}{2i\pi}$:

$\frac{dt}{t} = 2i\pi\,d\varphi.$

Setzen wir diese Werte ein, so wird aus (δ)

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{x^{\lambda}}{\lambda^{n}} = \frac{(2i\pi)^{n}}{2i\pi} \int_{-1}^{-x,0} \left\{ \chi(n, \varphi) - \chi(n, \Theta) \right\} \frac{x\,dt}{t(t+x)}. \quad (\varepsilon)$$

Der Klammerausdruck unter dem Integralzeichen wird dann in dem Momente zu Null, sobald $\varphi = \Theta$ geworden; somit ist

$$x = e^{2i\pi\Theta}; \quad t = -e^{2i\pi\varphi};$$

$$e^{2i\pi\Theta} = e^{i\pi(\varphi+\Theta)-i\pi(\varphi-\Theta)}; \quad e^{2i\pi\varphi} = e^{i\pi(\varphi+\Theta)+i\pi(\varphi-\Theta)};$$

$$t+x = e^{i\pi(\varphi+\Theta)-i\pi(\varphi-\Theta)} - e^{i\pi(\varphi+\Theta)+i\pi(\varphi-\Theta)}$$

$$= -e^{i\pi(\varphi+\Theta)} 2i\sin(\varphi-\Theta)\pi;$$

$$\frac{x}{t+x} = \frac{1}{2}\left\{1+i\cot g(\varphi-\Theta)\pi\right\}.$$

Substituieren wir diese Werte ins Integral (ε), so erhalten wir

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{x^\lambda}{\lambda^n} = \frac{(2i\pi)^n}{2i\pi} \int \left\{\chi(n,\varphi) - \chi(n,\Theta)\right\} \frac{1}{2}\left\{1+i\cot g(\varphi-\Theta)\pi\right\} 2i\pi\, d\varphi.$$

-1 $-x,0$

Setzen wir jetzt $x = e^{2i\pi\Theta}$, so bewegt sich die Variabele auf dem Einheitskreis von 0 bis 1, und es wird

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{e^{2i\pi\Theta\lambda}}{\lambda^n} = (2i\pi)^n \int_0^1 \left\{\chi(n,\varphi)-\chi(n,\Theta)\right\} \frac{1}{2}\left\{1+i\cot g(\varphi-\Theta)\pi\right\} d\varphi. \quad (\mu)$$

Wegen i^n sollten wir die Fälle für n = gerade oder n = ungerade trennen; um dies zu vermeiden, ziehen wir vor, beide Seiten mit $(-i)^n = e^{-in\frac{\pi}{2}}$ zu multiplizieren; dann wird (μ) zu

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{e^{i\left(2\pi\lambda\Theta-\frac{n\pi}{2}\right)}}{\lambda^n}$$

$$= (2\pi)^n \int_0^1 \left\{\chi(n,\varphi) - \chi(n,\Theta)\right\} \frac{1}{2}\left\{1+i\cot g(\varphi-\Theta)\pi\right\} d\varphi. \quad (21)$$

Diese Formel gilt auch für $\Theta = \varphi$, da dieselbe dafür nicht unstetig wird. Wegen der Cotangente lässt sich anfangs leicht glauben, das Integral werde unstetig; doch ist ja im Nenner der Cotangente der Sinus, der sich auf den Bogen $(\varphi - \Theta)$ reduzieren lässt. Da die χ-Funktionen algebraische Funktionen n^{ten} Grades sind, so geht die Klammer in tiefster Annäherung über in $(\varphi^n - \vartheta^n)$; somit verhält sich das Integral

wie $\frac{\varphi^n - \Theta^n}{\varphi - \Theta}$; ein solcher Ausdruck ist aber endlich und daher auch das Gesamtintegral für $\varphi = \Theta$.

Herausheben der Komponenten.

In obiger Formel (21) sind sowohl reelle als imaginäre Bestandteile enthalten. Wir wollen nach dem Moivreschen Grundsatz der Trennung des Reellen vom Imaginären die einzelnen Komponenten herausnehmen, da wir zerlegen können

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} e^{i\left(2\pi\lambda\Theta - \frac{n\pi}{2}\right)} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \cos\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{n\pi}{2}\right) + i\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \sin\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{n\pi}{2}\right). \quad (\varrho)$$

A. Die reelle Komponente.

Dieselbe wird

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{n\pi}{2}\right)}{\lambda^n} = \frac{(2\pi)^n}{2} \int_0^1 \Big\{ \chi(n,\varphi) - \chi(n,\Theta) \Big\} d\varphi. \quad (\nu)$$

Dieses Integral muss ausgemittelt werden. Wir wissen, dass durch Integration der Grad einer Bernoullischen Funktion um die Einheit steigt; somit wird für n gerade oder ungerade

$$\int_0^1 \chi(n,\varphi) d\varphi = \Big\{ \chi(n+1,\varphi) \Big\}_0^1 = 0;$$

denn die ungeraden Bernoullischen Funktionen verschwinden für die Argumente 0 und 1 und die geraden weisen denselben Wert auf, der hier das eine Mal mit negativem Vorzeichen genommen werden muss. Es zeigt sich nur die Ausnahme für $n = 0$; doch müssen wir diesen Fall ausschliessen, da sonst links alle Nenner zur Einheit werden.

Ferner ist $\chi(n,\Theta)$ in Bezug auf φ als Konstante zu betrachten, also $\int_0^1 \chi(n,\Theta) d\varphi = \chi(n,\Theta)$; daher wird (ν)

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{n\pi}{2}\right)}{\lambda^n} = -\frac{(2\pi)^n}{2} \chi(n,\Theta).$$

$$\chi(n, \Theta) = -\frac{2}{(2\pi)^n} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{n\pi}{2}\right)}{\lambda^n}. \qquad (22)$$

Dies ist wieder eine weit allgemeinere Formel als die entsprechende der frühern Definitionen; aus derselben erhalten wir leicht die den frühern gleichwertigen Beziehungen; die einzige Bedingung ist $0 < \Theta < 1$.

Die Formel konvergiert ganz unzweideutig für $n = 2, 3, 4, \ldots\ldots$; für $n = 1$ müssen wir die Konvergenzfrage noch genauer prüfen; es wird für $n = 1$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{\pi}{2}\right)}{\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin 2\lambda\pi\Theta}{\lambda}$$

$$= -\pi\chi(1, \Theta) = -\pi\left(\Theta - \frac{1}{2}\right).$$

Der höchste Wert von $\sin 2\lambda\pi\Theta$ kann nur 1 sein; dann nähert sich die Summe der Reihe der Stammbrüche, welche *divergent* ist. Die Folge davon ist, dass die Werte $\Theta = 0$ und $\Theta = 1$ ausgeschlossen werden müssen. Ist n nahe bei Null, so schreitet der Zähler fort nach $2\pi\Theta$, $4\pi\Theta$, $6\pi\Theta$, ... Die Summe dieser Ausdrücke wird aber ∞ gross; die Konvergenz erscheint daher sehr verdächtig; aber für $2\pi\Theta = \psi$ ist

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin\lambda\psi}{\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin\lambda\psi}{\lambda\psi}\,\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2}.$$

Wir setzen $\lambda\psi = \mu$; dann dürfen wir ein sehr kleines ψ als $d\mu$ betrachten, so dass ist

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin\mu}{\mu}\,d\mu = \frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2}.$$

$\mu = \lambda\psi$ durchläuft die Wertereihe $\mu, \mu+\psi, \mu+2\psi, \ldots\ldots$, d. h., wenn ψ klein genug gewählt, so geht μ von 0 bis ∞; somit wird die Summe

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{\sin\mu}{\mu}\,d\mu = \int_0^{\infty} \frac{\sin\mu}{\mu}\,d\mu = \frac{\pi}{2}.$$

Also ist der Ausdruck *konvergent*, da wir hier einen endlichen Wert erhalten.

Wir kehren wieder zu unsrer reellen Komponente (22) zurück und wollen die Fälle n = gerade = 2 m und n = ungerade = (2m+1) trennen.

Für $n = 2m$ wird $\cos(2\lambda\pi\Theta - m\pi) = (-1)^m \cos 2\lambda\pi\Theta$, also

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos 2\lambda\pi\Theta}{\lambda^{2m}} = (-1)^{m-1} \frac{(2\pi)^{2m}}{2} \chi(2m, \Theta). \qquad (23)$$

Dies ist eine den Raabeschen Definitionsformeln entsprechende Beziehung; nur fehlt hier wieder der lästige Zusatz der Bernoullischen Zahl.

Setzen wir darin $\Theta = 0$ und berücksichtigen den Wert für $\chi(2m, 0)$, so wird

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda^{2m}} = S_{2m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2\pi)^{2m} B_m}{(2m)!}. \qquad (24)$$

Da $\chi(2m, 0) = \chi(2m, 1)$, so würden wir die nämliche Formel erhalten für $\Theta = 1$.

Für $n = (2m+1)$ wird $\cos\left(2\lambda\pi\Theta - m\pi - \frac{\pi}{2}\right) =$ $(-1)^m \sin 2\lambda\pi\Theta$; dies in (22) gesetzt, gibt

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin 2\lambda\pi\Theta}{\lambda^{2m+1}} = (-1)^{m-1} \frac{1}{2} (2\pi)^{2m+1} \chi(2m+1, \Theta). \qquad (25)$$

Für $\Theta = 0, \frac{1}{2}, 1$ resultiert daraus die identische Gleichung $0 = 0$; dieselbe entsteht ebenfalls, wenn wir (23) nach Θ ableiten. Differenzieren wir (25) nach Θ, so entsteht wieder Formel (23); alles dies sind Kontrollen der Richtigkeit.

Spezialfälle dieser ungeraden Bernoullischen Funktion sind lösbar und sehr zu vereinfachen, wenn ein Mittel gefunden würde, um die ungerade Bernoullische Funktion durch Bernoullische Zahlen oder durch geeignete bestimmte Integrale auszudrücken; doch stösst man gerade bei letzterer Aufgabe auf die Summierung von komplizierten Ausdrücken. So wird z. B. für $\Theta = \frac{1}{4}$ aus Formel (25)

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin \lambda \frac{\pi}{2}}{\lambda^{2m+1}} = (-1)^{m-1} \frac{1}{2} (2\pi)^{2m+1} \chi\left(2m+1, \frac{1}{4}\right).$$

Es wird $$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin \lambda \frac{\pi}{2}}{\lambda^{2m+1}} = 1 - \frac{1}{3^{2m+1}} + \frac{1}{5^{2m+1}} - \frac{1}{7^{2m+1}}$$

$$+ - \cdots\cdots = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^{\lambda-1}}{(2\lambda-1)^{2m+1}} = H_{2m+1},$$

somit $$H_{2m+1} = (-1)^{m-1} \frac{1}{2} (2\pi)^{2m+1} \chi\left(2m+1, \frac{1}{4}\right). \qquad (26)$$

Ähnliche Formeln könnten wir für $\Theta = \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \cdots\cdots$ ableiten; jedesmal kommen wir auf Funktionen, die den Bernoullischen Funktionen nahe verwandt sein müssen, da sie ganz ähnlichen Summenformeln genügen.[39])

B. Die imaginäre Komponente.

Zurückgreifend auf Formel (21) und (ϱ) wird, wie leicht einzusehen ist,

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{n\pi}{2}\right)}{\lambda^n}$$

$$= \frac{1}{2} (2\pi)^n \int_0^1 \left\{ \chi(n, \varphi) - \chi(n, \Theta) \right\} \operatorname{cotg} \pi(\varphi - \Theta)\, d\varphi. \qquad (27)$$

Es ist dies wieder eine ganz allgemeine, sämtliche Fälle einschliessende Formel.

Für $n = 1$ wird, da $\sin\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos 2\lambda\pi\Theta$,

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos 2\lambda\pi\Theta}{\lambda} = \pi \int_0^1 \left\{ \chi(1, \Theta) - \chi(1, \varphi) \right\} \operatorname{cotg} \pi(\varphi - \Theta)\, d\varphi.$$

Nach längern Umwandlungen, wobei als Integrationskonstante Log 2 genommen ist, wird, wenn Θ als Konstante weggelassen, also bei verändertem $\varphi = \varphi_1$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos 2\lambda\pi\Theta}{\lambda} = \operatorname{Log}(2 \sin \pi\varphi_1).$$

Es ist auch, wenn $(\varphi - \Theta) = \varphi_1$ gesetzt, da die Grenzen $(-\Theta)$ und $(1-\Theta)$ werden, $$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{n\pi}{2}\right)}{\lambda^n} =$$

$$= (2\pi)^n \frac{1}{2} \int_{-\Theta}^{1-\Theta} \{\chi(n, \varphi_1 + \Theta) - \chi(n, \Theta)\} \operatorname{cotg} \pi\varphi_1 \, d\varphi_1.$$

Das Integral rechts bezeichnen wir mit S; es lässt sich zerlegen in

$$S = \int_0^{1-\Theta} \{\chi(n, \varphi_1 + \Theta) - \chi(n, \Theta)\} \operatorname{cotg} \pi\varphi_1 \, d\varphi_1$$

$$- \int_0^{+\Theta} \{\chi(n, \Theta - \varphi_1) - \chi(n, \Theta)\} \operatorname{cotg} \pi\varphi_1 \, d\varphi_1,$$

wenn im zweiten Integral zudem noch φ_1 durch $(-\varphi_1)$ ersetzt wird.

Wir können nun partiell integrieren, indem wir setzen

$$\int \operatorname{cotg} \pi\varphi_1 \, d\varphi_1 = \frac{1}{\pi} \operatorname{Log}(2 \sin \pi\varphi_1).$$

Die finiten Teile der partiellen Integration aus beiden obigen Integralen der Summe S werden, wie wir uns durch Ausführung der Integration überzeugen können, zu Null; es bleiben nur die infiniten Teile, und es wird

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{n\pi}{2}\right)}{\lambda^n}$$

$$= \frac{1}{2} (2\pi)^n \frac{1}{\pi} \int_0^{\Theta} \operatorname{Log}(2 \sin \pi\varphi_1) \, \chi(n-1, \Theta - \varphi_1) \, d\varphi_1$$

$$- \frac{1}{2} (2\pi)^n \frac{1}{\pi} \int_0^{1-\Theta} \operatorname{Log}(2 \sin \pi\varphi_1) \, \chi(n-1, \varphi_1 + \Theta) \, d\varphi_1.$$

Da für $n = (2m+1)$ der Wert $\sin\left(2\lambda\pi\Theta - m\pi - \frac{\pi}{2}\right) =$ $-\cos(2\lambda\pi\Theta - m\pi) = -(-1)^m \cos 2\lambda\pi\Theta$, so wird

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^{m+1} \cos 2\lambda\pi\Theta}{\lambda^{2m+1}}$$

$$= (2\pi)^{2m} \int_0^{\Theta} \operatorname{Log}(2 \sin \pi\varphi_1) \, \chi(2m, \Theta - \varphi_1) \, d\varphi_1$$

$$- (2\pi)^{2m} \int_0^{1-\Theta} \operatorname{Log}(2 \sin \pi\varphi_1) \, \chi(2m, \varphi_1 + \Theta) \, d\varphi_1.$$

Für $\Theta = 0$ verschwindet das erste Integral, und es ist

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda^{2m+1}} = (-1)^m (2\pi)^{2m} \int_0^1 \mathrm{Log}(2 \sin \pi\varphi)\, \chi(2m, \varphi)\, d\varphi, \quad (28)$$

wenn wieder φ als Integrationsvariabele gewählt wird.

Mit Hülfe dieser Definition als Reihenentwicklung lässt sich die *Raabesche Restformel* ableiten; dann können wir den Zusammenhang derselben mit der *Riemannschen Reihe* nachweisen; diese Beziehungen sprechen deutlich für die Allgemeinheit dieser Definition. Alles hier auszuführen, würde aber den Rahmen vorliegender Arbeit wesentlich überschreiten.[40])

§ 20. Integrale mit Bernoullischen Funktionen.

Schläfli selbst gibt in seinen Vorlesungen keine Integraldarstellungen der Bernoullischen Funktion. Dieselben gestalten sich aber wesentlich einfacher als die entsprechenden der frühern Definitionen. Dieser § liesse sich beliebig weit ausdehnen; es taucht eine grosse Mannigfaltigkeit an Integralen der Bernoullischen Funktion auf. Wir geben hier nur die zum Vergleich wichtigen. Gute Hülfe bei all diesen Darstellungen liefern uns die Formeln (23) und (25).

A. Einfache Integrale.

1. Für die gerade Bernoullische Funktion.

Es interessieren uns einige Spezialfälle der Formel (7); setzen wir darin für die obere Grenze der Reihe nach $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{6}$, so wird vorerst

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \chi(2m, x)\, dx = \frac{(-1)^{m-1}\sqrt{3}}{(2\pi)^{2m+1}} R_{2m+1}, \quad \text{wobei} \quad (29)$$

$$R_{2m+1} = 1 - \frac{1}{2^{2m+1}} + \frac{1}{4^{2m+1}} - \frac{1}{5^{2m+1}} + - \cdots\cdots = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{(3\lambda-2)^{2m+1}} - \frac{1}{(3\lambda-1)^{2m+1}}.$$

Die Funktion R_{2m+1} lässt sich unter Anwendung der Formel

$$\frac{1}{k^a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-kx} x^{a-1}\, dx \quad (\alpha)$$

aus der Theorie der Gammafunktion[41]) in ein bestimmtes Integral verwandeln, so dass wird

$$R_{2m+1} = \frac{1}{(2m)!}\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}\left\{e^{-x}-e^{-2x}\right\}}{1-e^{-3x}}\,dx, \quad \text{somit folgt}$$

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \chi(2m, x)\,dx = \frac{(-1)^{m-1}\sqrt{3}}{(2\pi)^{2m+1}\Gamma(2m+1)}\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}\left\{e^{-x}-e^{-2x}\right\}dx}{1-e^{-3x}}. \quad (30)$$

Analog ist $$\int_0^{\frac{1}{4}} \chi(2m, x)\,dx = \frac{(-1)^{m-1}\,2}{(2\pi)^{2m+1}} H_{2m+1}, \quad \text{wobei} \quad (31)$$

$$H_{2m+1} = 1 - \frac{1}{3^{2m+1}} + \frac{1}{5^{2m+1}} - \frac{1}{7^{2m+1}}$$

$$+ - \cdots\cdots = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^{\lambda-1}}{(2\lambda-1)^{2m+1}}.$$

Durch Anwendung derselben Formel (α) wird

$$H_{2m+1} = \frac{1}{\Gamma(2m+1)}\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}}{e^{x}+e^{-x}}\,dx = \frac{1}{2\Gamma(2m+1)}\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}}{\operatorname{cof} x}\,dx,$$

also $$\int_0^{\frac{1}{4}} \chi(2m, x)\,dx = \frac{(-1)^{m-1}\,2}{(2\pi)^{2m+1}\Gamma(2m+1)}\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}}{e^{x}+e^{-x}}\,dx$$

$$= \frac{(-1)^{m-1}}{(2\pi)^{2m+1}\Gamma(2m+1)}\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}}{\operatorname{cof} x}\,dx. \quad (32)$$

Entsprechend folgt

$$\int_0^{\frac{1}{6}} \chi(2m, x)\,dx = \frac{(-1)^{m-1}\sqrt{3}}{(2\pi)^{2m+1}} G_{2m+1}, \quad \text{wobei} \quad (33)$$

$$G_{2m+1} = 1 + \frac{1}{2^{2m+1}} - \frac{1}{4^{2m+1}} - \frac{1}{5^{2m+1}}$$

$$+ + - - \cdots\cdots = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^{\lambda-1}}{(3\lambda-2)^{2m+1}} + \frac{(-1)^{\lambda-1}}{(3\lambda-1)^{2m+1}}.$$

Wie früher durch Integrale dargestellt, wird

$$G_{2m+1} = \frac{1}{\Gamma(2m+1)} \int_0^{\infty} \frac{x^{2m}\left\{e^{-x}+e^{-2x}\right\}}{1+e^{-3x}}\,dx, \qquad \text{somit}$$

$$\int_0^{\frac{1}{6}} \chi(2m,x)\,dx = \frac{(-1)^{m-1}\sqrt{3}}{(2\pi)^{2m+1}\Gamma(2m+1)} \int_0^{\infty} \frac{x^{2m}\left\{e^{-x}+e^{-2x}\right\}}{1+e^{-3x}}\,dx. \quad (34)$$

2. Für die ungerade Bernoullische Funktion.

Hier vereinfachen sich die Werte bedeutend, da wir alle durch Bernoullische Zahlen ausdrücken können. Gestützt auf (6) werden, wenn wir wieder der Reihe nach für die obere Grenze $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{6}$ und für die untere Grenze stets 0 setzen, folgende Formeln auf einfache Weise, durch Einsetzen der von früher her bekannten Formeln (9), (13), (16) und (14), entstehen

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \chi(2m-1,x)\,dx = (-1)^m \frac{1}{2} \cdot \frac{3^{2m}-1}{3^{2m-1}} \cdot \frac{B_m}{(2m)!}. \quad (35)$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \chi(2m-1,x)\,dx = (-1)^m \frac{2^{4m-1}+2^{2m-1}-1}{2^{4m-1}} \cdot \frac{B_m}{(2m)!}. \quad (36)$$

$$\int_0^{\frac{1}{6}} \chi(2m-1,x)\,dx = (-1)^m \frac{1}{2} \cdot \frac{6^{2m-1}+3^{2m-1}+2^{2m-1}-1}{6^{2m-1}} \cdot \frac{B_m}{(2m)!}. \quad (37)$$

B. Integrale mit trig. Funktionen.

Nehmen wir r als positive ganze Zahl an, so wird nach (25)

$$\int_0^1 \chi(2m+1,x)\cos 2r\pi x\,dx = \frac{(-1)^{m-1}2}{(2\pi)^{2m+1}} \int_0^1 \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin 2\lambda\pi x}{\lambda^{2m+1}} \cos 2r\pi x\,dx;$$

da aber $\int_0^1 \sin 2\lambda\pi x \cdot \cos 2r\pi x\,dx = 0$ für alle Werte von λ, so folgt

$$\int_0^1 \chi(2m+1,x)\cos 2r\pi x\,dx = 0. \quad (38)$$

Da wir auf die Auswertung eines analogen Integrales kommen, wenn wir die gerade Bernoullische Funktion mit $\sin 2r\pi x\,dx$ kombinieren, so wird, was auch direkt hätte gezeigt werden können,

$$\int_0^1 \chi(2m, x) \sin 2r\pi x\,dx = 0. \tag{39}$$

Wir verbinden nun gleichartige Bernoullische Funktionen und trig. Funktionen; es wird

$$\int_0^1 \chi(2m, x) \cos 2r\pi x\,dx = \frac{(-1)^{m-1} 2}{(2\pi)^{2m}} \int_0^1 \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos 2\pi\lambda x}{\lambda^{2m}} \cos 2r\pi x\,dx.$$

Der Ausdruck $\int_0^1 \cos 2\pi\lambda x \,.\, \cos 2r\pi x\,dx$ verschwindet für alle Werte des ganzzahligen λ, mit Ausnahme von $\lambda = r$; dafür wird

$$\int_0^1 \cos^2 2r\pi x\,dx = \frac{1}{2}.$$

Von der Summation unter dem Integralzeichen bleibt somit nur $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^{2m}}$; daher wird

$$\int_0^1 \chi(2m, x) \cos 2r\pi x\,dx = \frac{(-1)^{m-1}}{(2\pi r)^{2m}}. \tag{40}$$

Die entsprechenden Erläuterungen gelten auch für die ungerade Bernoullische Funktion verbunden mit $\sin 2r\pi x\,dx$; also

$$\int_0^1 \chi(2m+1, x) \sin 2r\pi x\,dx = \frac{(-1)^{m-1}}{(2\pi r)^{2m+1}}. \tag{41}$$

Daraus ergibt sich der

Satz: Die Integrale einer Bernoullischen Funktion verbunden mit einer ungleichartigen trig. Funktion werden zu Null, verbunden mit einer gleichartigen nehmen sie einen bestimmten Wert an.

Wir könnten auch Integrale mit den trigonometrischen Funktionen im Nenner untersuchen; doch würden uns diese Untersuchungen zu weit vom eigentlichen Thema wegführen.

C. Integrale von Produkten der χ-Funktion.

Wir gehen wieder von den Formeln (23) und (25) aus und unterscheiden:

1. Beide Bernoullischen Funktionen seien gerade. Dann wird

$$J = \int_0^1 \chi(2m, x)\,\chi(2n, x)\,dx$$

$$= \frac{(-1)^{m-1}\,2\,(-1)^{n-1}\,2}{(2\pi)^{2m}\,(2\pi)^{2n}} \int_0^1 \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos^2 2\lambda\pi x}{\lambda^{2m}\,\lambda^{2n}}\,dx.$$

Bekanntlich sind

$$\int_0^1 \cos^2 2\lambda\pi x\,dx = \frac{1}{2};\quad \int_0^{\frac{1}{2}} \cos^2 2\lambda\pi x\,dx = \frac{1}{4};\quad \int_0^{\frac{1}{4}} \cos^2 2\lambda\pi x\,dx = \frac{1}{8}.$$

Somit resultieren, da die Doppelsumme verschwindet, wenn wir für $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda^{2m+2n}} = S_{2m+2n}$ den Wert in Bernoullischen Zahlen setzen, die drei Formeln

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^1 \chi(2m, x)\,\chi(2n, x)\,dx &= \frac{(-1)^{m+n}\,B_{m+n}}{(2m+2n)!}\cdot \\
\int_0^{\frac{1}{2}} \chi(2m, x)\,\chi(2n, x)\,dx &= \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^{m+n}\,B_{m+n}}{(2m+2n)!}\cdot \\
\int_0^{\frac{1}{4}} \chi(2m, x)\,\chi(2n, x)\,dx &= \frac{1}{4}\cdot\frac{(-1)^{m+n}\,B_{m+n}}{(2m+2n)!}\cdot
\end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

Also folgt

$$\int_0^1 F(x)\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} F(x)\,dx = 4\int_0^{\frac{1}{4}} F(x)\,dx, \qquad (43)$$

wobei $F(x) = \chi(2m, x)\,\chi(2n, x)$ ist.

Lassen wir $m = n$ werden, so verändert sich (43) nicht, nur dass dann $F(x) = \{\chi(2m, x)\}^2$ wird, während die Formeln (42) übergehen in

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^1 \{\chi(2m,x)\}^2 dx &= \frac{B_{2m}}{(4m)!},\\
\int_0^{\frac{1}{2}} \{\chi(2m,x)\}^2 dx &= \frac{1}{2}\cdot\frac{B_{2m}}{(4m)!}.\\
\int_0^{\frac{1}{4}} \{\chi(2m,x)\}^2 dx &= \frac{1}{4}\cdot\frac{B_{2m}}{(4m)!}.
\end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

2. Beide Funktionen seien ungerade. Es wird

$$\int_0^1 \chi(2m+1,x)\,\chi(2n+1,x)\,dx = \frac{(-1)^{m-1}\,2\,(-1)^{n-1}\,2}{(2\pi)^{2m+1}(2\pi)^{2n+1}} \int_0^1 \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin^2 2\lambda\pi x}{\lambda^{2m+1}\lambda^{2n+1}}.$$

Es sind bekanntlich

$$\int_0^1 \sin^2 2\lambda\pi x\,dx = \frac{1}{2};\quad \int_0^{\frac{1}{4}} \sin^2 2\lambda\pi x\,dx = \frac{1}{4};\quad \int_0^{\frac{1}{8}} \sin^2 2\lambda\pi x\,dx = \frac{1}{8}.$$

Deshalb resultieren, wenn für $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda^{2m+2n+2}} = S_{2m+2n+2}$ der Wert in Bernoullischen Zahlen gesetzt wird, da die übrigen Integrale der Doppelsumme zu Null werden,

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^1 \chi(2m+1,x)\,\chi(2n+1,x)\,dx &= (-1)^{m+n}\,\frac{B_{m+n+1}}{(2m+2n+2)!}.\\
\int_0^{\frac{1}{2}} \chi(2m+1,x)\,\chi(2n+1,x)\,dx &= (-1)^{m+n}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{B_{m+n+1}}{(2m+2n+2)!}.\\
\int_0^{\frac{1}{4}} \chi(2m+1,x)\,\chi(2n+1,x)\,dx &= (-1)^{m+n}\,\frac{1}{4}\cdot\frac{B_{m+n+1}}{(2m+2n+2)!}.
\end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

Es wird also auch hier die Beziehung gelten

$$\int_0^1 G(x)\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} G(x)\,dx = 4\int_0^{\frac{1}{4}} G(x)\,dx, \qquad \text{wobei} \qquad (46)$$

$G(x) = \chi(2m+1,x)\,\chi(2n+1,x)$.

Lassen wir wieder $m = n$ werden, so erfährt die Beziehung (46) keine Änderung, nur dass $G(x) = \{\chi(2m+1, x)\}^2$ wird; die Formeln (45) gehen dann über in

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^1 \{\chi(2m+1, x)\}^2 dx &= \frac{B_{2m+1}}{(4m+2)!}\cdot \\
\int_0^{\frac{1}{2}} \{\chi(2m+1, x)\}^2 dx &= \frac{1}{2}\cdot\frac{B_{2m+1}}{(4m+2)!}\cdot \\
\int_0^{\frac{1}{4}} \{\chi(2m+1, x)\}^2 dx &= \frac{1}{4}\cdot\frac{B_{2m+1}}{(4m+2)!}\cdot
\end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

3. Eine Bernoullische Funktion sei gerade, die andere ungerade. Dann wird

$$\int_0^1 \chi(2m+1, x)\,\chi(2m, x)\,dx$$
$$= \frac{(-1)^{m-1}\,2\,(-1)^{n-1}\,2}{(2\pi)^{2m+1}(2\pi)^{2n}} \int_0^1 \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin 2\lambda\pi x \,.\, \cos 2\lambda\pi x}{\lambda^{2m+1}\lambda^{2n}}\,dx.$$

Weil $\int_0^1 \sin 2\lambda\pi x \,.\, \cos 2\lambda\pi x\,dx = 0$, so wird

$$\int_0^1 \chi(2m+1, x)\,\chi(2m, x)\,dx = 0. \qquad (48)$$

Wir erkennen daraus den

Satz: Die Integrale eines Produktes zweier Bernoullischen Funktionen nehmen einen bestimmten durch Bernoullische Zahlen ausdrückbaren Wert an, wenn die beiden Bernoullischen Funktionen gleichartig, verschwinden aber, wenn dieselben ungleichartig sind.

Die Integraldarstellungen lassen sich noch beliebig weit ausdehnen; doch müssen uns diese Betrachtungen genügen.

IV. Die Definitionen nach J. W. L. Glaisher.

Nachdem Dr. Glaisher schon in einer frühern Bekanntmachung «*On series and products involving prime numbers only*»[42]) auf die Bernoullische Funktion gekommen ist, widmet er derselben eine eingehende Besprechung in der gleichen englischen Zeitschrift, betitelt «*On the Bernoullian Function*».[43]) In dieser 168 Seiten umfassenden Abhandlung gibt dieser berühmte englische Mathematiker eine grosse Menge von Formeln; ja er begnügt sich auch nicht mit einer einzigen Definition, sondern führt deren mehrere an. Wir treten hier nur auf diejenige Definition näher ein, die uns für die allgemeinste und bequemste erscheint, ohne dabei die übrigen zu vernachlässigen, da wir alle aus der zu besprechenden Definition leicht herstellen können, weil sie durch einfache algebraische Beziehungen verbunden sind. Eine weitere Arbeit «*On the definite integrals connected with the Bernoullian Function*»[44]) von demselben Verfasser gibt uns eine beträchtliche Anzahl von bestimmten Integralen mit Bernoullischen Funktionen.

Die Formel, die Glaisher einer eingehenden Betrachtung unterzieht, lautet anfänglich

$$B_n(x) = \frac{x^n}{n} - \frac{1}{2}x^{n-1} + \frac{n-1}{2!}B_1 x^{n-2} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}B_2 x^{n-4} + - \cdots\cdots \quad (1)$$

§ 21. Herleitung der Definitionsgleichung.

Wie schon Raabe, so geht auch Glaisher aus von der bekannten Beziehung für $0 < x < 1$[68])

$$\sin 2\pi x + \frac{\sin 4\pi x}{2} + \frac{\sin 6\pi x}{3} + \cdots\cdots = \pi\left(\frac{1}{2} - x\right).$$

Durch Multiplikation mit dx und Integration zwischen 0 und x wird

$$\frac{1-\cos 2\pi x}{2\pi} + \frac{1-\cos 4\pi x}{8\pi} + \frac{1-\cos 6\pi x}{18\pi} + \cdots\cdots = \pi\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}\right);$$

multiplizieren wir mit (-2π) und zerreissen dann, so folgt, weil

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\cdots = S_2 = \frac{\pi^2}{3},$$

$$\cos 2\pi x + \frac{\cos 4\pi x}{2^2} + \frac{\cos 6\pi x}{3^2} + \cdots\cdots = 2\pi^2 \left\{ \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{6} \right\}.$$

Durch wiederholte Integration und Multiplikation mit (-2π) entstehen nacheinander

$$\sin 2\pi x + \frac{\sin 4\pi x}{2^3} + \frac{\sin 6\pi x}{3^3} + \cdots\cdots = \frac{2^2\pi^3}{2!} \left\{ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} \right\}.$$

$$\cos 2\pi x + \frac{\cos 4\pi x}{2^4} + \frac{\cos 6\pi x}{3^4} + \cdots\cdots = \frac{-2^3\pi^4}{3!} \left\{ \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{B_2}{4} \right\}.$$

$$\cos 2\pi x + \frac{\cos 4\pi x}{2^{2n}} + \frac{\cos 6\pi x}{3^{2n}} + \cdots\cdots = \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1} \pi^{2n}}{(2n-1)!} \left\{ B_{2n}(x) + (-1)^{n-1} \frac{B_n}{2n} \right\}. \quad (2)$$

$$\sin 2\pi x + \frac{\sin 4\pi x}{2^{2n+1}} + \frac{\sin 6\pi x}{3^{2n+1}} + \cdots\cdots = \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n} \pi^{2n+1}}{(2n)!} B_{2n+1}(x). \quad (3)$$

Darin bedeuten $B_n(x)$ die Klammerausdrücke der obern Formeln; es sind dies die «*Bernoullischen Funktionen*». Die beiden Formeln (2) und (3), wie auch die frühern, sind rationale und integrierbare Funktionen von x. Der erste Term von (2) ist von der $(2n)^{\text{ten}}$ Ordnung; der letzte Term der Bernoullischen Funktion in (2) ist vom 2ten Grade in x; der erste Term der Bernoullischen Funktion in (3) ist vom $(2n+1)^{\text{ten}}$ Grade, während der letzte in Bezug auf x linear ist. Also ist nach dieser Definition $B_n(x)$ eine Funktion von x, *die keinen von x freien Ausdruck enthalten darf.* Der Ausdruck, der von x unabhängig ist in den obigen Entwicklungen, stellt stets den Wert der Reihe $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots\cdots$, ausgedrückt in Bernoullischen Zahlen, dar.

Diese Definition der Bernoullischen Funktion stimmt nun ganz mit derjenigen von Raabe überein, wie auch Glaisher bei seinen ersten Untersuchungen über diese Funktion die Raabesche Definition benutzt hat, und es ist

$$B_{2n+1}(x) = B''(x) \qquad \text{und} \qquad B_{2n+2}(x) = B'(x).$$

Glaisher führt dann die Untersuchung über diese $B_n(x)$-Funktion in ausführlicher Weise durch, wobei er Raabe in vielem wesentlich ergänzt. Er berührt anfangs ganz kurz die Funktion mit inversem Argument, dann die einfachen Ableitungen und gibt die Spezialwerte für $x = 0$ und $x = 1$. Sodann leitet er Reihenentwicklungen ab, in welchen die Bernoullischen Funktionen als Koeffizienten auftreten.

Alles dies sind Eigenschaften, die mit der Raabeschen Auffassung übereinstimmen und bei denjenigen von Schlömilch und Schläfli zu entsprechenden Resultaten führen.

Glaisher erwähnt auch, dass die Bernoullischen Funktionen die Koeffizienten der Entwicklung $\frac{e^{ax}-1}{e^a-1}$ darstellen und leitet mit Hülfe dieser Auffassung einige Eigenschaften her. Hernach gibt er ähnliche Beziehungen von aufeinanderfolgenden Bernoullischen Funktionen dieser Definition, entsprechend den Darstellungen bei den früher betrachteten Definitionen, und erwähnt auch die Funktion mit negativem Argument.[45])

Uns interessiert diese $B_n(x)$-Funktion weniger, weil sie mit derjenigen von Raabe übereinstimmt und weil dieselbe zu wenig allgemein ist, da auf der rechten Seite die Reihe mit dem Gliede in x^2 oder x abschliesst. Auch Glaisher sah sich gezwungen, zur Vereinfachung der Koeffizienten der Entwicklung nach $B_n(x)$-Funktionen

$$a\frac{e^{a(2x-1)}+e^{-a(2x-1)}}{e^a-e^{-a}} = 1 + (2a)^2\left\{B_2(x)+\frac{B_1}{2}\right\} + \frac{(2a)^4}{3!}\left\{B_4(x)-\frac{B_2}{4}\right\}+\cdots\cdots$$

für die Klammerausdrücke einfachere Funktionen einzuführen, und er thut dies, indem er setzt

$$A_{2n}(x) = B_{2n}(x) + (-1)^{n-1}\frac{B_n}{2n};\quad A_{2n+1}(x) = B_{2n+1}(x). \qquad (n>0).$$

Er selbst sagt, dass diese neue Funktion $A_n(x)$ als analytische Funktion praktischer sei, da sie weniger komplizierte und systematischere Resultate liefere. Da jetzt bei der geraden Bernoullischen Funktion durch diese Setzung auch ein von x freier Term vorkommen darf, so steht diese Funktion in enger Beziehung zu derjenigen von Schläfli.[46])

Nach obigen Erläuterungen werden somit

$$A_{2n}(x) = \frac{1}{2n}\left\{x^{2n} - \frac{1}{2}\,2n\,x^{2n-1} + \binom{2n}{2} B_1 x^{2n-2} - + \cdots\cdots ; + (-1)^n \binom{2n}{2n-2} B_{n-1} x^2 + (-1)^{n+1} B_n\right\}.$$

$$A_{2n+1}(x) = \frac{1}{2n+1}\left\{x^{2n+1} - \frac{1}{2}(2n+1)x^{2n} + \binom{2n+1}{2} B_1 x^{2n-1} - \binom{2n+1}{4} B_2 x^{2n-3} + - \cdots\cdots (-1)^n \binom{2n+1}{2n} B_n x\right\}.$$

Die Reihen brechen von selbst ab; beide lassen sich in die allgemeinere Formel für ein beliebiges n zusammenziehen

$$A_n(x) = \frac{1}{n}\left\{x^n - \frac{n}{2} x^{n-1} + \binom{n}{2} B_1 x^{n-2} - \binom{n}{4} B_2 x^{n-4} + - \cdots\right\}. \quad (4)$$

Die Reihe geht so weit, dass rechts keine negativen Koeffizienten auftreten dürfen; der letzte Term enthält $\binom{n}{n-1}$ oder $\binom{n}{n}$, je nachdem n ungerade oder gerade ist.

Diese Definition wollen wir nun eingehender betrachten.

§ 22. Die Derivierten dieser Definition.

A. Die einfachen Differentialquotienten.

Wir gehen von der Definitionsformel (4) aus und differenzieren dieselbe nach x; dann wird

$$\frac{\partial}{\partial x} A_n(x) = x^{n-1} - \frac{1}{2}(n-1)\,x^{n-2} + \binom{n-1}{2} B_1 x^{n-3} - \binom{n-1}{4} B_2 x^{n-5} + - \cdots\cdots$$

$$\frac{\partial}{\partial x} A_n(x) = (n-1)\,A_{n-1}(x). \quad (5)$$

Diese Formel geht für $n = 2m$ und $n = (2m+1)$ in die entsprechenden Spezialformeln für die geraden und ungeraden Bernoullischen Funktionen der Definitionen von Raabe und Schlömilch über. Hier sind die zwei Spezialfälle in *eine* Formel zusammengefasst; nur steht noch ein Faktor vor der Bernoullischen Funktion, der bei der Schläflischen Definition fehlt. Schon dies ist ein Grund, dass die Definition von Schläfli den Vorzug verdient, da die einfachen Ableitungen der χ-Funktionen wieder reine χ-Funktionen liefern.

B. Die wiederholten Ableitungen.

Solche finden sich bei Glaisher nirgends; dieselben sind jedoch leicht zu erhalten; doch tritt stets ein komplizierender Faktor hinzu; wie leicht herzuleiten, wird, wenn symbolisch $D^{\lambda} = \frac{\partial^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}}$,

$$D^{\lambda} A_n(x) = \lambda! \binom{n}{\lambda} A_{n-\lambda}(x). \tag{6}$$

Schläflis Definition ist also auch in dieser Hinsicht einfacher, da dieselbe auch hier keinen vorgesetzten Faktor zeigt.

C. Einfache Integralformeln.

Multiplizieren wir (5) mit dx und integrieren zwischen 0 und x, so wird $\int_0^x A_{n-1}(x)\,dx = \left\{ \frac{A_n(x)}{n-1} \right\}_0^x$;

durch Trennung der geraden von der ungeraden Bernoullischen Funktion folgen $\int_0^x A_{2n}(x)\,dx = \frac{1}{2n} A_{2n+1}(x)$ und (7)

$$\int_0^x A_{2n-1}(x)\,dx = \frac{1}{2n-1} \left\{ A_{2n}(x) + (-1)^n \frac{B_n}{2n} \right\}, \tag{8}$$

wenn die später zu beweisenden Spezialwerte für $A_{2n+1}(0) = 0$ und $A_{2n}(0) = (-1)^n \frac{B_n}{2n}$ eingesetzt werden.[47])

Aus obigen 2 Formeln ergeben sich für die obere Grenze $x = 1$

$$\int_0^1 A_{2n}(x)\,dx = 0; \quad \int_0^1 A_{2n-1}(x)\,dx = 0. \tag{9}$$

Für die obere Grenze $x = \frac{1}{2}$ werden unter Berücksichtigung von[47])

$$A_{2n}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^n \frac{B_n}{n} \cdot \frac{2^{2n}-1}{2^{2n}} \quad \text{und} \quad A_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} A_{2n}(x)\,dx = 0; \quad \int_0^{\frac{1}{2}} A_{2n-1}(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{(2n-1)} (-1)^n \frac{B_n}{n} \cdot \frac{2^{2n}-1}{2^{2n}}. \tag{10}$$

Auch diese Formeln (7), (8) und (10) zeigen einen vorgesetzten Faktor, der bei den entsprechenden Formeln von Schläfli wegfällt.

§ 23. Die $A_n(x)$-Funktion mit inversem Argument.

Glaisher tritt auf diese Funktion nicht näher ein; er gibt nur die Hauptformel, ohne auf ihre Herleitung einzugehen.[48]) Wir gelangen jedoch auf einfache Weise zu diesen Beziehungen, wenn wir ausgehen von den später herzuleitenden Reihenentwicklungen (23) und (24).[49]) Ersetzen wir in (24) x durch $(1-x)$, so wird unter Anwendung von $\sin 2\lambda\pi(1-x) = -\sin 2\lambda\pi x$

$$-\left\{\sin 2\pi x + \frac{\sin 4\pi x}{2^{2n+1}} + \frac{\sin 6\pi x}{3^{2n+1}} + \cdots\cdots\right\}$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{2^{2n}\pi^{2n+1}}{(2n)!} - A_{2n+1}(1-x)$$

und durch Vergleichung dieser Formel mit (24)

$$A_{2n+1}(x) = -A_{2n+1}(1-x). \qquad (\alpha)$$

Setzen wir in (23) für x den Wert $(1-x)$, so erhalten wir unter Berücksichtigung von $\cos 2\lambda\pi(1-x) = \cos 2\lambda\pi x$ genau wieder dieselbe Formel (23), also

$$A_{2n}(x) = A_{2n}(1-x). \qquad (\beta)$$

Diese zwei letzten Formeln (α) und (β) lassen sich zusammenziehen zu der allgemeinern Formel

$$A_n(1-x) = (-1)^n A_n(x). \qquad (11)$$

Aus dieser Formel ergeben sich unter Berücksichtigung der Definitionsgleichung (4) mit Leichtigkeit

$$A_{2n}(0) = A_{2n}(1) = (-1)^{n-1}\frac{B_n}{2n} \quad \text{und} \qquad (12)$$

$$A_{2n+1}(0) = A_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = A_{2n+1}(1) = 0. \qquad (13)$$

Vervielfachung des Argumentes.

Die Herleitung der Formeln dafür ist hier bedeutend umständlicher als bei Schlömilch und Schläfli, da Glaisher zuerst eine Reihenentwicklung suchen muss, in welcher die Bernoullischen Funktionen als Koeffizienten auftreten; von diesem Momente an ist das Verfahren analog dem bei Schläfli.

Er geht aus von der bekannten, für $0 < x < 1$ geltenden Beziehung[50])

$$\frac{1}{2}\pi\frac{e^{a\pi(1-2x)}-e^{-a\pi(1-2x)}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}=\frac{\sin 2\pi x}{1^2+a^2}+\frac{2\sin 4\pi x}{2^2+a^2}$$
$$+\frac{3\sin 6\pi x}{3^2+a^2}+\cdots\cdots$$

Entwickeln wir die einzelnen Glieder der rechten Seite nach Potenzen von a^2 und nehmen die gleichartigen zusammen, so sind nach (24) die Koeffizienten der Potenzen von a Bernoullische Funktionen, und es wird, wenn zugleich mit a multipliziert und dann $a\pi$ durch a ersetzt wird,

$$a\frac{e^{a(1-2x)}-e^{-a(1-2x)}}{e^a-e^{-a}}=-2aA_1(x)-\frac{(2a)^3}{2!}A_3(x)$$
$$-\frac{(2a)^5}{4!}A_5(x)-\cdots\cdots \quad (\gamma)$$

Es ist dies eine nach ungeraden Bernoullischen Funktionen fortschreitende Entwicklung.

Analog wird aus der bekannten Gleichung[50])

$$\frac{1}{2}a\pi\frac{e^{a\pi(1-2x)}+e^{-a\pi(1-2x)}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}=\frac{1}{2}+\frac{a^2\cos 2\pi x}{1^2+a^2}$$
$$+\frac{a^2\cos 4\pi x}{2^2+a^2}+\cdots\cdots$$

durch Entwicklung nach Potenzen von a, Multiplikation mit 2 und Ersetzen von $a\pi$ durch a

$$a\frac{e^{a(1-2x)}+e^{-a(1-2x)}}{e^a-e^{-a}}=1+(2a)^2A_2(x)+\frac{(2a)^4}{3!}A_4(x)$$
$$+\frac{(2a)^6}{5!}A_6(x)+\cdots\cdots, \quad (\delta)$$

also eine nach geraden Bernoullischen Funktionen fortschreitende Entwicklung. Addieren wir diese beiden Entwicklungen (γ) und (δ), nachdem wir in denselben a durch (—a) ersetzt haben, so resultiert eine neue, nach aufeinanderfolgenden $A_n(x)$-Funktionen fortschreitende Reihe, nämlich

$$2a\frac{e^{a(2x-1)}}{e^a-e^{-a}}=1+2aA_1(x)+\frac{(2a)^2}{1!}A_2(x)+\frac{(2a)^3}{2!}A_3(x)+\cdots\cdots$$

Setzen wir darin für 2a den Wert a und multiplizieren dann Zähler und Nenner mit $e^{\frac{a}{2}}$, so wird

$$a\frac{e^{ax}}{e^a-1}=1+a\,A_1(x)+a^2A_2(x)+\frac{a^3}{2!}A_3(x)+\frac{a^4}{3!}A_4(x)+\cdots\cdots \quad (14)$$

Es ist dies eine elegante Entwicklung, woraus ersichtlich ist, dass

$$A_n(x)=\left[\frac{a^n}{(n-1)!}\right] \text{ in der Entwicklung } a\,\frac{e^{ax}}{e^a-1}.$$

Von dieser Entwicklung geht, wie wir gesehen haben, Schläfli aus, indem er die Fakultäten der obigen Entwicklung auch noch zur Bernoullischen Funktion mitnimmt; ausgehend von dieser Eigenschaft leitet er dann die wesentlichen Eigenschaften der Bernoullischen Funktion her. Bei Glaisher tritt diese Beziehung nicht so in den Vordergrund, wie sie es verdiente; er leitet zwar einige Formeln durch Koeffizientenvergleichung gleichwertiger Entwicklungen her[51]) und gibt später die Bernoullische Funktion noch als Koeffizient einer andern Entwicklung. *Ein reiner Koeffizient einer solchen Entwicklung ist die Definition von Glaisher nicht.*

Gestützt auf Koeffizientenvergleichung kommt nun auch Glaisher auf die Vervielfachung des Argumentes. Ist k eine positive, ganze Zahl, setzen wir in der letzten Entwicklung für x der Reihe nach die Werte $x,\ x+\frac{1}{k},\cdots\cdots,x+\frac{k-1}{k}$ und addieren dann alle diese Entwicklungen, so wird die Summe

$$S=A_n(x)+A_n\left(x+\frac{1}{k}\right)+\cdots\cdots+A_n\left(x+\frac{k-1}{k}\right)$$

$$=\left[a^n\right] \text{ in } \frac{a}{e^a-1}e^{ax}\left\{1+e^{\frac{a}{k}}+e^{\frac{2a}{k}}+\cdots\cdots+e^{\frac{(k-1)a}{k}}\right\}$$

$$=\left[a^n\right] \text{ in } \left(\frac{a}{k}\right)\frac{k\,e^{\frac{a}{k}(kx)}}{e^{\frac{a}{k}}-1}=\frac{1}{k^{n-1}}A_n(kx);\ \text{daher}$$

$$A_n(x)+A_n\left(x+\frac{1}{k}\right)+\cdots+A_n\left(x+\frac{k-1}{k}\right)=\frac{1}{k^{n-1}}A_n(kx) \quad (15)$$

Setzen wir $x=0$, so müssen wir die zwei Fälle n = gerade und n = ungerade unterscheiden; es werden für

n = ungerade

$$A_n\left(\frac{1}{k}\right)+A_n\left(\frac{2}{k}\right)+\cdots\cdots+A_n\left(\frac{k-1}{k}\right)=0 \quad \text{und für} \quad (15^a)$$

n = gerade

$$A_n\left(\frac{1}{k}\right)+A_n\left(\frac{2}{k}\right)+\cdots\cdots+A_n\left(\frac{k-1}{k}\right)$$
$$=(-1)^{\frac{1}{2}n}\left\{1-\frac{1}{k^{n-1}}\right\}\frac{B\frac{1}{2}n}{n}. \quad (15^b)$$

Aus diesen Formeln lassen sich mit Leichtigkeit verschiedene Spezialwerte für die Argumente $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{6}$ berechnen; für einzelne Argumente können wir auch direkt von der Definitionssummenformel ausgehen.

A. Berechnung von $A_n\left(\frac{1}{2}\right)$. Aus den Formeln ($15^{a\text{ und }b}$) folgt sofort für $k=2$

$$A_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)=0 \quad \text{und} \quad A_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)=(-1)^n\frac{2^{2n-1}-1}{2^{2n}}\cdot\frac{B_n}{n}. \quad (16)$$

B. Berechnung von $A_{2n}\left(\frac{1}{4}\right)$. Die ungeraden Bernoullischen Funktionen können wir mit Formel (15^a) nicht berechnen, da wir stets auf die identische Gleichung $0=0$ geführt werden. Gehen wir von der Summenformel für $A_{2n+1}(x)$ aus, so gelangen wir auf «Eulersche Zahlen»; da wir jedoch dieselben zu unsern Untersuchungen nie herbeigezogen haben, so wollen wir auch hier nicht auf diese Sache eintreten, besonders da diese Untersuchungen für alle betrachteten Definitionen in analoger Weise durchgeführt werden können.

Dagegen wird aus (15^b) unter Berücksichtigung des Wertes für $A_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)$ in Formel (16)

$$A_{2n}\left(\frac{1}{4}\right)=(-1)^n\frac{B_n}{n}\cdot\frac{2^{2n-1}-1}{2^{4n}}. \quad (17)$$

C. Berechnung von $A_{2n}\left(\frac{1}{3}\right)$. Glaisher geht von der trig. Summenformel aus, um diesen Wert zu erhalten; ganz einfach erhalten wir dieselbe aus (15^b) für $k=3$ unter Anwendung von $A_{2n}\left(\frac{1}{3}\right)=A_{2n}\left(\frac{2}{3}\right)$; es wird dann

$$A_{2n}\left(\frac{1}{3}\right)=(-1)^n\left\{\frac{3^{2n-1}-1}{3^{2n-1}}\right\}\frac{B_n}{4n}. \quad (18)$$

D. Berechnung von $A_{2n}\left(\frac{1}{6}\right)$. Setzen wir in (15^b) $k = 6$ und erinnern uns, dass $A_{2n}\left(\frac{1}{3}\right) = A_{2n}\left(\frac{2}{3}\right)$ und $A_{2n}\left(\frac{1}{6}\right) = A_{2n}\left(\frac{5}{6}\right)$, so wird

$$2A_{2n}\left(\frac{1}{6}\right) = (-1)^n\left\{\frac{6^{2n-1}-1}{6^{2n-1}}\right\}\frac{B_n}{2n} - 2A_{2n}\left(\frac{1}{3}\right) - A_{2n}\left(\frac{1}{2}\right);$$

die Werte für $A_{2n}\left(\frac{1}{3}\right)$ und $A_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)$ eingesetzt, gibt

$$A_{2n}\left(\frac{1}{6}\right) = (-1)^n\frac{B_n}{4n}\left\{\frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{3^{2n-1}} - \frac{1}{6^{2n-1}} - 1\right\}. \quad (19)$$

Auf gleiche Weise könnten wir die Werte der geraden Bernoullischen Funktionen für die Argumente $\frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{16}$ u. s. w. berechnen, würden aber zu komplizierten Formeln gelangen.

Glaisher gibt dann eine grosse Zahl von Reihenentwicklungen, in denen diese Spezialfunktionen, sowohl die $B_n(x)$- als auch die $A_n(x)$-Funktion, ja sogar noch weitere etwas von diesen abweichende Definitionen für die Argumente $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$ und $\frac{1}{12}$ als Koeffizienten auftreten[52]); auf die weitern von Glaisher eingeführten Definitionen werden wir später noch zu sprechen kommen.[53])

Im Verlaufe seiner Arbeit führt dann Glaisher noch eine Menge, den Eulerschen Zahlen ähnliche Zahlen J, I, H, P, Q, R und T ein, die in Beziehungen stehen mit algebraischen Reihenentwicklungen.[54]) Er widmet den Untersuchungen dieser Zahlen und Entwicklungen grosse Aufmerksamkeit; ihm gebührt das Verdienst, diese zuerst eingeführt zu haben; doch können alle diese Operationen auch an der Schläflischen Definition ausgeführt werden; die entstehenden Formeln werden ebenso einfach, ja in vielen Fällen sogar bedeutend einfacher.

§ 24. Die Funktion mit negativem Argument.

Glaisher gibt diese Funktion weder so elegant, noch so einfach wie Schläfli; die $A_n(x)$-Funktion findet sich überhaupt nicht mit negativem Argument; dagegen ist die $B_n(x)$-Funktion für $x = (-x)$ kurz erwähnt.

Er geht aus von den Entwicklungen nach Bernoullischen Funktionen, d. h., den Formeln (γ) und (δ) des vorigen §, die mit ent-

sprechender Abänderung auch für die $B_n(x)$-Funktion gelten; addieren wir beide, so folgt nach zweckmässiger Umgestaltung der linken Seite

$$\frac{e^{ax}-1}{e^a-1} = x + a\,B_2(x) + \frac{a^2}{2!}B_3(x) + \frac{a^3}{3!}B_4(x) + \cdots \qquad (20)$$

Es ist dies eine neue Entwicklung nach Bernoullischen Funktionen; aber auch hierin sind die Bernoullischen Funktionen nicht reine Koeffizienten der zugehörigen Entwicklung; diese Formel zeigt deutlich den Zusammenhang dieser Funktion mit der Definition von Schlömilch, der gerade den n-fachen Wert der $(n-1)^{ten}$ Ableitung einer solchen Entwicklung als n^{te} Bernoullische Funktion $\varphi(z, n)$ definiert.

Gestützt auf obige Beziehung (20) kommt jetzt Glaisher auf die Funktion mit negativem Argument; er multipliziert dieselbe mit e^{-ax} und erhält

$$-\frac{e^{-ax}-1}{e^a-1} = e^{-ax}\left\{x + a\,B_2(x) + \frac{a^2}{2!}B_3(x) + \frac{a^3}{3!}B_4(x) + \cdots\right\}.$$

Durch Entwicklung von e^{-ax} und nachherige Koeffizientenvergleichung wird

$$-B_n(-x) = B_n(x) - (n-1)\,x\,B_{n-1}(x) + \binom{n-1}{2}x^2 B_{n-2}(x) - + \cdots + (-1)^{n-2}x^{n-2}B_2(x) + (-1)^{n-1}x^n.$$

Dies setzt er symbolisch gleich[55])

$$-B(-x) = (E-x)^{n-1}B_1(x), \qquad (21)$$

wobei E ein Operationsfaktor ist, definiert durch

$$E\,B(x) = B_{r+1}(x);$$

es resultiert dann

$$(-1)^{n-1}B_n(1+x) = (E-x)^{n-1}B_1(x). \qquad (22)$$

Weitere Bernoullische Funktionen mit negativem Argument finden sich keine mehr; diese symbolische Darstellung ist keineswegs bequem zum Operieren; hier ist entschieden jede andere und besonders die Schläflische Definition vorzuziehen.

§ 25. Diskussion dieser Funktion.

Der einzige Unterschied dieser $A_n(x)$-Funktion, der dieselbe äusserlich nur unwesentlich von der Definition von Schläfli unterscheidet, ist der, dass Schläfli den Faktor $\frac{1}{n!}$ vor der Klammer der rechten Seite der Gleichung der n^{ten} Bernoullischen Funktion hat,

während Glaisher nur $\frac{1}{n}$. Bei der graphischen Darstellung ist dann augenscheinlich, dass der Faktor $\frac{1}{n!}$ das Konvergenzgebiet der Funktion um so mehr erweitert, je höher der Grad der Bernoullischen Funktion steigt, und dass schon deshalb die Definition von Schläfli vorzuziehen ist.

Die acht ersten Bernoullischen Funktionen dieser Definition nehmen folgende Werte an:

$$A_1(x) = x - \frac{1}{2}.$$

$$A_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}.$$

$$A_3(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x.$$

$$A_4(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{120}.$$

$$A_5(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x.$$

$$A_6(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{252}.$$

$$A_7(x) = \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{42}x.$$

$$A_8(x) = \frac{1}{8}x^8 - \frac{1}{2}x^7 + \frac{7}{12}x^6 - \frac{7}{24}x^4 + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{240}.$$

Wir erkennen daraus, dass die zwei ersten Bernoullischen Funktionen dieser Definition genau mit denjenigen gleich hoher Ordnung bei Schläfli übereinstimmen; die Funktion $A_2(x)$ besitzt also ebenfalls ein Minimum bei $x = \frac{1}{2}$ vom Werte $-\frac{1}{24}$. Die Gleichung für $A_3(x)$ weist analog $\chi(3, x)$ zwischen 0 und 1 sowohl ein Minimum als ein Maximum auf. Beide liegen bei gleichem Werte von x wie für die $\chi(3, x)$-Funktion; doch wird hier der Wert der Funktion gerade 2!-mal so gross wie bei $\chi(3, x)$.

Entsprechend könnten wir weiterfahren; wir finden, *dass die Stellen der Maximal- und Minimalwerte nicht ändern, dass aber die zugehörigen Funktionswerte für diese Definition bedeutend grösser werden, je höher der Grad der Funktion ist; die Funktion nimmt rasch sehr grosse Werte an.*[56])

Die Figuren zu § 18 gelten auch für diese Definition.

§ 26. Verwandlung dieser Definition in trigonometr. Reihen.

Schon bei der Herleitung der Definitionsgleichung ist Glaisher zu trigonometrischen Reihen als Werte für Bernoullische Funktionen gelangt; wir brauchen nur für die $B_n(x)$-Funktion in den Formeln (2) und (3) die allgemeinere $A_n(x)$-Definition einzusetzen; dann resultieren

$$A_{2n}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}\,\pi^{2n}} \left\{ \cos 2\pi x + \frac{\cos 4\pi x}{2^{2n}} + \frac{\cos 6\pi x}{3^{2n}} + \cdots\cdots \right\}. \quad (23)$$

$$A_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(2n)!}{2^{2n}\,\pi^{2n+1}} \left\{ \sin 2\pi x + \frac{\sin 4\pi x}{2^{2n+1}} + \frac{\sin 6\pi x}{3^{2n+1}} + \cdots\cdots \right\}. \quad (24)$$

Wir wären auch zu denselben Resultaten gelangt, wenn wir uns auf die Theorie der Fourierschen Reihen und Integrale gestützt und für die Funktion $f(x)$ die Bernoullische Funktion $A_n(x)$ eingeführt hätten; wie schon bei Schläfli, so gelangen wir auch hier rascher ans Ziel als Schlömilch, weil das entstehende Integral leichter zu lösen ist.

§ 27. Integrale mit $A_n(x)$-Funktionen.

Während Glaisher in seinen zwei ersten, diesen Gegenstand behandelnden Schriften gar keine Integrale mit Bernoullischen Funktionen gibt, behandelt er die Integraldarstellungen dieser Funktion sehr eingehend in seiner dritten, bereits erwähnten Schrift «On the definite integrals connected with the Bernoullian function.»

Er geht darin von den Summenformeln des Sinus und Cosinus aus[57]) und leitet auf analoge Weise, wie die Untersuchungen von § 20 des vorhergehenden Abschnittes zeigen, seine Integrale her. Trotz des Unterschiedes beider Definitionen bleibt ja die Art des Herleitens dieselbe; wir wollen deshalb hier nicht noch einmal dieselben Ableitungen vornehmen, sondern begnügen uns mit der Angabe der erhaltenen Resultate; ein Vergleich der entsprechenden Formeln, die stets sehr ähnlich aussehen, zeigt jedoch, dass diejenigen der Definition von Schläfli noch etwas einfacher aussehen, vorausgesetzt, dass sie in der Form nicht *ganz* übereinstimmen.

A. Einfache Integrale.

1. Mit der ungeraden Bernoullischen Funktion. Gestützt auf (8) werden für die Spezialwerte der obern Grenze $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ und $\frac{1}{6}$

$$(2n-1)\int_0^{\frac{1}{2}} A_{2n-1}(x)\,dx = (-1)^n \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}} \cdot \frac{B_n}{2n}. \tag{25}$$

$$(2n-1)\int_0^{\frac{1}{3}} A_{2n-1}(x)\,dx = (-1)^n \frac{3^{2n}-1}{3^{2n-1}} \cdot \frac{B_n}{4n}. \tag{26}$$

$$(2n-1)\int_0^{\frac{1}{4}} A_{2n-1}(x)\,dx = (-1)^n \frac{4^{2n}+2^{2n}-2}{4^{2n}} \cdot \frac{B_n}{2n}. \tag{27}$$

$$(2n-1)\int_0^{\frac{1}{6}} A_{2n-1}(x)\,dx = (-1)^n \frac{6^{2n}+2\cdot 3^{2n}+3\cdot 2^{2n}-6}{6^{2n}} \cdot \frac{B_n}{4n}. \tag{28}$$

Hier kompliziert also der vor dem Integral stehende Faktor $(2n-1)$.

2. Mit der geraden Bernoullischen Funktion. Gestützt auf Formel (7) werden, wenn wir zur Abkürzung die von Glaisher eingeführten Zahlen wählen,[58])

$$2n\int_0^{\frac{1}{2}} A_{2n}(x)\,dx = 0. \tag{29}$$

$$2n\int_0^{\frac{1}{3}} A_{2n}(x)\,dx = (-1)^{n+1} \frac{I_n}{3^{2n+1}}. \tag{30}$$

$$2n\int_0^{\frac{1}{4}} A_{2n}(x)\,dx = (-1)^{n+1} \frac{E_n}{4^{2n+1}}. \tag{31}$$

$$2n\int_0^{\frac{1}{6}} A_{2n}(x)\,dx = (-1)^{n+1} \frac{J_n}{6^{2n+1}}. \tag{32}$$

B. Integrale mit trig. Funktionen.

Durch analoges Verfahren wie in § 20[B] werden

$$\int_0^1 A_{2n+1}(x) \sin 2r\pi x\,dx = (-1)^{n+1} \frac{(2n)!}{(2r\pi)^{2n+1}}. \tag{33}$$

$$\int_0^1 A_{2n+1}(x) \cos 2r\pi x \, dx = 0. \tag{34}$$

$$\int_0^1 A_{2n}(x) \cos 2r\pi x \, dx = (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!}{(2r\pi)^{2n}}. \tag{35}$$

$$\int_0^1 A_{2n}(x) \sin 2r\pi x \, dx = 0. \tag{36}$$

Auch hier bedeutet r eine positive ganze Zahl; die Formeln (33) und (35) weisen wieder einen Faktor mehr auf, als die entsprechenden der Schläflischen Definition.

C. Integrale von Produkten.

Gestützt auf die Multiplikation der Summenformeln (23) und (24) werden durch nachherige Integration

$$\int_0^1 A_{2m+1}(x) A_{2n+1}(x) \, dx = (-1)^{m+n} \frac{(2m)! \, (2n)!}{(2m+2n+2)!} B_{m+n+1}. \tag{37}$$

$$\int_0^1 A_{2m}(x) A_{2n}(x) \, dx = (-1)^{m+n} \frac{(2m-1)! \, (2n-1)!}{(2m+2n)} B_{m+n}. \tag{38}$$

$$\int_0^1 A_{2m+1}(x) A_{2n}(x) \, dx = \int_0^1 A_{2m}(x) A_{2n+1}(x) \, dx = 0. \tag{39}$$

Für $n = m$ werden die zwei erstern Formeln

$$\int_0^1 \left\{A_{2n+1}(x)\right\}^2 dx = \frac{\left\{(2n)!\right\}^2}{(4n+2)!} B_{2n+1} \qquad \text{und} \tag{40}$$

$$\int_0^1 \left\{A_{2n}(x)\right\}^2 dx = \frac{\left\{(2n-1)!\right\}^2}{(4n)!} B_{2n}. \tag{41}$$

Wir könnten auch hier wieder als obere Grenze $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ wählen, worauf diese Integrale den 2ten (4ten) Teil der obigen Integrale (37) und (38) oder (40) und (41) ausmachen würden.

Ein Vergleich mit den Formeln bei Schläflis Definition zeigt, dass die Formeln der $\chi(n, x)$-Funktion wieder einfachere Gestalt aufweisen.

Auch diese Integralbetrachtungen könnten natürlich beliebig weit ausgedehnt werden.[59])

§ 28. Andere Definitionen von Glaisher.

Da Glaisher im Laufe seiner Untersuchungen zu Entwicklungen kommt, welche nach fortschreitenden Funktionen $\left\{A_n(x) - 2^n A_n\left(\frac{1}{2}x\right)\right\}$ laufen, so führt er auch diese Funktion als eigene Definition ein, indem er setzt $A'_n(x) = A_n(x) - 2^n A_n\left(\frac{1}{2}x\right)$.

Er führt dann die Betrachtung dieser $A'_n(x)$-Funktion entsprechend derjenigen der $A_n(x)$-Funktion durch und gelangt auch zu ganz entsprechenden Resultaten, ohne aber neue Gesichtspunkte aufzudecken. Vorteile bietet diese Funktion keine, da keine der Formeln eine wesentliche Änderung erfahren.[60])

In derselben Arbeit führt Glaisher noch zwei weitere Definitionen der Bernoullischen Funktion ein, die in sehr engem Zusammenhang mit den früher erwähnten Definitionen stehen, da er setzt

$$V_n(x) = n A_n(x) \quad \text{und} \quad U_n(x) = n A'_n(x).$$

Diese beiden schmiegen sich jeweilen eng an die $A_n(x)$- resp. $A'_n(x)$-Funktion an.

Trotzdem jetzt die Definitionsformeln den allgemeinen Nenner $\frac{1}{n}$ der rechten Seite nicht mehr besitzen, werden die daraus abgeleiteten Formeln nicht einfacher; nach Glaisher sollen sie sich besser zur symbolischen Darstellung eignen als seine früher erwähnten Definitionen. Während Glaishers $B_n(x)$-Funktion mit der Raabeschen Definition übereinstimmt, stimmt seine $V_n(x)$-Funktion mit der Schlömilchschen $\varphi(x, n)$-Funktion überein. Die Untersuchung dieser beiden Funktionen geht ähnlich vor sich, wie die Betrachtung seiner erstern Definitionen; doch wird dabei die symbolische Darstellungsweise angewandt, wo sie überhaupt anzuwenden ist.[61])

Endlich führt derselbe Mathematiker noch zwei weitere Definitionen der Bernoullischen Funktion ein, die mit der $A_n(x)$- resp. $A'_n(x)$-Funktion verbunden sind durch die Beziehungen

$$\alpha_n(x) = A_n\left(x + \frac{1}{2}\right) \quad \text{und} \quad \alpha_n'(x) = A_n'\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Auch hier erfolgen die allerdings nur kurzen Betrachtungen darüber in entsprechender Weise wie bei den erstern Definitionen.[62])

V. Folgerungen.

§ 29. Zusammenhang der verschiedenen Definitionen.

Wir geben vorerst eine Übersicht der Definitionen, die wir einlässlich betrachtet haben; alle übrigen können ja aus denselben hergeleitet werden; deshalb führen wir dieselben auch bei den Vergleichungen der einzelnen Funktionen nicht an.

Es waren

$$B''(x) = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{1}{2}x^{2n} + \frac{1}{2}\binom{2n}{1}B_1 x^{2n-1} - \frac{1}{4}\binom{2n}{3}B_2 x^{2n-3} + - \cdots\cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n}\binom{2n}{2n-1}B_n x. \quad (1)$$

$$B'(x) = \frac{x^{2n+2}}{2n+2} - \frac{1}{2}x^{2n+1} + \frac{1}{2}\binom{2n+1}{1}B_1 x^{2n} - \frac{1}{4}\binom{2n+1}{3}B_2 x^{2n-2} + - \cdots\cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n}\binom{2n+1}{2n-1}B_n x^2. \quad (2)$$

Die Reihen brechen ab mit dem Glied in x^2 oder x, je nachdem n eine ungerade oder eine gerade Zahl ist.

$$\varphi(x,n) = x^n - \frac{1}{2}n x^{n-1} + \binom{n}{2}B_1 x^{n-2} - \binom{n}{4}B_2 x^{n-4} + \binom{n}{6}B_3 x^{n-6} - + \cdots\cdots \quad (3)$$

Hier bricht die Reihe ab mit dem Gliede in x^2 oder x, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

$$\chi(n,x) = \frac{1}{n!}\left\{x^n - \frac{n}{2}x^{n-1} + \sum_{\lambda=1}(-1)^{\lambda-1}\binom{n}{2\lambda}B_\lambda x^{n-2\lambda}\right\} \quad (4)$$

Die Reihe bricht von selbst ab infolge von $\binom{n}{2\lambda}$.

$$B_n(x) = \frac{x^n}{n} - \frac{1}{2}x^{n-1} + \frac{n-1}{2!}B_1 x^{n-2} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}B_2 x^{n-4} + - \cdots\cdots \quad (5)$$

Die Reihe schliesst mit dem Gliede in x^2 oder x für ein gerades oder ungerades n.

$$A_n(x) = \frac{1}{n}\left\{x^n - \frac{1}{n} n x^{n-1} + \binom{n}{2} B_1 x^{n-2} - \binom{n}{4} B_2 x^{n-4} + \cdots\right\} \quad (6)$$

Der Exponent von x darf nie negativ werden.

Die einzelnen Definitionen können wir in zwei Gruppen teilen; die eine Gruppe enthält die Definition von Raabe, diejenige von Schlömilch und die erste von Glaisher, also die Funktionen $B(x)$, $\varphi(x, n)$ und $B_n(x)$. Es sind dies alles Funktionen, bei welchen kein von x freier Term vorkommen darf. Die zweite Gruppe enthält die Funktionen, welche einen selbständigen, von x freien Ausdruck aufweisen; es sind dies alle übrigen, also die Funktionen von Glaisher und von Schläfli, nämlich $A_n(x)$, $A'_n(x)$, $V_n(x)$, $U_n(x)$ und $\chi(n, x)$.

Sämtliche Funktionen stehen mit denjenigen der gleichen Gruppe in engem Zusammenhang; etwas komplizierter sind die Beziehungen der Definitionen der einen Gruppe zu denjenigen der andern Gruppe; wir erhalten folgende Beziehungen, welche den Zusammenhang der einzelnen Definitionen veranschaulichen:

I. Gruppe:

$$B''(x) = \frac{\varphi(x, 2m+1)}{2m+1}; \qquad B'(x) = \frac{\varphi(x, 2m+2)}{2m+2}. \quad (7)$$

$$B''(x) = B_{2m+1}(x); \qquad B'(x) = B_{2m+2}(x). \quad (8)$$

$$\varphi(x, n) = n\, B_n(x). \quad (9)$$

II. Gruppe:

$$\chi(n, x) = \frac{1}{(n-1)!} A_n(x); \qquad A_n(x) = (n-1)!\ \chi(n, x). \quad (10)$$

III. Gruppen gegenseitig:

$$B'(x) = (2n+1)!\ \chi(2n+2, x) + (-1)^{n+1} \frac{B_{n+1}}{2n+2}. \quad (11)$$

$$B''(x) = (2n)!\ \chi(2n+1, x). \quad (12)$$

$$B'(x) = A_{2n+2}(x) - A_{2n+2}(0); \qquad B''(x) = A_{2n+1}(x). \quad (13)$$

$$\varphi(x, 2n) = (2n)!\,\chi(2n, x) + (-1)^n B_n;$$

$$\varphi(x, 2n+1) = (2n+1)!\,\chi(2n+1, x). \quad (14)$$

$$\varphi(x, 2n) = 2n\, A_{2n}(x) + (-1)^n B_n; \quad \varphi(x, 2n+1) = (2n+1) A_{2n+1}(x). \quad (15)$$

Aus den obigen Beziehungen lassen sich die Werte für die übrigen Formeln durch einfache algebraische Umwandlung finden.

Gestützt auf die Tabellen I—IV (Seite 92—95), wo die Werte der für unsere Betrachtungen wichtigsten Definitionen für die einzelnen Argumente zusammengestellt sind, können wir obige Beziehungen auf ihre Richtigkeit prüfen.

§ 30. Vergleichung der einzelnen Definitionen.

A. Betreffs ihrer Herleitung.

Die Herleitungen der einzelnen Definitionen der Bernoullischen Funktion sind sehr verschieden. Überblicken wir alle, so erkennen wir bald, dass die einfachste und eleganteste Herleitung der Definitionsgleichung von Schläfli stammt, der ohne alle Umwege zu derselben gelangt. Zudem steht dieselbe mit der Fundamentalgleichung der Bernoullischen Zahlen in innigem Zusammenhang; dies bietet uns daher den Vorteil, dass wir aus *einer* Grundgleichung sowohl die Bernoullischen Funktionen, als auch die Bernoullischen Zahlen ohne grosse Schwierigkeit herleiten können; diese Gleichung nennen wir die «*Fundamentalgleichung der Bernoullischen Funktionen und der Bernoullischen Zahlen*»; dieselbe lautet

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{S_m y^{m+1}}{m!} = \frac{y e^{xy}}{e^y - 1} - \frac{y}{e^y - 1}; \qquad (16)$$

der erste Bruch rechts führt auf die Bernoullischen Funktionen, der zweite dagegen auf die Bernoullischen Zahlen.

Keine der übrigen Definitionen zeigt diesen Zusammenhang; bei all denselben braucht es grösserer Umwandlungen und längerer Rechnungen, bis wir auf die gewünschte Definitionsgleichung gelangen.[63])

B. Betreffs der Derivierten.

Stellen wir die *einfachen Ableitungen* der verschiedenen Definitionen zusammen, so ergibt sich, dass die Ableitungen der Funktionen nach Raabe und nach Schlömilch eine unerwünschte Komplikation durch den Hinzutritt einer Bernoullischen Zahl für die ungerade Bernoullische Funktion zeigen. Die Definition nach Glaisher weist zwar nur *eine* Formel auf; dagegen tritt vor die Ableitung noch ein Faktor, während bei der Schläflischen Definition die Derivierte einer Bernoullischen Funktion wieder eine reine Bernoullische Funktion ist; letztere Definition ist somit die bequemste.

Was die *mehrfachen Ableitungen* anbetrifft, so lassen sich diejenigen der Raabeschen Definition nicht darstellen, weil dort der

Exponent nur ungenügend angedeutet wird im Funktionssymbol. Ein Vergleich der übrigen zeigt, dass bei der Schlömilchschen Definition verschiedene Formeln nötig sind zur Darstellung der geraden oder ungeraden wiederholten Ableitungen der geraden oder ungeraden Bernoullischen Funktion. Bei Glaishers Definition fallen die unbequemen Bernoullischen Zahlen weg; ebenso ist zur Darstellung all der Ableitungen nur noch eine Formel nötig; doch zeigt dieselbe zwei vorgesetzte komplizierende Faktoren. Schläflis Definition ist auch hier die einfachste, da die wiederholten Ableitungen derselben stets reine Bernoullische Funktionen sind.[64])

C. In Bezug auf die Integraldarstellungen.

Das von den Derivierten Gesagte gilt ebenfalls von den *einfachsten Integralen,* da dieselben ja nur Umkehrungsfunktionen ersterer sind. Auch die *übrigen* Integraldarstellungen sprechen betreffs ihrer Einfachheit zu gunsten der Definition von Schläfli, da selbst die entsprechenden Formeln der Definition von Glaisher meist einen vorgesetzten Faktor mehr enthalten.[65])

D. In Bezug auf die Funktion mit inversem Argument.

Die Formeln dafür lauten bei allen Definitionen gleich; ihre Herleitungen sind aber sehr verschieden. Raabe geht zur Ableitung seiner obigen Formel ziemlich weit auf seine einleitenden Untersuchungen zurück; Glaisher stützt sich auf die Definitionssummenformeln des Sinus und Cosinus und stellt die beiden gefundenen Formeln zu einer allgemeinern zusammen. Sehr elegant und kurz sind die Herleitungen von Schlömilch und von Schläfli, wobei Schläfli mit Vorteil die Koeffizientenvergleichung verwendet.[66])

E. Betreffs der Funktion mit negativem Argument.

Es geben auch hierin alle Funktionen ziemlich ähnliche Werte, mit Ausnahme der symbolischen Darstellungsweise von Glaisher. Der Nenner im zweiten Term des Ausdruckes für die $\chi(n, -x)$-Funktion ist keine wesentliche Erschwerung, da die andern Definitionen, mit Ausnahme derjenigen von Raabe, auch einen vorgesetzten Faktor aufweisen.[67])

F. Betreffs andrer Formeln.

Wir haben bei den Definitionen von Raabe und Schlömilch mehr als bei den beiden andern näher betrachteten Funktionen die gerade und die ungerade Bernoullische Funktion trennen müssen; die Definitionen

von Glaisher und von Schläfli sind daher allgemeiner gehalten, und es ist das dem Umstande zuzuschreiben, dass die beiden ersten Definitionen kein von der Variabelen freies Glied enthalten dürfen; dies ist auch der Grund, dass bei den Differentialquotienten und Integraldarstellungen dieser Funktionen die lästigen Zusatzglieder mit den Bernoullischen Zahlen auftreten. Die Formeln, welche eine Summe von aufeinanderfolgenden Bernoullischen Funktionen darstellen, entscheiden wieder zu Gunsten der Funktionen von Glaisher und von Schläfli, da dieselben nur je *eine* Formel aufweisen, während die übrigen auch hierbei einen Unterschied zwischen geraden und ungeraden Bernoullischen Funktionen machen müssen. Die entsprechenden Formeln dieser Summe bei Glaisher und bei Schläfli sind ganz von gleicher Form; schon ihre Herleitung ist ziemlich ähnlich, da beide durch Koeffizientenvergleichung aus Entwicklungen nach Bernoullischen Funktionen zum Ziele gelangen. Glaisher zeigte im Laufe seiner Untersuchungen, also nicht etwa als Ausgangspunkt derselben, dass die $A_n(x)$-Funktionen sich geben lassen als

$$\left[\frac{a^n}{(n-1)!}\right] \text{ in } a\,\frac{e^{ax}}{e^a-1}.$$

Er kommt zu dieser Thatsache, wie wir gesehen, auf ziemlich umständliche Art und Weise, ausgehend von einer Formel, die selbst eine sehr komplizierte Herleitung aufweist; zudem ist seine Bernoullische Funktion kein reiner Koeffizient der Potenz von a, da stets im Nenner eine Fakultät sein muss. Schläfli aber geht direkt von dieser Entwicklung aus, indem er definiert

$$\chi(n, x) = n^{te} \text{ Bernoullische Funktion} = [y^n] \text{ in } y\,\frac{e^{xy}}{e^y-1}.$$

Diese Entwicklung bildet also seinen Ausgangspunkt, auf welchen sich alle Untersuchungen stützen; daher gestaltet sich seine Theorie der Bernoullischen Funktion viel einheitlicher und ist derjenigen von Glaisher überlegen.[66])

G. Betreffs Entwicklung in Reihen.

Alle Definitionen lassen sich leicht als trigonometrische Reihen darstellen und zwar die geraden Bernoullischen Funktionen als Cosinusreihen und die ungeraden als Sinusreihen.

Raabe und Glaisher gelangen durch fortgesetzte Differentiation der bekannten Reihe für $\pi\left\{\frac{1}{2} - x\right\}$,[68]) woraus successive die ein-

zelnen Bernoullischen Funktionen entstehen, zu ihren diesbezüglichen Resultaten.

Elegant leitet Schlömilch, wie gesehen, seine Reihen her, gestützt auf die Fourierschen Reihen und Integrale. Genau auf dieselbe Weise würden wir auch bei den übrigen drei Definitionen zum Ziele gelangen; das Ziel würde zudem noch eher erreicht, da die aufgestellten Integralformeln das zu lösende Integral, welches die Koeffizienten der Fourierschen Entwicklung darstellt, mit geringer Mühe auswerten.[65])

Höchst interessant und wichtig ist die Herleitung dieser Formeln nach Schläfli, der gestützt auf die Theorie der Eulerschen Integrale und der Gammafunktion eine Reihenentwicklung so transformiert, bis er schliesslich zu den entsprechenden Beziehungen gelangt. Seine Resultate bieten den grossen Vorteil, dass sie nur Spezialwerte sind einer von ihm selbst aufgestellten Hauptformel

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{e^{i\left(2\lambda\pi\Theta-\frac{n\pi}{2}\right)}}{\lambda^n} = (2\pi)^n \int_0^1 \left\{\chi(n,\varphi)-\chi(n,\Theta)\right\} \frac{1}{2}\left[1+i\operatorname{cotg}(\varphi-\Theta)\pi\right] d\varphi. \quad (17)$$

Durch Trennung der reellen von der imaginären Komponente erhält er die beiden ganz allgemeinen Formeln

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos\left(2\lambda\pi\Theta-\frac{n\pi}{2}\right)}{\lambda^n} = -\frac{(2\pi)^n}{2}\chi(n,\Theta) \quad \text{und} \quad (18)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin\left(2\lambda\pi\Theta-\frac{n\pi}{2}\right)}{\lambda^n} = (2\pi)^n \int_0^1 \left\{\chi(n,\varphi)-\chi(n,\Theta)\right\} \operatorname{cotg}\pi(\varphi-\Theta)\, d\varphi. \quad (19)$$

Aus Formel (18) resultieren dann die wichtigen trigonometrischen Summenformeln

$$\chi(2m,x) = (-1)^{m-1} \frac{2}{(2\pi)^{2m}} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos 2\lambda\pi x}{\lambda^{2m}} \quad \text{und} \quad (20)$$

$$\chi(2m+1,x)=(-1)^{m-1}\frac{2}{(2\pi)^{2m+1}}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\frac{\sin 2\lambda\pi x}{\lambda^{2m+1}}. \qquad (21)$$

Bei dieser Definition haben wir, wie sonst bei keiner andern, ursprünglich alle diese Reihenentwicklungen in derselben Formel vereinigt, was sehr zu Gunsten dieser Definition spricht.

Wir haben auch schon erwähnt, dass mit Hülfe dieser Funktion als Reihenentwicklung Schläfli die *Raabesche Restformel* herleitet und ebenso den Zusammenhang derselben mit der *Riemannschen Reihe* nachweist; es sind dies Beziehungen, welche die Allgemeinheit der Schläflischen Definition trefflich beleuchten.[69])

H. Betreffs Entwicklungen nach Bernoullischen Funktionen.

Entwicklungen, in welchen die Bernoullischen Funktionen als Koeffizienten auftreten, lassen sich aus jeder Definition herleiten; aber nur bei Schläfli sind die Bernoullischen Funktionen reine Koeffizienten solcher Entwicklungen; auch hier liefert diese Definition die einfachsten Formeln.[70])

§ 31. Diskussion der „Bernoullischen Funktion."

Unsere früher hergeleiteten Reihenentwicklungen der Bernoullischen Funktion haben gezeigt, dass dieselben nur gültig sind für $0<x<1$[71]); deshalb haben wir in unsern Untersuchungen hauptsächlich das Intervall $x=0$ bis $x=1$ berücksichtigt, wohl aber auch Gleichungen aufgestellt, um den Verlauf der Funktion ausserhalb dieses Intervalles kennen zu lernen.[72]) Gestützt auf diese Beziehungen hat sich uns die Frage aufgedrängt, wie weit sich das Konvergenzgebiet für die verschiedenen Definitionen überhaupt erstrecke. Um diese Frage zu entscheiden, stellen wir die Funktionen graphisch dar. Wir tragen die Werte für das Argument x (z) als Abscissen auf und die zugehörigen Funktionswerte y als Ordinaten; die einzelnen Werte sind in den Tabellen I—IV zusammengestellt; den Verlauf der verschiedenen Funktionen zeigen die Tabellen V—VIII.

1. Die Bernoullischen Funktionen ersten Grades. Dieselben stellen bei allen Definitionen eine Gerade dar; bei der Definition von Raabe, wie auch bei derjenigen von Schlömilch ist diese Gerade die Winkelhalbierende durch den ersten und dritten Quadranten, geht also durch den Ursprung; bei den Definitionen von Glaisher und Schläfli

schneidet sie die Abscissenaxe im Punkte $x = \frac{1}{2}$, aber ebenfalls unter einem Winkel von 45°.

2. *Die Bernoullischen Funktionen zweiten Grades.* Dieselben stellen eine gewöhnliche Parabel dar, und zwar ist die Parallele zur Ordinatenaxe durch den Punkt $x = \frac{1}{2}$ die Hauptaxe der Parabel mit dem Parameter $p = \frac{1}{4}$. Bei den Definitionen von Raabe und von Schlömilch schneidet diese Parabel die Abscissenaxe in den beiden Punkten $x = 0$ und $x = 1$, bei den andern Definitionen innerhalb dieses Intervalles. Dass dem so ist, beweist die Untersuchung einer einzelnen Funktion, da das Verfahren bei allen dasselbe ist; wir wählen dazu diejenige von Schläfli

$$\chi(2, x) = y = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}.$$

$$12\,y = 6x^2 - 6x + 1.$$

Transformieren wir diese Gleichung durch $x = x' + \frac{1}{2}$ und $y = y' - \frac{1}{24}$, so werden $y' = \frac{1}{2}x'^2$ und $p = \frac{1}{4}$; durch ähnliche Transformation der übrigen Definitionen gelangen wir stets auf dieselbe Gleichung.

3. *Die Bernoullischen Funktionen höheren Grades.* Alle diese Funktionen stellen *Parabeln höheren Grades* dar, da zu einem einzigen Werte von y stets mehrere Werte von x gehören; der Grad steigt mit dem Exponenten des ersten Gliedes. Im Intervall von 0 bis 1 weisen dieselben entweder ein Maximum oder ein Minimum oder beide zugleich auf, und es verlaufen die n^{te} und die $(n+4)^{te}$ Funktion entsprechend.

Es besitzen die Funktionen mit *geradem Exponenten* $n = 2, 6, 10, \ldots\ldots, (4\lambda - 2)$ ein *Minimum* bei $x = \frac{1}{2}$ und gehen auf beiden Seiten der Ordinatenaxe mit positiven Funktionswerten ins Unendliche, während die Funktionen für $n = 4, 8, 12, \ldots\ldots, 4\lambda$ ein *Maximum* bei $x = \frac{1}{2}$ aufweisen, beidseitig schwach negativ werden, um aber wieder mit beiden Ästen der Kurve mit positiven Funktionswerten ins Unendliche zu gehen.

Etwas abweichend davon verhalten sich die Kurven der Bernoullischen Funktionen mit *ungeraden Exponenten;* dieselben gehen sowohl mit positiven Funktionswerten auf positiver Seite der Ordinatenaxe ins Unendliche, als auch mit negativen auf negativer Seite. Alle diese Kurven ungeraden Grades schneiden die Abscissenaxe in den Punkten $0, \frac{1}{2}$ und 1, und es sind die Kurven für $n = 3, 7, 11, \ldots, (4\lambda - 1)$ im Intervall von $x = 0$ bis $x = \frac{1}{2}$ *positiv* und von $x = \frac{1}{2}$ bis $x = 1$ *negativ;* von den Punkten $x = 0$ und $x = 1$ aus gehen sie absolut gleichwertig ins Unendliche. Für $n = 5, 9, 13, \ldots, (4\lambda + 1)$ nehmen die Funktionen zwischen $x = 0$ und $x = \frac{1}{2}$ *negative* Werte an, zwischen $x = \frac{1}{2}$ und $x = 1$ dagegen *positive;* in kurzer Entfernung ausserhalb dieses Intervalles finden sich nochmals zwei Schnittpunkte mit der Abscissenaxe, worauf auch diese Kurven absolut gleichwertig ins Unendliche laufen.

Es interessiert uns nun zu wissen, wie sich die Kurven im Unendlichen verhalten; denn dass dort die zwei Äste der einzelnen Funktionskurven zusammenhangen, ist bekannt, da ja die Parabeln unikursale oder rationale Kurven sind und sich alle Punkte derselben darstellen lassen durch algebraische Funktionen eines variabelen Parameters.

Wir greifen, da alle Funktionen höhern Grades der verschiedenen Definitionen analoge Form haben, diejenigen von Schläfli heraus und untersuchen vorerst

A. Die ungerade Bernoullische Funktion. Wir wählen dazu

$$\chi(5, x) = y = \frac{x^5}{120} - \frac{x^4}{48} + \frac{x^3}{72} - \frac{x}{720} \quad \text{oder}$$

$$6x^5 - 15x^4 + 10x^3 - x - 720y = 0.$$

Die Schnitte dieser Kurve mit der unendlich fernen Geraden erhalten wir, wenn wir die Gleichung mit z homogen machen durch die Formeln $x = \frac{x'}{z}$ und $y = \frac{y'}{z}$ und dann $z = 0$ setzen; diese Formeln vorerst eingesetzt, gibt, wenn zugleich mit z^5 multipliziert wird,

$$6x'^5 - 15x'^4z + 10x'^3z^2 - x'z^4 - 720y'z^4 = 0;$$

diese Gleichung wird für $z = 0$ zu $x'^5 = 0$, d. h.,

die Kurve schneidet die unendlich ferne Gerade in der Richtung der positiven Ordinatenaxe in fünf zusammenfallenden Punkten.

Zur nähern Untersuchung dieser zusammenfallenden Punkte im Unendlichen transformieren wir die unendlich ferne Gerade, welche wir parallel der Abscissenaxe annehmen können, ins Endliche, indem wir sie auf die Abscissenaxe projizieren; dazu dienen die Formeln

$$y = \frac{1}{y'} \text{ und } x = \frac{x'}{y'}; \text{ also } y' = \frac{1}{y} \text{ und } x' = \frac{x}{y}.$$

Für $y = \infty$ wird $y' = 0$, d. h.,

die unendlich ferne Gerade wird auf die Abscissenaxe projiziert und letztere ins Unendliche.

Durch die angedeutete Substitution entsteht, wenn mit y'^5 multipliziert wird,

$$6x'^5 - 15x'^4y' + 10x'^3y'^2 - x'y'^4 - 720y'^4 = 0. \qquad (\alpha)$$

Dies ist die Gleichung der transformierten Kurve; in dieser entspricht der Nullpunkt dem unendlich fernen Punkt der Ordinatenaxe der ursprünglichen Kurve.

Die Gleichung beginnt erst mit Gliedern vierten Grades; also ist der neue Nullpunkt O' ein vierfacher Punkt; die Tangenten in demselben erhalten wir durch Nullsetzen der Glieder niedrigsten Grades, also durch $y'^4 = 0$, was uns sagt, dass alle vier Tangenten des vierfachen Punktes mit der Abscissenaxe zusammenfallen. Für $y' = 0$ wird $x'^5 = 0$, d. h., die Abscissenaxe schneidet die Kurve im vierfachen Punkte O' in fünf zusammenfallenden Punkten.

Zur nähern Untersuchung der Kurve in der Nähe dieses vierfachen Punktes geben wir dem x' kleine Werte.

a) $x' = positiv = 0{,}01$. Die Gleichung (α) geht dann über in

$$6 \cdot 0{,}01^5 - 15 \cdot 0{,}01^4y' + 10 \cdot 0{,}01^3y'^2 - 0{,}01y'^4 - 720y'^4 = 0;$$

da y' selbst klein ist, so können wir infolge der vierten und fünften Potenz, in denen das kleine x' vorkommt, die beiden ersten Glieder vernachlässigen; dann folgt, wenn durch y'^2 dividiert wird,

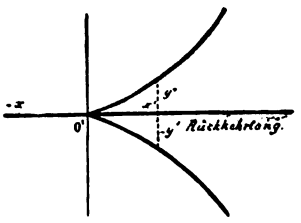
$$0{,}00001 = 720{,}01\,y'^2; \quad y' = \pm\sqrt{\frac{0{,}00001}{720{,}01}},$$

d. h., zu einem positiven kleinen x' gehören zwei reelle absolut gleichwertige, ein positives und ein negatives y'. Geben wir dem x' grössere positive Werte, so steigt der absolute Wert der y' ziemlich rasch.

b) $x' = negativ = -0{,}01$. Für diesen Wert wird aus (α) unter Vernachlässigung der beiden ersten Glieder und durch Division durch y'^2

$$719{,}99\,y'^2 = -0{,}00001;\quad y' = \pm\sqrt{-\frac{0{,}00001}{719{,}99}} = \text{imaginär.}$$

Dies ergibt sich auch aus andern negativen Werten für x', somit folgt, dass auf der negativen Seite der Ordinatenaxe keine Kurvenpunkte liegen. Der neue Nullpunkt erscheint daher als ein vierfacher Punkt von der Art, dass die Kurve in ihm eine Spitze bildet, und die Abscissenaxe ist Rückkehrtangente in demselben mit fünffachem Berührungspunkt. Dasselbe gilt für den unendlich fernen Punkt der Ordinatenaxe der ursprünglichen Kurve; derselbe ist ein vierfacher Punkt der Parabel, in welchem alle vier Tangenten mit der unendlich fernen Geraden zusammenfallen; wir können den Punkt als *Rückkehrpunkt zweiter Ordnung* bezeichnen.



Da wir diese Ausführungen auch auf die Bernoullischen Funktionen höhern Grades ausdehnen können, bei welchen die vielfachen Punkte nur in höherem Grade der Vielfachheit auftreten, so ergibt sich der *Satz:*

Die ungeraden Bernoullischen Funktionen höhern, $(2m+1)^{ten}$ Grades, analytisch interpretiert, stellen Parabeln höhern Grades dar; bei denselben ist der unendlich ferne Punkt in der Richtung der positiven Ordinatenaxe ein $2m$-facher Punkt, in welchem alle $2m$ Tangenten mit der unendlich fernen Geraden zusammenfallen. Die Kurve bildet in ihm eine Spitze und die unendlich ferne Gerade ist Rückkehrtangente mit $(2m+1)$-fachem Berührungspunkt; der Punkt ist ein Rückkehrspunkt von der Ordnung m.

B. Die gerade Bernoullische Funktion. Etwas anders gestaltet sich der Verlauf dieser Funktion im Unendlichen. Zur Untersuchung wählen wir

$$\chi(4, x) = y = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{24} - \frac{1}{720} \qquad \text{oder}$$

$$30\,x^4 - 60\,x^3 + 30\,x^2 - 720\,y - 1 = 0.$$

Die Schnittpunkte mit der unendlich fernen Geraden werden gestützt auf die homogene Gleichung

$$30\,x'^4 - 60\,x'^3 z + 30\,x'^2 z^2 - 720\,y' z^3 - z^4 = 0,$$

für $z = 0$ $\qquad x'^4 = 0$, d. h.,

die unendlich ferne Gerade wird von der Kurve in vier zusammenfallenden Punkten geschnitten in der Richtung der positiven Ordinatenaxe.

Projizieren wir die unendlich ferne Gerade wieder durch die

frühere Substitution auf die Abscissenaxe ins Endliche, so folgt, wenn mit y'^4 multipliziert wird,

$$30x'^4 - 60x'^3y' + 30x'^2y'^2 - y'^4 - 720y'^3 = 0. \qquad (\beta)$$

Dies ist die Gleichung der transformierten Kurve; da sie erst mit Gliedern dritten Grades beginnt, so ist der neue Nullpunkt O' ein dreifacher Punkt; die Tangenten in demselben erhalten wir aus $y'^3 = 0$, d. h., alle drei Tangenten fallen in der Abscissenaxe zusammen, und diese berührt die Kurve in vier zusammenfallenden Punkten; also ist auch der unendlich ferne Punkt der Ordinatenaxe ein dreifacher Punkt der Kurve, dessen drei Tangenten mit der unendlich fernen Geraden zusammenfallen.

Zur noch genauern Untersuchung dieser Kurve in der Nähe des dreifachen Punktes transformieren wir die Gleichung (β) wie folgt:

$$30x'^2(x'-y')^2 = y'^3(y'+720).$$

$$x'(x'-y') = \pm\sqrt{\frac{y'^3(y'+720)}{30}}.$$

$$x'^2 - x'y' \mp \sqrt{\frac{y'^3(y'+720)}{30}} = 0.$$

$$x' = \frac{1}{2}\left\{ y' \pm \sqrt{y'^2 \pm 4\sqrt{\frac{y'^3(y'+720)}{30}}} \right\}$$

Die Quadratwurzel wird nur für $y' = 0$ selbst zu Null.

Geben wir jetzt dem y' kleine Werte, so wird für

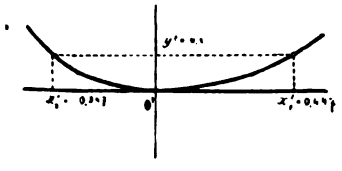
a) $y' = positiv = 0{,}1$.

$$x' = \frac{1}{2}\left\{ 0{,}1 \pm \sqrt{0{,}01 + 4\sqrt{\frac{0{,}001 \cdot 720{,}1}{30}}} \right\} = \frac{1}{2}\left\{ 0{,}1 \pm 0{,}794 \right\}.$$

$$x_1' = 0{,}447; \qquad x_2' = -0{,}347.$$

Ebenso würde ein grösseres y' zwei verschiedene reelle Werte liefern. Somit gehören zu einem positiven y' zwei verschiedene reelle Werte von x', wovon stets der eine *positiv*, der andere *negativ* ist.

b) $y' = negativ\ und\ klein$. In diesem Falle wird die Quadratwurzel stets imaginär und somit auch der Wert für x'; daraus folgt, dass die Kurve ganz oberhalb der Abscissenaxe liegt und von der Ordinatenaxe nicht symmetrisch geteilt wird. Der dreifache Punkt unterscheidet sich also nicht wesentlich von einem gewöhnlichen Kurvenpunkt, nur ist die Krümmung der Kurve in der Nähe desselben eine schwächere.



Da diese Untersuchungen auch ausgedehnt werden können auf die geraden Bernoullischen Funktionen mit höhern Exponenten, so ergibt sich der *Satz:*

Die geraden Bernoullischen Funktionen höhern, $2m^{ten}$ Grades stellen ebenfalls Parabeln höhern, $2m^{ten}$ Grades dar; bei denselben ist der unendlich ferne Punkt in der Richtung der Ordinatenaxe ein $(2m-1)$-facher Punkt, in welchem alle $(2m-1)$ Tangenten mit der unendlich fernen Geraden zusammenfallen, welche die Kurve in $2m$ zusammenfallenden Punkten berührt. Die Kurve liegt ganz auf der einen Seite der unendlich fernen Geraden, und der $(2m-1)$-fache Punkt unterscheidet sich nicht wesentlich von einem gewöhnlichen Kurvenpunkt, nur ist die Krümmung in der Nähe desselben eine schwächere.

Da diese Untersuchungen für alle Definitionen analog durchgeführt werden können und auch entsprechende Resultate liefern, so sind wir über den Verlauf aller Bernoullischen Funktionen im Endlichen wie im Unendlichen genügend aufgeklärt.

Die Tabellen V—VIII zeigen nun deutlich, dass das Gültigkeitsgebiet der einzelnen Definitionen ein ziemlich verschieden grosses ist; am kleinsten ist das Konvergenzgebiet der Schlömilchschen Definition; das beste Gebiet liegt hier zwischen -1 und $+2$; ausserhalb desselben nimmt die Funktion sehr rasch grosse Werte an. Etwas, aber nur wenig grösser ist das Konvergenzgebiet der Definitionen von Raabe und von Glaisher, was aus den Tabellen V und VIII ersichtlich ist. Die Parabeln der Definition von Schläfli sind diejenigen, welche sich der Abscissenaxe am weitesten, sowohl nach der positiven wie nach der negativen Seite hin anschmiegen und zwar um so mehr, je grösser der Grad der Funktion ist; so erstreckt sich das beste Gebiet für $n = 6$ schon zwischen -3 und $+4$; bei den noch höhern Bernoullischen Funktionen wird dieses Gebiet bedeutend vergrössert.

Es ist dies ein weiterer Vorzug der Definition von Schläfli, wieder bewirkt durch die Fakultät im Nenner.

§ 32. Entscheidung.

Gestützt auf all unsere frühern Betrachtungen, gelangen wir zu folgendem Resultat:

Die Definition der Bernoullischen Funktion nach L. Schläfli ist die für die Theorie zutreffendste, weil

1. *ihr Konvergenzgebiet sich am weitesten ausdehnt,*
2. *alle Formeln einfachere Gestalt annehmen,*
3. *dieselbe die allgemeinste ist und*
4. *die ganze Theorie sich einheitlicher aufbaut, infolge der trefflich gewählten Grundbeziehung zwischen den Bernoullischen Zahlen und Funktionen und der Anwendung des Prinzipes der Koeffizientenvergleichung.*

Tabelle I.

Definition nach J. Raabe: $B^n(x)$.

Arg.	n = 0.	n = 1.	n = 2.	n = 3.	n = 4.	n = 5.
x = − 4.	− 4,000000	10,000000	− 30,000000	100,000000	− 354,000000	1300,000000
x = − 3.	− 3,000000	6,000000	− 14,000000	36,000000	− 98,000000	276,000000
x = − 2.	− 2,000000	3,000000	− 5,000000	9,000000	− 17,000000	33,000000
x = − 1.	− 1,000000	1,000000	− 1,000000	1,000000	− 1,000000	1,000000
x = − 3/4.	− 0,750000	0,656250	− 0,546875	0,430664	− 0,321289	0,233276
x = − 1/2.	− 0,500000	0,375000	− 0,250000	0,140625	− 0,062500	0,023438
x = − 1/4.	− 0,250000	0,156250	− 0,078125	0,024414	0,000977	− 0,003052
x = 0.	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
x = 1/4.	0,250000	− 0,093750	0,015625	0,008789	− 0,004883	− 0,004028
x = 1/2.	0,500000	− 0,125000	0,000000	0,015625	0,000000	− 0,007813
x = 3/4.	0,750000	− 0,093750	− 0,015625	0,008789	0,004883	− 0,004028
x = 1.	1,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
x = 5/4.	1,250000	0,156250	0,078125	0,024414	− 0,000977	− 0,003052
x = 3/2.	1,500000	0,375000	0,250000	0,140625	0,062500	0,023438
x = 7/4.	1,750000	0,656250	0,546875	0,430664	0,321289	0,233276
x = 2.	2,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
x = 3.	3,000000	3,000000	5,000000	9,000000	17,000000	33,000000
x = 4.	4,000000	6,000000	14,000000	36,000000	98,000000	276,000000
x = 5.	5,000000	10,000000	30,000000	100,000000	354,000000	1300,000000

Definition nach O. Schlömilch: $\varphi(z, n)$.

Arg.	n = 1.	n = 2.	n = 3.	n = 4.	n = 5.	n = 6.
z = − 4.	− 4,000000	20,000000	− 90,000000	400,000000	− 1770,000000	7800,000000
z = − 3.	− 3,000000	12,000000	− 42,000000	144,000000	− 490,000000	1656,000000
z = − 2.	− 2,000000	6,000000	− 15,000000	36,000000	− 85,000000	198,000000
z = − 1.	− 1,000000	2,000000	− 3,000000	4,000000	− 5,000000	6,000000
z = − 3/4.	− 0,750000	1,312500	− 1,640625	1,722656	− 1,606445	1,399658
z = − 1/2.	− 0,500000	0,750000	− 0,750000	0,562500	− 0,312500	0,140625
z = − 1/4.	− 0,250000	0,312500	− 0,234375	0,097656	0,004883	− 0,018311
z = 0.	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
z = 1/4.	0,250000	− 0,187500	0,046875	0,035156	− 0,024414	− 0,024170
z = 1/2.	0,500000	− 0,250000	0,000000	0,062500	0,000000	− 0,046875
z = 3/4.	0,750000	− 0,187500	− 0,046875	0,035156	0,024414	− 0,024170
z = 1.	1,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
z = 5/4.	1,250000	0,312500	0,234375	0,097656	− 0,004883	− 0,018311
z = 3/2.	1,500000	0,750000	0,750000	0,562500	0,312500	0,140625
z = 7/4.	1,750000	1,312500	1,640625	1,722656	1,606445	1,399658
z = 2.	2,000000	2,000000	3,000000	4,000000	5,000000	6,000000
z = 3.	3,000000	6,000000	15,000000	36,000000	85,000000	198,000000
z = 4.	4,000000	12,000000	42,000000	144,000000	490,000000	1656,000000
z = 5.	5,000000	20,000000	90,000000	400,000000	1770,000000	7800,000000

Tabelle III.

Definition nach L. Schläfli: $\chi(n, x)$.

Arg.	n = 1.	n = 2.	n = 3.	n = 4.	n = 5.	n = 6.
$x = -4$.	−4,500000	10,083333	−15,000000	16,665278	−14,750000	10,833366
$x = -3$.	−3,500000	6,083333	− 7,000000	5,998611	− 4,083333	2,300033
$x = -2$.	−2,500000	3,083333	− 2,500000	1,503472	− 0,708333	0,275033
$x = -1$.	−1,500000	1,083333	− 0,500000	0,165278	− 0,041667	0,008366
$x = -3/4$.	−1,250000	0,739583	− 0,273438	0,070388	− 0,013387	0,001977
$x = -1/2$.	−1,000000	0,458333	− 0,125000	0,022049	− 0,002604	0,000228
$x = -1/4$.	− 0,750000	0,239583	− 0,039063	0,002680	0,000041	0,000008
$x = 0$.	− 0,500000	0,083333	0,000000	−0,001389	0,000000	0,000033
$x = 1/4$.	− 0,250000	−0,010416	0,007813	0,000076	− 0,000203	−0,000001
$x = 1/2$.	0,000000	−0,041667	0,000000	0,001,215	0,000000	−0,000033
$x = 3/4$.	0,250000	−0,010417	− 0,007813	0,000076	0,000203	−0,000001
$x = 1$.	0,500000	0,083333	0,000000	−0,001389	0,000000	0,000033
$x = 5/4$.	0,750000	0,239583	0,039063	0,002680	− 0,000041	0,000008
$x = 3/2$.	1,000000	0,458333	0,125000	0,022049	0,002604	0,000228
$x = 7/4$.	1,250000	0,739583	0,273438	0,070388	0,013387	0,001977
$x = 2$.	1,500000	1,083333	0,500000	0,165278	0,041667	0,008366
$x = 3$.	2,500000	3,083333	2,500000	1,503472	0,708333	0,275033
$x = 4$.	3,500000	6,083333	7,000000	5,998611	[illegible]	[illegible]
$x = 5$.	4,500000	10,083333	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Definition nach J. W. L. Glaisher: $A_n(x)$.

Arg.	n = 1.	n = 2.	n = 3.	n = 4.	n = 5.	n = 6.
x = − 4.	−4,500000	10,083333	−30,000000	99,991667	−354,000000	1300,003968
x = − 3.	−3,500000	6,083333	−14,000000	35,991667	− 98,000000	276,003968
x = − 2.	−2,500000	3,083333	− 5,000000	9,020833	− 17,000000	33,003968
x = − 1.	−1,500000	1,083333	− 1,000000	0,991667	− 1,000000	1,003968
x = − 3/4.	−1,250000	0,739583	− 0,546875	0,422331	− 0,321289	0,237245
x = − 1/2.	−1,000000	0,458333	− 0,250000	0,132292	− 0,062500	0,027406
x = − 1/4.	− 0,750000	0,239583	− 0,078125	0,016081	0,000977	0,000916
x = 0.	− 0,500000	0,083333	0,000000	− 0,008333	0,000000	0,003968
x = 1/4.	− 0,250000	−0,010416	0,015625	0,000456	− 0,004833	− 0,000060
x = 1/2.	0,000000	−0,041666	0,000000	0,007292	0,000000	− 0,003968
x = 3/4.	0,250000	−0,010416	− 0,015625	0,000456	0,004833	− 0,000060
x = 1.	0,500000	0,083333	0,000000	− 0,008333	0,000000	0,003968
x = 5/4.	0,750000	0,239583	0,078125	0,016081	− 0,000977	0,000916
x = 3/2.	1,000000	0,458333	0,250000	0,132292	0,062500	0,027406
x = 7/4.	1,250000	0,739583	0,546875	0,422331	0,321289	0,237245
x = 2.	1,500000	1,083333	1,000000	0,991667	1,000000	1,003968
x = 3.	2,500000	3,083333	5,000000	9,020833	17,000000	33,003968
x = 4.	3,500000	6,083333	14,000000	35,991667	98,000000	276,003968
x = 5.	4,500000	10,083333	30,000000	99,991667	354,000000	1300,003968

Anmerkungen.

☛ Während der Drucklegung vorliegender Arbeit erschien in den «Mitteilungen» der naturforschenden Gesellschaft in Bern 1900, von J. H. Graf herausgegeben, und mit Noten versehen, ein Brief L. Schläflis an einen Freund, betitelt «*Praktische Integration.*» Derselbe wurde veranlasst durch Fragen des Freundes über die Richtigkeit verschiedener Resultate von J. L. Raabes Differential- und Integralrechnung, Band I, 1839. In dieser Abhandlung gibt Schläfli Beziehungen, die sehr grosse Ähnlichkeit zeigen mit seinen später aufgestellten Relationen der Bernoullischen Funktionen. Stammt dieser Brief wirklich aus dem Jahre 1840, was nach den vorliegenden Untersuchungen von J. H. Graf als bewiesen anzunehmen ist, *so ist Schläfli, zwar ohne den Namen der Funktion zu nennen, schon vor J. Raabe auf diese Funktion gekommen.* Es ist dies ein weiterer Beweis für Schläflis schöpferische Thätigkeit.

Folgende wenige Thatsachen sollen einige Ähnlichkeiten hervorheben:

a) Die auf Seite 7 (89) der «Mitteilungen» der naturforschenden Gesellschaft in Bern 1900 gegebenen Koeffizienten c_1, c_2, c_3, ... stimmen genau überein mit denjenigen bei der Herleitung der Definition der Bernoullischen Zahlen.

b) Die von Schläfli in der angeführten Arbeit, Seite 10 (92) angewandte Formel für c_{2n} ist nicht identisch mit der *später* von ihm gebrauchten. Daher werden die B-Werte nicht gleich den eigentlichen Bernoullischen Zahlen. (Vergleiche Tabelle auf Seite 10 (92) dieses Briefes.) Trotzdem tritt eine unverkennbare Ähnlichkeit der Beziehungen hier und später bei der Bernoullischen Funktion ein; vergleiche in diesem bereits erwähnten Briefe

1. Formel (e'), Seite 11 (93) und B''(z) von Raabe,
2. » zwischen (e) u. (f), » 11 (93) » B'(z) » »
3. » (f), » 11 (93) » 'B(z) » » ,

welche bis auf die jedem Gliede vorgesetzten Nenner übereinstimmen.

c) Formel (l) ist analog gebaut wie unsere Formel (III) (25); nur zeigt sie eine Fakultät im Nenner; letztere hat Schläfli später durch zweckmässige Wahl der Definitionsgleichung wegzuschaffen gewusst. Formel (m) gleicht unserer Formel III (23), zeigt aber eine unliebsame Zuthat durch ein Summenglied.

d) Formel (y) entspricht unserer Formel III (24); sie liefert auch dieselben Werte, trotzdem darin die B-Zahlen andere Werte haben.

e) Auch die unterste Formel auf Seite 13 (95) dieses Schläflischen Briefes, welche Beziehungen seiner φ-Funktionen für die Argumente $0, \frac{1}{2}$ und 1 gibt, entspricht ganz unserer spätern Formel III (10).

Natürlich sind durch diese wenigen Aufzählungen die Analogien beider noch lange nicht erschöpft.

[1]) Vergleiche das Verzeichnis der benutzten Litteratur am Schlusse der Arbeit.

[2]) Siehe *Saalschütz* «Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen, ihren Zusammenhang mit den Sekantenkoeffizienten und ihre wichtigsten Anwendungen,» wo sich auf den Seiten 204—207 ein grösseres Litteraturverzeichnis befindet.

[3]) Zum Studium sehr zu empfehlen ist die schon in Anmerkung 2 angeführte Arbeit von L. Saalschütz. Siehe Litteraturverzeichnis!

[4]) *Jakob Bernoulli* (1654—1705) gab in seinem epochemachenden Werke über die Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ars conjectandi, Mutmassungskunst als Erweiterung der gemeinen ars computandi oder Rechnungskunst, nicht nur eine beinahe vollständige Theorie der Kombinatorik und der figurierten Zahlen, sondern fand auch die nach ihm benannten Zahlen, die bekanntlich in der Reihen- und Interpolationsrechnung von Wichtigkeit sind, und auf welche sich die Theorie der Bernoullischen Funktion stützt.

[5]) Siehe Journal für reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von A. L. Crelle, Band 42, Seite 348—376.

[6]) Quarterly Journal of pure and applied Mathematics, Vol. XXIX, pag. 1.

[7]) Messenger of Mathematics, Vol. XXVI, No. 10—12 und Vol. XXVII, No. 2—8.

[8]) Vergleiche J. Raabe «Die Jakob Bernoullische Funktion», Seite 1—16.

[9]) Seite 13 der eingangs erwähnten Schrift: J. Raabe «die Jakob Bernoullische Funktion.»

[10]) Vergleiche Raabes zweite diesbezügliche Arbeit. Journal von Crelle. Band 42.

[11]) Es sind dies die beiden schon früher gefundenen Formeln (17^b).

[12]) Seite 97 u. ff. und Saalschütz «Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen». Anmerkung 1, Seite 7 und 8.

[13]) Vergleiche Wallis «Opera mathematica.» Oxon. 1695 und «Arithmetica infinitorum.»

[14]) Siehe A. G. Kästner «Geschichte der Mathematik,» Band 3, Seite 111 u. ff.

[15]) Vergleiche «Ars conjectandi.» Basilea 1713. Seite 97 u. ff.

[16]) Ist Formel 18^a, nur identisch anders geschrieben.

[17]) Vergleiche Raabes erste Arbeit über diesen Gegenstand, Seite 17—23.

[18]) Wo $B_1'(z) = \frac{d}{dz} B'(z)$.

[19]) Raabe spricht sich im Vorwort seiner ersten auf die Bernoullische Funktion bezüglichen Schrift folgendermassen darüber aus: «Die Eigenschaften dieser Funktion B(z) sind Analogien zu denen der Legendreschen Funktion $\Gamma(z)$, die das Eulersche Integral zweiter Art vorstellt. Beinahe alle Eigentümlichkeiten die bei dieser $\Gamma(z)$ durch Produkte angedeutet sind, sprechen sich bei jener B(z) durch Summen aus: so dass gestützt auf eine in der niedern Algebra übliche Terminologie, wo von einer arithmetischen und geometrischen Progression die Rede ist, auch die hier einzuführende Funktion B(z) eine arithmetische, und

das Eulersche Integral $\Gamma(z)$ eine geometrische Funktion von z genannt werden dürfte».

[20]) Siehe auch Tabelle V am Schlusse dieser Arbeit.

[21]) Raabe gibt diese vier Formeln, ohne auf ihre Herleitung näher einzutreten, in seiner zweiten, diesen Gegenstand behandelnden Schrift in Crelles Journal, Band 42, Seite 352.

[22]) Zum genauern Studium verweisen wir wieder auf Raabes Arbeit im 42. Band von Crelles Journal, Seiten 359—362.

[23]) Hierin bedeutet wie gebräuchlich $D^p = \frac{d^p}{d x^p}$.

[24]) Siehe Compendium der höhern Analysis von O. Schlömilch, Teil I Seite 277 und Teil II, Seite 208.

[25]) Siehe auch §§ 29 und 30 vorliegender Arbeit.

[26]) Vergleiche J. Worpitzky «Studien über die Bernoullischen und Eulerschen Zahlen». Journal von Crelle, Band 94, Seite 203 u. ff.

[27]) Vergleiche § 31 vorliegender Arbeit, sowie Tabelle VI.

[28]) Über die Ausmittlung von $\int_0^1 e^{x z} \cos k \pi z \, dz$, die ziemlich umständlich bewerkstelligt wird, siehe Schlömilch «Comp. der Analysis», Band I, Seite 361, § 78. II.

[29]) Siehe Journal von Crelle, Band 94, Seite 220. Formeln 52.

[30]) Vergleiche Zeitschrift für Mathematik und Physik. Band I, Seite 202 und Comp. der Analysis von O. Schlömilch, Band II, Seite 218 u. ff.

[31]) Wir bezeichnen in Zukunft Koeffizient stets durch $[\ldots]$, z. B., $[y^n]$ = Koeffizient von y^n.

[32]) Vergleiche § 31 und Tabellen V—VIII.

[33]) Siehe § 16, Formel (12).

[34]) Vergleiche auch Tabelle VII am Schlusse dieser Arbeit.

[35]) Vergleiche § 12.

[36]) Siehe § 20, Formeln (40) und (41).

[37]) Vergleiche Dr. J. H. Graf: «Einleitung in die Theorie der Gammafunktion und der Eulerschen Integrale», Seite 30, Formel (36), wie auch bei andern Autoren.

[38]) Nach Definitionsgleichung (2).

[39]) Vergleiche auch § 20, Formeln (29), (31) und (33).

[40]) Wir verweisen auf die darüber bekannten Arbeiten: «Über Bernoullische Zahlen und Funktionen», Vorlesungen an der Berner Hochschule von Dr. J. H. Graf. S. S. 1898 und «Über eine Verallgemeinerung der Bernoullischen Funktionen und ihren Zusammenhang mit der verallgemeinerten Riemannschen Reihe» von Dr. Alfred Jonquière. Stockholm 1891. Bihang till K. Svenska Vet.-Acad. Handlingar. Band 16. Afd. I. No. 6.

[41]) Siehe Dr. J. H. Graf «Einleitung in die Theorie der Gammafunktion», Seite 49, 3. Zeile, wie auch bei andern Autoren.

[42]) Siehe «Quarterly Journal of pure and applied mathematics». Vol. XXVIII, pag. 1—174.

[43]) Siehe gleiche Zeitschrift, Vol. XXIX, pag. 1—168.

[44]) Vergleiche «Messenger of mathematics», Vol. XXVI, pag. 152—182 und Vol. XXVII, pag. 20—98.

[45]) Vergleiche darüber «Quarterly Journal», Vol. XXVII, pag. 4—18.

[46]) Über ihren Zusammenhang siehe § 29, Formel (10).

[47]) Siehe § 23, Formeln (12), (13) und (16).

[48]) Vergleiche «Quarterly Journal». Band XXVIIII, § 18, pag. 11.

[49]) Siehe § 26, Formeln (23) und (24).

[50]) Siehe Schlömilch «Compendium der Analysis». Seite 140, Formel 27, und Seite 141, Formel 32. Diese gehen durch Substitution von $\lambda = a$ und $x = \pi(1-2x)$ in unsere Formeln über.

[51]) Vergleiche den mehrfach erwähnten Band des «Quarterly Journal», pag. 7—18, wie auch an andern Stellen.

[52]) Ebendort, pag. 26—83.

[53]) Siehe § 28.

[54]) «Quarterly Journal», Band XXIX, §§ 58, 75, 85, 88, 109, 115, 119, 123, 132, 134, 143 und 146.

[55]) Vergleiche «Quarterly Journal», Band XXIX, § 18.

[56]) Vergleiche Tabellen IV und VIII.

[57]) Siehe Formeln (23) und (24) von § 26.

[58]) Vergleiche «Quarterly Journal», §§ 47, 58 und 75 und «Messenger of mathematics», § 73.

[59]) Siehe «Messenger of mathematics», Bände XXVI und XXVII.

[60]) Siehe «Quarterly Journal», §§ 174—216.

[61]) Vergleiche «Quarterly Journal», §§ 217—311.

[62]) Siehe «Messenger of mathematics», §§ 99—102 und § 108.

[63]) Vergleiche vorliegende Arbeit, §§ 1, 7, 14 und 21.

[64]) Siehe diese Arbeit §§ 2, 8, 15 und 22.

[65]) Vergleiche vorliegende Arbeit, §§ 6, 13, 20 und 27.

[66]) Siehe diese Arbeit, §§ 3, 9, 16 und 23.

[67]) Vergleiche unsere §§ 3, 10, 17 und 24.

[68]) Siehe Schlömilch «Comp. der Analysis», Band II, Seite 129, wo für $\beta = \pi x$ und $x < 1$ diese Reihe erhältlich ist.

[69]) Vergleiche Anmerkung [40]).

[70]) Siehe auch Rogel «Die Entwicklung nach Bernoullischen Funktionen» in den Sitzungsberichten der königlich-böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Prag 1896.

[71]) Vergleiche unsere §§ 5, 12, 19 und 26.

[72]) Siehe § 3, Formel 18, § 10, Formel 16 und § 17, Formel 19.

[73]) Vergleiche Tabelle VII.

Dr. v. Fellenberg, Dr. Kissling, Dr. Schardt.
(Eingereicht im Februar 1900.)

Lötschberg- und Wildstrubeltunnel.

Geologische Expertise.

An die Baudirektion des Kantons Bern.

Geehrter Herr Regierungsrat!

Ende August haben Sie den unterzeichneten Experten folgende Aufgaben gestellt:

«1. Begutachtung derjenigen geologischen Verhältnisse des zu durchfahrenden Gebirges, welche für den Arbeits- und Zeitaufwand beim Tunnelbau und für den späteren Unterhalt beim Betriebe wichtig sind, wie: Die Art der zu durchbohrenden Gesteine, ihre Lagerung und die mutmassliche Ausdehnung ihres Vorkommens; ihre Härte und Zähigkeit, Standfestigkeit und Verwitterbarkeit, der Gebirgsdruck und der Wasserzudrang etc.

Die Ergebnisse der geologischen Aufnahmen werden in die Karte 1: 50,000 eingetragen und für jede der beiden vorgeschlagenen Varianten des Lötschbergtunnels in einem geologischen Profil im Massstab 1: 25,000 dargestellt und mit Probestücken (Handstücken) der vorkommenden Gesteinsarten belegt.

Die erforderlichen Karten und Terrainprofile werden den Experten von der Baudirektion zur Verfügung gestellt.

2. Geologische Begutachtung einer allfälligen Verschiebung der noch nicht endgültig bestimmten Tunnelaxe innerhalb eines Streifens von ½—1 Kilometer Breite rechts und links von der vorläufig angenommenen Axe.

3. Begutachtung der in der geologischen Beschaffenheit des Gebirges begründeten Vor- und Nachteile des Lötschbergtunnels im Vergleich mit einem Wildstrubeltunnel in der Richtung Oberried-Inden oder Oberried-Siders.»

Nach einer gemeinsamen Sitzung in Bern, in welcher die allgemeinen Zielpunkte der Expertise besprochen worden, begaben sich die Herren Kissling und Schardt sofort an die Aufnahmsarbeiten im Lötschberg- und Wildstrubelgebiet.

Die Begehungen fanden nach folgendem Itinerar statt:

1. Gasterenklus und Gasterenthal. Contakt des Granits mit den Sedimenten gegenüber dem Brandhubel und am Gabelbach.
2. Gemmiweg.
3. Fisistock.
4. Lötschpass bis Kummenalp.
5. Sattellegi — in den Simmeln — Felsen unter dem Hockenhorn — auf den Platten — Lötschpass — Kaufmannskumme — Kummenalp nach Kippel.
6. Unteres Lötschthal-Gampel.
7. Gampel-Hohtenn-Meiggen (zum Teil mit v. Fellenberg).
8. Meiggen-Faldumalp-Restialp-Kummenalp-Oberferden — Stierstutz-Kippel.
9. Von Kippel an gemeinsame Begehung des untern Lötschthals mit v. Fellenberg.
10. Gampel-Inden-Varon-Miège-La Prily.
11. La Prily — Plaine morte — Fluh-See-Siebenbrunnen-Lenk.
12. Lenk - Ammertenpass - Engstligenalp - Engstligengrat - Schwarzgrätli-Schwarenbach.
13. Schwarenbach-Üschinenthal-Allmen-Kandersteg.
14. Gasterenboden-Schwarzbach.
15. Öschinen-See-Birre-Mitholz.
16. Kandersteg-Frutigen (Kissling); Kandersteg-Gemmi-Leuk (Schardt).

Die auf den vorgenannten Routen gemachten Beobachtungen wurden in die Karte 1: 50,000 eingetragen und überall, wo es nötig schien, charakteristische Gesteinshandstücke geschlagen.

Eine Sammlung derselben aus dem Lötschberggebiet, 47 Nummern umfassend, legen wir unserem Berichte bei.

I. Allgemeine und topographische Verhältnisse.

Die zu begutachtenden Tunnelprojekte durch den Lötschberg und den Wildstrubel durchschneiden beide das Aarmassiv in seinem westlichen Ende. Aufgebaut aus einem centralen, langelliptischen Kern von Urgestein, dem sogenannten Protogin oder Bankgranit (schieferigen Granit), an welchen sich auf der Südseite eine Reihe steilgestellter Zonen von Gneiss und krystallinischen Schiefern, auf der Nordseite ebenfalls eine Gneisszone anschliesst, wird das Aarmassiv auf der Nordseite von den Ketten der Kalkalpen bedeckt und umsäumt

während auf der Südseite diese Kalkdecke eine sehr beschränkte Ausdehnung hat. Beide zur Untersuchung vorliegenden Tunnelprofile berühren den centralen Teil des Aarmassives nicht mehr sondern das Lötschbergprofil schneidet nur durch die krystallinische Schieferhülle des Protoginskerns auf der Südseite des Lötschenpasses, während es auf der Nordseite die Kalkkette, die dem Centralmassiv vor- und angelagert ist, durchquert. Hingegen durchschneidet der Lötschbergtunnel einen auf der Nordseite der Alpen durchaus isoliert stehenden Gesteinskomplex, nämlich das Massiv des Gasterengranites. Dieser Gasterengranit bildet das Grundgestein im West-Ende des Aarmassives und trägt den Charakter einer abgerundeten Kuppe, bedeckt von den Sedimenten des Verrucanos, der Trias und der sekundären Ablagerungen der Jura- und der Kreidezeit. Auf der Südseite des Lötschenpasses sind die steilgestellten krystallinischen Schiefer (Phyllite) dem Granitkern angelagert und bedecken denselben schalenförmig. Wie sich nun der Gasterengranit zum Protoginkern des Aarmassivs verhält, welcher etwas südlich des Lötschenpasses, erst im Ijollithal, unter dem Mantel krystallinischer Schiefer auftritt, ist nicht bekannt, denn nirgends ist der Kontakt von Gasterengranit und Protogin aufgeschlossen. Auffallend ist das Auftreten des Gasterengranitmassives im äussersten Nordwesten des Aarmassivs und nördlich von der Centralaxe desselben. Auf der Nordseite des Gasterenthales, welches als tief eingesägtes Erosionsthal die dem Granit aufgelagerten, mächtigen Kalkmassen der nördlichen Kalkkette bis auf den Granitkern blossgelegt hat, lehnen sich intensiv gefaltete Kalk- und Kalkschieferschichten verschiedenen Alters an. Topographisch gestaltet sich das Tracé des kürzeren Lötschbergtunnels folgendermassen:

Von der flachen Thalsohle hinter Kandersteg erheben sich gegen Süden die steilen Kalkwände der Fisistöcke und der Altels-Balmhorn-Gruppe, zwischen denen der Gasterenbach sich durch die tiefeingesägte Klus einen Weg ins offenere Gelände von Kandersteg (einen alten Seeboden) durchbrochen hat. In steilen Felswänden erhebt sich über der Tunnelaxe der Fisischafberg, gegen das Gasterenthal in senkrechten Felsen abfallend. Es folgt südöstlich über der Tunnelaxe der Gasterenboden, eine flache Thalsohle, von dem im Schuttland oft seinen Lauf wechselnden Gasterenbach durchflossen. Der Grund besteht aus Alluvionen des Gasterenbaches (Sand und Kiesbänke). Von der Südseite strömen eine ganze Reihe Wildbäche in den Gasterenbach und bilden

durch häufiges Austreten vielfach einen sumpfigen und sandigen Thalgrund. Auf der Südseite von Gasteren folgt nun das mächtige, in hohen senkrechten Kalkwänden zum Gasterenthal abstürzende Massiv der Altels-Balmhorngruppe, unter welchem sich die Tunnelaxe durchzieht. Genau über der Tunnelaxe liegt in hohem Bergkessel die von nackten Felsen umgebene Schafalp Wildelsigen, aus welcher in jähem Sturz in tiefer Klamm der Wildelsigenbach ins Gasterenthal abstürzt. Südlich des Balmhornmassives ändert sich die Konfiguration des Terrains vollständig, und auch das Gestein. Statt hoher Kalkwände, schmaler Felsleisten, tiefeingesägter Rinnen und Hohlkehlen, an deren Fuss sich steile Trümmerfelder hinziehen, stossen wir am eigentlichen Lötschenpass auf eine breite flache Mulde, auf welcher der flache Lötschengletscher ruht, dessen Absturz nach dem Gasterenthale in einer kurzen Zunge abbricht, südlich eingebettet in abgerundete Felshöcker, die sich allmählich gegen das Hockenhorn hinanziehen, dessen Gipfel einem auf breitem Felsgestell aufgesetzten steilen Kegel gleicht. Wir sind inmitten dieser abgerundeten Formen, dieser durch Eiswirkung polierten, geglätteten und gerundeten Felsen plötzlich aus dem Kalkgebirge in das Granitgebirge geraten, welches hier auf dem Lötschpass und an den Westabhängen des Hockenhorns bedeckt wird von einer dünnen Schicht von Quarzsandstein (Arkose), Konglomeraten und halb krystallinen Gesteinen, die dem Perm oder Verrucano zugerechnet werden.

Südlich der gewaltigen Gruppe des Altels-Balmhornmassives, welches ein ausgezeichnetes Beispiel des sog. pultförmigen Aufbaues liefert, indem wie bei Doldenhorn und Blümlisalp die Nordseite in schiefgeneigter, gleichmässig abfallender Fläche erscheint, während die Südseite in terrassenförmig abgestuften, senkrechten Wänden zum Tschingelgletscher und Gasterenthal abstürzt und ein Seitenprofil das genaue Bild eines Pultes darstellt, folgen die so merkwürdigen Südwest-Nordost streichenden kurzen Ketten zwischen Fluhalp und Ferdenthal, zwischen Ferden- und Restithal und zwischen letzterem und Faldumthal, mit den zwischen den fingerförmig ausgestreckten Ausläufern der krystallinen Schiefer des Centralmassivs eingeklemmten und intensiv gefalteten Kalkbergen des Resti- und Faldum-Rothorns. Die Tunnelaxe streicht östlich dieser drei parallelen Ketten durch und verbleibt vermutlich beim Austritt aus dem Granitkern des Lötschpasses in dem sich am letzteren anschmiegenden Mantel von kry-

stallinen Schiefern und Gneissen. Wird nun die Tunnelmündung auf der Südseite etwas weiter nördlich oder südlich angenommen, so befindet sich dieselbe notgedrungenerweise in einem Durchbruchs- oder Querthal. Von Ferden an hat nämlich die Lonza die mächtige Schiefer- und Gneisszone durchbrochen und schluchtartig gestaltet sich das untere Lötschenthal, mit steilen, schutterfüllten Wänden, gewaltigen Lawinenzügen, Schuttkegeln und nur wenige, offene, flache Thalerweiterungen bietend, wiebei Mitthal, Haselleh und Schlegmatte. Namentlich die Ostseite des Gebirges ist stark zerklüftet und von zahlreichen Runsen durchzogen, an deren Fuss mächtige Schuttkegel und alte Bergsturzfelder Zeugnis ablegen von früher stattgefundenen, bedeutenden Oberflächenveränderungen.

Das tiefere Lötschbergprojekt hat ähnliche topographische Verhältnisse aufzuweisen. Der Tunnel bei 1038 auf Schlossweide angesetzt, würde sich unter dem halbkreisförmigen Thalriegel hinziehen, über welchen in mehrfachen Windungen sich die Landstrasse den Bühlstutz hinaufwindet, dann unter dem flachen Thalboden von Kandersteg hindurch. Südlich des Oeschinenbaches würde die Tunnelaxe sich hinziehen unter den beiden kühnen Felspyramiden der Fisistöcke, 2680 m. Letztere fallen sehr rasch in senkrechten, von schmalen Bändern durchzogenen Wänden zum Gasterenboden ab, und die Tunnelaxe würde unter der Thalsohle durchstreichen, da wo dieselbe oberflächlich am schmalsten ist (nordöstlich vom sogenannten Brandhubel), südlich des Gasterenthales unter der östlichen Basis der hohen Kalkwände des Wildelsiggrates, um unterhalb der Gfällalp in den eigentlichen Lötschberg einzutreten und etwas östlich von der projektierten kürzeren Tunnelaxe bis Kilometer 26 zu verbleiben, wo beide Tunnelaxen einander schneiden. Die Oberflächenverhältnisse der beiden Tunnelprojekte bleiben hier annähernd dieselben. Das längere Projekt zieht sich etwas östlich unter dem Ausläufer des Hockenhorns hin, verbleibt aber in demselben Gestein wie das kürzere Projekt und ebenso sind die südlich sich an den Lötschpass anschliessenden Gesteine, und ist die oberflächliche Gestaltung bei beiden Projekten wesentlich dieselbe, ja die ungünstigen Terrainverhältnisse des unteren Lötschenthales dürften sich beim längeren Projekt in noch ungünstigerer Weise geltend machen.

Das in Vergleich zum Lötschbergtunnel und seinen zwei Varianten gezogene Projekt einer Durchbohrung des Wildstrubels,

wobei wir nur das kürzere Projekt eines Tunnels vom Thalboden der Simme bei Oberhaus südöstlich vom Dorfe Oberried bis oberhalb Miège auf dem Plateau von Randogne-Mollins (Nordportal bei 1090, Südportal 1019) in Betracht ziehen, bietet in seiner gesamten Anlage eine grössere Einfachheit der topographischen Verhältnisse dar, als das erstgenannte Projekt des Lötschbergtunnels. Die Tunnelaxe durchschneidet die Kalkalpen zwischen Bern und Wallis. Das krystallinische Centralmassiv ist unter die mächtigen Kalk- und Schiefermassen der Wildstrubel-Wildhornkette iu die Tiefe gesunken. Die Topographie dieses zu durchbohrenden Massivs ist ungefähr folgende: Aus dem flachen Thalboden von Oberried südlich von Lenk erhebt sich ein Felsenriegel, durch welchen die Simme sich in malerischen Strudeln eine enge Kluft hindurchgesägt hat. Es ist dies der Rätzliberg mit dem Laubhorn. Letzteres stellt eine sogenannte Klippe dar, indem ältere Kalkbildungen wurzellos auf den tertiären Ablagerungen des Flyschs aufgesetzt sind. Südlich der flachen, quellendurchrieselten Mulde der Rätzlibergalp erhebt sich gleich einer Riesenmauer das gewaltige Felsgestell des Wildstrubels mit dem hochherabhängenden Rätzligletscher. Senkrechte Felsen, unterbrochen durch schmale Bänder, türmen sich stufenlos zum breiten Firnrevier des Rätzligletschers und der Plaine-Morte. Jenseits der Plaine-Morte ragen einzelne untergeordnete Gipfel aus dem breiten Firnrevier hervor, so das Todthorn, der Mont Bonvin und der Autannazgrat und senken sich ohne bedeutende felsige Unterbrechungen zu den weiten, sonnigen Alpen von Colombire, Aprily und der Varneralp, um nur die bedeutendsten zu nennen. Es ist der Südabhang des Wildstrubelmassivs ein weit ausgedehntes, von einzelnen Felsausläufern durchzogenes Alpenland, an welches sich südwärts das von Dörfern übersäte Hügelgelände von Siders-Montana anschliesst. In seinem ganzen Habitus erscheint der Wildstrubel als ein gewaltiges, nordwärts steil abfallendes kastellartiges Bollwerk, dessen breiter Gletschergipfel ca. 5 Kilometer Durchmesser hat. Am Fusse dieses Bollwerks treten zahlreiche Quellen zu Tage, die berühmten Siebenbrunnen, und zahlreiche Bäche stürzen in Kaskaden über die hohen Felswände zu Thal, so der Trübbach, Fluhbach, Laubbach u. a. Auf der sanft geneigten Südseite sammeln sich die Schmelzwasser der Plaine-Morte zu grösseren, in tiefeingeschnittenen Schluchten fliessenden Bächen, so der Bach von Colombire, La Zesse mit zahlreichen Zuflüssen,

La Posa bei Aprily vom Autannazgrat herkommend und andere. Sehr günstig liegen beim Wildstrubelprojekt die beiden Mundlöcher, das nördliche auf dem von der Simme durchströmten Thalboden von Oberried, das südliche an den freien sanften Abhängen des Plateaus Randogne-Mollins, in der Nähe der in Siders in die Rhone fliessenden Sinièze.

II. Allgemeine geologische Übersicht.

Das zwischen Wildstrubel und Hockenhorn gelegene Gebiet der Berner Hochalpen zeichnet sich durch eine der merkwürdigsten Erscheinungen aus. Die Sedimentärgebilde, welche zwischen der Lenk und Siders noch das ganze Gebirge bis in die tiefsten Teile zusammensetzen, weichen vom Gemmipass an nach Nordwesten und Südosten auseinander, indem immer tiefere Schichten zu Tage treten, bis dass auf der Linie Feschel-Gasteren das krystallinische Grundgebirge sichtbar wird, dessen Oberfläche bald bis über 3000 m Meereshöhe ansteigt.

Der durch das Auftauchen des krystallinen Grundgebirges aufgerissene Sedimentmantel teilt sich in zwei sehr ungleiche Streifen. Der südliche nimmt eine ganz untergeordnete Lage am Nordabhang des Rhonethales ein; bei Gampel schon unterbrochen, steigt die südliche Sedimentdecke noch einmal am Fusse des Centralmassivs auf und setzt zuletzt am Baltschiederthal vollständig ab.

Der nördliche Sedimentstreifen ist viel bedeutender. Obschon derselbe sichtlich nach Norden gedrängt erscheint und im Vergleich mit der Breite des Wildstrubelgebirges beträchtlich reduziert ist, so finden wir in demselben alle tektonischen Elemente wieder, welche die Wildstrubelgruppe aufbauen. Die Zone von Kalkketten, welche zwischen Adelboden und Haslithal dem Aarmassiv entlang streichen oder an dessen Fuss angelehnt sind, entspricht also vollständig dem kulminierenden Teil der Wildstrubelgruppe. Wenn auch topographisch anders orientiert und weniger hoch, so ist sie doch die geologische Fortsetzung dieses Gebirgsteiles.

Deshalb treffen wir auch in den beiden vorgeschlagenen Tracés für den Durchstich der Berneralpen ganz verschiedene geologische Verhältnisse, wenn auch beide scheinbar dieselbe Gebirgskette durchqueren.

Bevor wir zur Besprechung der für die Bohrung wichtigen geologischen und petrographischen Verhältnisse schreiten, wird es sich lohnen, die tektonischen Verhältnisse, d. h. den Gebirgsbau und die Schichtenlage etwas eingehender ins Auge zu fassen. Zu diesem Zwecke müssen wir vor allem die verschiedenen Formationsglieder kennen lernen, welche am Aufbau des Gebirges teilnehmen:

A. Stratigraphische Übersicht.

Quartär. Gebirgsschutt. Überall lehnen sich am Fusse der Felsabstürze, den Thälern und Kummen entlang, Schutthalden und Schuttkegel an. Letztere sind besonders da am schönsten ausgebildet, wo Runsen das felsige Gehänge angeschnitten haben.

Bergsturz-Ablagerungen, von grösseren, plötzlichen Felsstürzen herrührend, sind um Kandersteg mehrere vorhanden. Der Öschinensee verdankt seine Entstehung einer Abdämmung des oberen Teiles des Öschinenthales durch einen gewaltigen Bergsturz, dessen Abrissnische unterhalb vom Biberggletscher deutlich sichtbar ist.

Ein anderer, noch viel bedeutenderer Bergsturz, vom N.-E.-Abhang des Fisistockes herrührend, hat seine Schuttmassen bis über das Blau-Seeli hinaus geschleudert. Diese Schuttmassen, welche die Hügel bei Bühl und die Anhäufungen bei Schlossweide bilden, sollen zur Entstehung der über 160 m hohen Thalstufe von Kandersteg Veranlassung gegeben haben. Wegen der Wichtigkeit dieser Schuttablagerung für das tiefere Lötschbergtunnelprojekt soll deren Beschaffenheit und Entstehung weiter unten noch besonders beschrieben und erörtert werden.

Fluss- und Bachaufschüttungen sind in allen breiteren Thälern häufig und sehr ausgebreitet. So besteht der Boden des unteren Gasterenthales aus Bachschuttanhäufungen. Der Boden von Kandersteg besteht zum Teil aus Flussalluvium der Kander; andererseits hat der Öschinenbach einen etwas flachen Schuttkegel in den Thalboden vorgeschoben. Der zum Teil sumpfige Thalgrund bei Eggenschwand und zwischen Bühl und Kandersteg mag teilweise auch als ein ausgefülltes Seebecken betrachtet werden.

Ältere Alluvialbildungen und Gletscher-Ablagerungen können kaum unterschieden werden. Hingegen sind Moränen aus der

Rückzugsperiode der Gletscher auf dem Thalboden von Kandersteg selbst, bei Eggenschwand, sichtbar. Die Thalstufe von Bühlstutz ist mit den Moränen, welche offenbar von dem früheren Öschinen-Gletscher herrühren, in sehr wahrscheinlichem Zusammenhange. Auch diese Frage soll weiter unten noch speziell behandelt werden.

Tertiär. Die jüngste Tertiärbildung ist der Flysch, bestehend aus thonigen, oft fein sandigen, glimmerführenden Schiefern und Mergeln mit Sandstein-Zwischenlagerungen. Ächter Flysch ist bei Kandersteg nur untergeordnet vorhanden. In der Gegend von der Lenk, am Fusse des Laubhorns über Siebenbrunnen tritt hingegen Flysch in typischer Entwicklung und bedeutender Mächtigkeit auf.

Bei Kandersteg ist an Stelle von schieferigem Flysch eine mächtige Sandsteinformation vorhanden, welche vielleicht auch die Nummulitenkalke zum Teil vertritt. Es sind hellgraue, gelbliche bis weisse, bald rot, bald grünlichgefärbte, quarzitische Sandsteine, hie und da mit ähnlich gefärbten Mergeln abwechselnd. Oberflächlich sind diese Sandsteine oft braun angewittert. Sie enthalten spärliche Nummuliten. Zur Unterscheidung von eigentlichen Flyschsandsteinen nennen wir diese Sandsteine Nummulitensandsteine.

Die bedeutende Widerstandsfähigkeit dieser Formation hat zur Folge, dass wir diese Sandsteinlager in mächtigen Felswänden antreffen. So besteht der ganze Nordabsturz des Fisistockes, sowie dessen Gipfelpartie aus Nummulitensandstein.

Die eigentliche Nummulitenformation besteht aus bankigen und schiefrigen Kalken, welche oft erfüllt sind von unzähligen Nummuliten (Siebenbrunnen oberhalb Lenk), oft sich aber auch als fast ganz steril erweisen (Fuss des Gällihorns).

Eine besondere Ausbildung des eocänen Kalkes ist der sogenannte Lithothamnienkalk: ein dichter, hellgrauer, ganz von fossilen Organismen erfüllter Kalkstein, welcher Felswände von 20—30 Meter Höhe bildet und leicht mit Schrattenkalk (Urgon) verwechselt werden könnte. (Im Stein bei der Lenk, Winteregg auf der Gemmi, Schnittboden, Eggenschwand).

Kreideformation. Gault und Aptien. Finden sich in unbedeutender Mächtigkeit in der Umgebung des Wildstrubelgipfels, am Ammertenhorn und am Gletscherhorn. Es sind Sandsteine und schiefrige Mergel. Für die Tunnelprojekte ohne Bedeutung, da diese Formationen wahrscheinlich nicht angetroffen werden.

Urgonien. Schrattenkalk. Grauer bis weisser, oft aber auch dunkler, dichter Kalk. Gewöhnlich ein einziges 80 bis 150 m mächtiges Lager bildend, welches von weitem als Felsgesims beobachtet und verfolgt werden kann, wodurch dieses Gestein sowohl durch seine Farbe, als auch in der Topographie, dank seiner unbedeutenden Verwitterung aufs deutlichste hervortritt. Am Fisistock, in dem Felsgraben zwischen den beiden Gipfeln, fanden wir eine Kalkschicht erfüllt mit Gasteropoden, Requienien und Radiolites, welche für das Alter des hellen Kalkes unter den Sandstein-Schichten der Gipfelpartie bezeichnend sind.

Hauterivien, Mittleres Neocom, dunkle, graue, oft quarzige und sandige, braun anwitternde Kalke mit eingelagerten Mergeln. Gewöhnlich Durchschnitte von Seeigeln (Toxaster) aufweisend. 150 bis 200 m mächtig, stellenweise mehr.

Valangien, Unteres Neocom. Kalke und dunkle Mergel (Bernasschiefer). Wenig Fossilien enthaltend. (Cidaris pretiosa bei Schwarenbach) Mächtigkeit 100—120 m. Durch Zusammenfaltung scheint die Mächtigkeit des Neocoms oft sehr bedeutend, während durch Streckung und Auswalzung dieselbe bis auf weniges reduziert sein kann.

Juraformation, Malm oder oberer Jura bildet vorerst eine 100—120 m mächtige Kalkwand, sogenannter Hochgebirgskalk, unter welchem sich plattige bis schieferige graue Kalke vorfinden. Letztere entsprechen der Oxfordstufe, 50—100 m. Dogger oder Mittlerer Jura; dunkle spätige Kalke, oft als Eisenoolith ausgebildet oder auch dunkle, schieferige Kalke, vom oberen Lias schwer zu unterscheiden, 100—150 m.

Lias oder Unterer Jura, bildet drei Abteilungen. Eine obere, schieferige Abteilung entspricht dem oberen Lias. Die mittlere besteht aus einer mächtigen Breccienschicht, viel Belemniten enthaltend. Diese Breccie besteht aus Quarz- und Dolomit-Körnern, welch letztere besonders auf der ausgewitterten Oberfläche durch ihre gelbliche Färbung deutlich hervortreten. Echinodermentrümmer scheinen stellenweise ebenfalls beigemengt. An der Abdachung des Balmhorns gegen den Lötschengletscher zu hat diese Schicht eine ganz bedeutende Mächtigkeit, durch Auffaltung bis fast zu 500 m gesteigert. Zwischen Leukerbad und Inden beobachtet man eine rätselhafte Formation aus grauen und grünlichen quarzitischen Sandsteinen

bestehend, welche eine ausserordentliche Mächtigkeit haben. Sie hangen offenbar mit den mittleren Liasbreccien des Torrenthorn, dieselben wie am Balmhorn, zusammen. Es sind ebenfalls Belemniten darin gefunden worden. Der Übergang in Breccien mit Dolomittrümmern ist an Ort und Stelle zu beobachten. Der untere Lias ist durch schieferige, oft auch brecciöse Kalke vertreten. 50—100 m, wenn nicht aufgefaltet oder gestreckt.

Trias. Besteht aus drei Lagen, welche im allgemeinen eine ganz unbedeutende Mächtigkeit aufweisen, aber ausserordentlich konstante und sehr ausgeprägte Eigenschaften haben. Zu oberst sind glänzende dunkle, oft grünliche oder rote Schiefer, sogen. Quartenschiefer. Dann folgt typischer Rötidolomit, oft in Rauchwacke umgewandelt. Zu unterst liegt graue oder bunte, rötliche oder grünliche Arkose, sandsteinartig, ja oft conglomeratisch. Dieses Gestein ist gewöhnlich unter dem Namen Verrucano beschrieben und dem Permien zugerechnet worden. Der Farbenwechsel dieses Sandsteins hängt mit der Herkunft seiner Bestandteile zusammen. Über dem roten Gasteren-Granit ist die Arkose rötlich, über dem grünen Granit ist deren Farbe grünlich, oder beide Töne wechseln ab. Auf der Westabdachung des Lötschberges, wo viel Sericitschiefer liegen, ist die Arkose vorherrschend grau-sandig.

Zu den sedimentären Ablagerungen, möglicherweise zur Kohlenformation kann noch gerechnet werden ein schwarzer Schiefer, welcher im Lötschenthale unterhalb der Faldumalp bei Goltschenried ansteht. Er ist zwischen Sericitschiefern eingeschaltet, enthält Graphiteinlagerungen in Nesterform, was auch wohl für Kohlenformation sprechen mag.

Dieses ist das älteste sichere Sediment des untersuchten Gebietes. Sichere Vertreter des Carbon, oder einer noch älteren Abteilung des Palaeozoicums haben wir nicht konstatieren können, obschon die Sericitschiefer möglicherweise metamorphe Sedimente sind.

Grundgebirg. Zu dieser Abteilung rechnen wir alle krystallinen Schiefer, Gneisse, Chloritschiefer, Amphibolschiefer, Amphibolite, Grünsteine, Serpentine und Giltsteine, welche in unzähligen Wechsellagerungen gleich Sedimenten beiderseits des Gneissgranites oder Protogins auftreten. Die Glimmerschiefer sind entweder gewöhnliche Muscovitschiefer, oder graue Sericitschiefer, oft chloritisch und dann grünlich gefärbt. Wir haben letztere,

mit den Amphibolgesteinen und Serpentinen zusammengefasst, unter derselben Bezeichnung als grüne Schiefer in den Profilen eingetragen.

Alle diese Gesteine, sowie der schöne Gasteren-Granit mit seinen Porphyrgängen, sind von Dr. v. Fellenberg aufs eingehendste beschrieben worden. (Geologische Beschreibung des westlichen Teiles des Aarmassivs; Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz. XXI. Liefer. I. 1893.) Es soll im speziell technischen Teile dieses Gutachtens noch besonders von diesen verschiedenen Gesteinsarten die Rede sein. Es ist noch hervorzuheben, dass sowohl die Sericitschiefer und Gneisse, sowie die grünen Schiefer häufig von Mikrogranit- und Aplitgängen (sog. Eurit) durchsetzt sind. Diese sehr quarzreichen hellen Ganggesteine sind oft 5—30 m mächtig. Zwischen Restithal und Meiggen durchsetzen unzählige solcher Gänge die Sericitgneisse und Schiefer in sehr steiler Lage, teils konkordant mit dem Fallen der Schiefer, teils mehr oder weniger schief.

Bezüglich der Porphyrgänge, welche im Gasterengranit auftreten, kann noch hervorgehoben werden, dass dieselben auf der Südseite des Granitzuges viel häufiger auftreten als auf der Nordseite desselben, soweit derselbe nämlich abgedeckt und sichtbar ist. Am Südabhang des Grates unterhalb Hockenhorn, zwischen Sattelegi und dem Lötschenpass (in den «Simmeln» und «Auf den Platten») sind Wechsellagerungen von Granitporphyr und körnigem Granit deutlich sichtbar. Dabei zeigt sich eine so deutliche Einwirkung der Druckmetamorphose, dass der Porphyr dicht schiefrig und der Granit arkoseähnlich körnig wird. Zwischen «Auf den Platten» und dem Lötschenpass is dies so sehr der Fall, dass man nie sicher ist, ob das Gestein Arkose, also sedimentär ist, oder ob es zum Granit gehört. Die Unterscheidung ist um so schwieriger ohne Zuhilfenahme des Mikroskops und Dünnschliffes, da die Arkose ebenfalls aus Granittrümmern zusammengesetzt ist und bei Druckmetamorphose mikroskopisch wenigstens ganz dieselbe Zusammensetzung und Struktur aufweisen muss wie gepresster Gasterengranit. Das einzige Kriterium ist eben die Wechsellagerung von dichten und körnigen Gesteinen, was bei der echten Triasarkose gewöhnlich nicht vorkommt, aber wohl vorkommen könnte. Letztere hat gewöhnlich nur 5—10 m Mächtigkeit und besteht meist nur aus einer einzigen Lage oder aus zwei durch dunkle Schiefer getrennten Lagen von Sandstein.

B. Tektonische Übersicht.

Der bezeichnende Charakterzug des Gebirgsbaues zwischen Wildstrubel und Lötschenpass ist, abgesehen von dem Hervortreten des krystallinen Centralmassivs, dass die Sedimentdecke sowohl am Wildstrubel, wo sie noch ganz ist, als auch zwischen Gasterenthal und Engstligenthal, wo sie nach Norden zurückgedrängt und vom Centralmassiv abgerutscht ist, eine einzige grosse liegende Falte aufweist, deren hängender Flügel sowohl als der Stirnrand eine ganze Reihe kleiner Falten als fast regelmässig ausgebildete Mulden und Gewölbe zeigt.

Es ist dies wahrscheinlich dieselbe grosse liegende Falte, welche von den Glarneralpen her über die Unterwaldner-Alpen sich hinüberzieht, sich in der Faulhorngruppe wiederfindet, über Dündenhorn, Lohner und Wildhorn weiter streicht bis in die Waadtländer Alpen (Dents de Morcles), und sogar jenseits der Rhone die ganz ansehnliche Faltendecke der Dents du Midi-Tours Salières umfasst. Vielleicht ist ein Teil der Savoyer Alpenkette noch in das Bereich dieser merkwürdigen tektonischen Erscheinung hineinzuziehen.

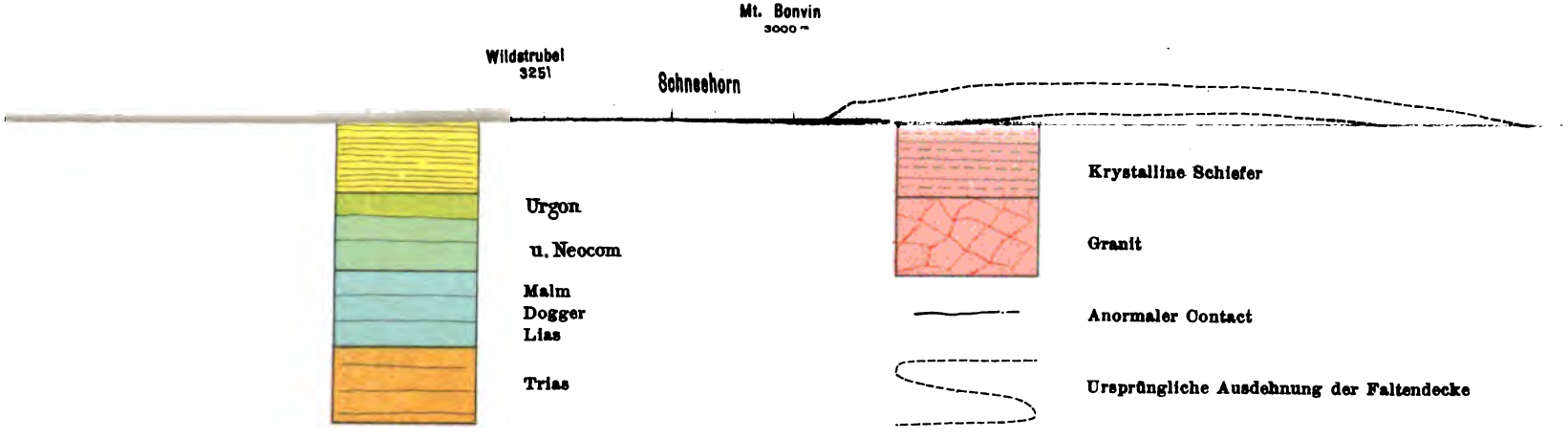
Wenn wir die Sachlage in der Wildstrubelgruppe schematisch darstellen wollen, so wird sich das Bild etwa folgendermassen ausnehmen:

(Siehe Fig. 1 nebenstehender Tafel.)

Die mehr als 12 Kilometer lange Falte beweist also, dass zwischen Rhonethal und Lenk die Sedimentdecke nicht nur doppelt, sondern stellenweise sogar dreifach ist; ursprünglich muss dieselbe auf der ganzen Breite einfach gewesen sein. Rechnet man noch die Auffaltungen des hängenden und des mittleren Flügels dazu, so darf man wohl annehmen, dass eine Schichtendecke von nahezu 40 Kilometer Breite durch diese gewaltige Faltung auf kaum 13 Kilometer reduziert wurde.

Merkwürdig ist die gewölbeartige Auffaltung oder Aufbauchung, infolge welcher das Eocän der eingeklemmten liegenden Mulde bei Colombire, Nousey, Trubeln etc. wieder zum Vorschein kommt; es ist dieselbe Tertiärmulde, welche bei Siebenbrunnen unter der Kalkwand des Ammertenhornes untertaucht. Diese Aufbauchung der dreifachen Sedimentdecke kann man als eine Andeutung des auftauchenden Centralmassivs ansehen. Der Vergleich obiger Skizze mit dem folgen-

Fig. I.



1 : 100 000

GRAPH. KUNSTANSTALT H. & A. KUNNERLY & FREY, BERN

den Bild zeigt dieses Verhältnis aufs deutlichste. Es geht daraus noch die weitere Erkenntnis hervor, dass nämlich durch das Auftauchen des Centralmassivs diese dreifache Faltendecke thatsächlich auf der steilen Nordabdachung gegen den freien Raum zu abgerutscht ist; das beweist die Zickzackfaltung am Fisistock und am Gällihorn etc.

(Siehe Fig. 2 auf nebenstehender Tafel.)

Diese synthetischen Skizzen, welche in vereinfachter Form die an der Oberfläche sichtbaren Verhältnisse unterirdisch in Verbindung bringen, erlauben, die Tunnelprofile durch den Wildstrubel und durch den Lötschberg trotz ihrer grossen Verschiedenheit zu vergleichen.

Über dem Hockenhorn, welches jetzt dieselbe topographische Lage hat wie der Wildstrubel, muss früher, vor der Erhebung des Centralmassivs, dieselbe liegende Falte gelegen haben, wie auf dem Wildstrubel. Dieselbe ist aber nach Norden abgerutscht und sie liegt nun, allerdings durch Erosion sehr reduziert, in zusammengeknittertem Zustande am Fusse des Centralmassivs. Die frühere Ausdehnung und Lage der schleifenförmigen Falte wird durch die punktierten Linien angedeutet. Ein Zusammenhang, welcher durch die zwischen Granit und Schiefern eingeklemmten Sedimente am Hockenhorn thatsächlich bewiesen ist.

Dass der angedeutete Zusammenhang wirklich der richtige ist, wird ausserdem durch den Verlauf des Tertiärs oberhalb Siders bewiesen. Die bei Colombire anstehenden eocänen Sandsteine streichen südlich des Mont-Bonvin und des Mont-Tubang vorüber und sind auf den Weiden von Nousey schön abgedeckt; sie setzen über Varneralp und Trubeln bis an die Winteregg oberhalb Kandersteg fort, genau parallel der Einsattelung des Gemmipasses. Hier ist deren Zusammenhang mit denselben Sandsteinen des Nassenboden und Schwarzen Tschuggen und mit der Decke an der Nordseite und im Gipfelgebiet des Fisistockes offenbar. Dass diese eocänen Sandsteine sich dann am Ostabhange des Öschinenthales hinziehen, ist bekannt. Das schöne liegende Gewölbe des Dündenhorn liegt auf einer Eocänmulde. Diese scheint sich dann gegen den Hochthürlipass hinzuziehen. Sie muss notgedrungen mit dem Eocän von Mürren und der Scheidegg in Zusammenhang gebracht werden. Wie leicht begreiflich, ist das Gestein aber nicht fortgesetzt anstehend zu sehen, weil es von älteren Sedimenten eingeschlossen sein kann, oder wenn anstehend, oftmals von Eis und Schnee bedeckt.

Diese kurze Übersicht, welche mit Detailbeschreibungen unserer Aufnahmen belegt werden könnte, mag für den gegenwärtigen Zweck genügen. Der Vergleich obiger Skizzen mit der Karte und den Detailprofilen giebt mehr Aufklärung und Belehrung als ein ganzer Band Beschreibung.

Es bleibt nur noch ein besonderer Punkt zur Besprechung übrig, nämlich

C. Das Schuttgebiet von Kandersteg.

Indem das tiefere Tunnelprojekt durch den Lötschberg gerade diese Schuttausfüllung zu durchstechen hätte und zwar auf eine Strecke von fast $2^1/_2$ Kilometern, so ist es angezeigt, die Natur und Beschaffenheit dieser mächtigen Schuttablagerung näher zu besprechen.

Oben erwähnten wir schon, dass die Hügel von Bühl und von Schlossweid bei Mittholz unterhalb Bühlstutz mit Blockanhäufungen bedeckt sind, welche, der Natur des Gesteins nach zu schliessen, unzweifelhaft einem Bergsturz zuzuschreiben sind, welcher sich vom Nordostabhang des Fisistockes ablösend bis Kandergrund hinunterrollte, also fast 8 Kilometer von der Abrissstelle entfernt. Diese Thatsache steht fest. Darauf wurde verschiedenerseits die Ansicht begründet, die ganze Trümmeranhäufung am Bühlstutz, welcher die Thalstufe des mehr als 160 m höher gelegenen Kanderstegbodens bildet, sei gerade durch diesen Bergsturz entstanden.

Vor allem steht sicher, dass diese Thalstufe von Bühlstutz kein Felsriegel, sondern eine wirkliche Schuttanhäufung ist. Daraus geht des weiteren hervor, dass zur Zeit, als diese Schuttablagerung noch nicht da war, das tiefere Kanderthal von Mittholz aufwärts mit gleichförmigem Gefälle sich bis an den Eingang zur Klus und des Öschinenthales ausdehnte. An Stelle des jetzigen flachen Thalgrundes von Kandersteg lag früher ein viel tiefer eingeschnittenes Thal. Ziehen wir noch den Umstand in Betracht, dass schon bei Mittholz und Schlossweide eine bedeutende Schuttausfüllung auf dem Thalgrunde liegt, so dürfen wir wohl annehmen, dass die Höhe der Schuttanhäufung am Bühlstutz nicht weniger als 200 m über den Felsgrund des Thaleinschnittes sich erhebt. Bei Kandersteg mag die Schuttaufhäufung wohl noch 150 m betragen und bei Eggenschwand etwa 100 m.

Wäre nun die Thalstufe von Bühlstutz eine Schuttablagerung, vom erwähnten Bergsturz vom Fisistock herrührend, so müsste der-

selbe ursprünglich eine eigentliche Abdämmung des oberen Kanderthales erzeugt haben. Ungefähr so wie jetzt noch der Öschinensee, müsste nach dem Sturz das Thalstück oberhalb der Sperre sich mit Wasser gefüllt haben. In diesem Falle wäre der flache Thalgrund von Kandersteg als ausgefülltes Seebecken zu denken.

Unsere Aufnahmen haben aber dargethan, dass ein Teil des Kanderstegergrundes von Moränen bedeckt ist, besonders bei Eggenschwand. Diese Moränenhügel hängen aufs deutlichste mit der bedeutenden Schuttanhäufung zusammen, welche den Hügel «Auf der Höhe» genannt, bildet. Wir haben ausserdem festgestellt, dass das Bergsturzmaterial von Bühl bis Schlossweide nur oberflächlich liegt, und dass darunter sich überall dieselbe hauptsächlich aus Jura- und Kreidegeschieben bestehende Moräne sich vorfindet.

Aus diesen Beobachtungen gehen zwei Thatsachen hervor:

1. dass der Bühlstutz aus Moräne besteht und dass 2. der Bergsturz vom Fisistock erst nachträglich auf die Moräne gestürzt ist. Das Fehlen von Sandsteintrümmern zwischen dem Abrissgebiet und dem Bühl, wo die ersten Sandsteinblöcke vom Fisistock sich zeigen, mag vielleicht dem Umstand zuzuschreiben sein, dass der Sturz stattfand, als der Gletscher, durch welchen die Moräne entstand, noch vorhanden war und das Schuttmaterial auf dem Gletscher ins Thal herunterrollte, was auch das ausgedehnte Zerstreuungsgebiet erklärt.

Der Gletscher muss unbedingt aus dem Öschinenthal herausgeflossen sein, das beweist das Schuttmaterial, dem Trümmer von Gasterengranit durchaus fehlen; auch die Form der Moränenhügel zwischen Eggenschwand und Bühl zeigt eine so deutliche bogenförmige Anordnung, dass deren Natur als Stirnmoränen eines früheren Öschinengletschers nicht verkannt werden kann.

Warum der Öschinengletscher noch bis Kandersteg vorstossen konnte, während der Gasterengletscher sich schon in sein oberes Thal zurückgezogen hatte, mag seine Erklärung in dem hochgelegenen, sehr ausgedehnten Firngebiet und dem sehr steilen Gefälle des Öschinengletschers finden.

Es darf somit angenommen werden, dass die Thalausfüllung von Kandersteg, den oberflächlichen Teil ausgenommen, vollständig aus Moräne besteht und zwar im tieferen Teil aus Grundmoräne, im oberen und am nördlichen Thalrand aus Stirnmoräne. Mit diesem Umstande hängt auch die Erscheinung zusammen, dass

beidseitig vom Thalboden bedeutende Quellen aus den Neocomkal besonders aber aus den tertiären Sandsteinen entspringen. Wäre Ausfüllung Bergsturz, so würden die Quellen nicht zu Tage tret sondern unterirdisch abfliessen und wahrscheinlich erst bei der Schlo weide oder an irgend einer Stelle des Thalriegels am Bühlstutz a treten. Moräne, besonders Grundmoräne ist aber meist wasserdicht Material, wodurch das seitlich von den Thalgehängen ausfliessen Quellwasser gestaut wird und zwischen Gletscherschutt und Fels a steigend bis an die Oberfläche dringen muss. Dieser Umstand s noch bei Besprechung der Wasserverhältnisse des tieferen Lötschber tunnels in Erwägung gezogen werden.

III. Spezielle geologische Beschreibung der Tunnelprofile.

A. Lötschberg.

I. Der kürzere Tunnel 12,9 km.

Der kürzere Tunnel trifft, abgesehen von einer unbedeutende kleinen Schutthalde beim Nordportal, überall gewachsenen, anstehen den Fels.

Nach der Natur desselben ergeben sich für das Tracé ohn weiteres 3 Sektionen:

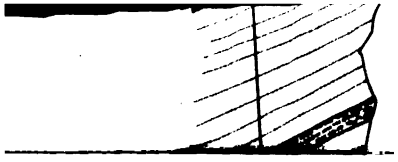
a) Nördliche Sektion — im Kalk;
b) Mittlere Sektion — im Gasterengranit;
c) Südliche Sektion — in den krystallinen Schiefern.

a. Nördliche Sektion.

Die nördliche Sektion begreift die Tunnelstrecke unter dem Fis stock, dem Gasterenthal und seinem nördlichen Thalhang, bis zu Kontakt mit dem Granitstock, umfasst also das Stück vom nördliche Tunnelportal auf dem rechten Kanderufer bis zu Km 23 circa.

Die Sektion ist fast ausschliesslich im Kalkmantel angelegt. D dessen Schichten, wie aus den Ausführungen des vorigen Kapitels her vorgeht, in mehrere Falten geworfen sind, so wird es kaum möglic sein, die genaue Begrenzung der einzelnen Schichten in der Tief herauszufinden. Doch haben wir genügend Anhaltspunkte, um übe die Natur der kalkigen Sedimente, soweit sie für den Tunnelbau i Betracht kommen, Aufschluss geben zu können.

Der Tunnel tritt hinter dem Hotel Bären ein in dunkle, spätig oberflächlich braun anwitternde Kalke, die dem Urgon angehören



Dornbach

Lötschenpass

2895

mögen und bis Km 20 ungefähr anhalten. (No. 1—4 der Gesteinshandstücke.) Die Schichten fallen in dicken Bänken schwach N. W. und sind durchsetzt von einer fast senkrecht stehenden Klüftung.

Dann folgen ähnliche Kalke, dem Neocom angehörend, und bei Km 20.6 schwarze, thonige, sehr stark gefaltete und leicht verwitterbare Schiefer (No. 5).

Unter dem Gasterenboden stehen die ober- und mitteljurassischen Schichten an (No. 6—10). Die Hauptmasse derselben gehört wohl zum Hochgebirgskalk, einem dunkeln, bald dickbankigen, bald dünngeschichteten, hellklingenden Kalk von splittrigem Bruch. Das Gestein ist im allgemeinen fest und von geringer Verwitterbarkeit.

Von Km 22 an ungefähr folgen die Liasschichten: Echinodermenbreccien, massige, spätige, körnige Kalksteine mit Quarzkörnern und eingebetteten Dolomitbrocken (No. 11 und 12) und dunkelgraue, glänzende, dünnschiefrige, leicht verwitterbare Thonschiefer von nicht sehr bedeutender Mächtigkeit (No. 13 und 14). Der unterste Teil derselben könnte vielleicht den sonst buntgefärbten Triasschiefern angehören.

Gegen den Granitkontakt zu bei Km 23 circa trifft der Tunnel auf den Rötidolomit, einen dichten dolomitischen Kalk in massigen Bänken von bläulichschwarzer bis rosenroter Farbe mit der bekannten gelben Verwitterungsrinde und von splittrigem Bruch (No. 15 und 16).

Am Kontakt selber erscheint die Arkose (No. 17 und 18), körniger Trümmersandstein aus Quarz- und Feldspatkörnern bestehend, klein- oder grobkörnig, von weisslichgrauer oder grünlicher Farbe und in dicken Bänken. Mächtigkeit 6 m. (Auf dem Profil der Deutlichkeit halber zu mächtig angegeben, wie auch der Rötidolomit und die sog. Triasschiefer.)

Die sämtlichen, vom Südfuss des Fisistockes an auftretenden Schichten fallen mit circa 25° N. W.

In Bezug auf die Bohrung ist diese nördliche Sektion natürlicherweise die leichteste. Der Bohrfortschritt in den Kalkschichten wird ungefähr demjenigen entsprechen, wie er im gewöhnlichen Alpenkalkstein erreicht wird. (Am Gotthard im Dolomit 11—13 m pro Tag.) Grösser wird er sein in den Neocom- und Liasschiefern, geringer in der harten Arkosebank.

Die Sprengwirkung in den kompakten Kalkbänken ist bekannter-

massen eine sehr grosse, wird aber sehr stark beeinträchtigt durch die wenig geneigte Schichtenlage.

Wenn auch grössere Partien der Tunnelröhre in festen Kalk fallen, so wird doch aus später zu erörternden Gründen eine Ausmauerung der ganzen Sektion notwendig sein. Gebirgsdruck könnte sich unliebsam bemerkbar machen in den Liasschiefern bei Km 22.5.

Die Länge dieser Sektion beträgt circa 3,8 Km.

b. Mittlere Sektion.

Sie umfasst diejenige Tunnelstrecke, in welcher der Granitstock von Gasteren durchbohrt wird.

Der Gasterengranit ist der einzige ächte Granit der Berneralpen, ein körniges Gemenge von weissem Orthoklasfeldspath, grünlichem Plagioklasfeldspath, schwarzem oder tombakbraunem, stets in 6seitigen Blättchen ausgebildetem Glimmer und gleichmässig verteiltem Quarz.

An Stelle des grünlichen Plagioklasfeldspathes tritt hin und wieder ein pfirsichblütrot gefärbter. Dieser rote Gasterengranit (No. 21) erscheint aber nur in untergeordneten Partien, nesterweise im gewöhnlichen Granit.

Die Struktur des Granits ist eine durchaus richtungslose, massige. Nach dem Korn ergeben sich eine Menge von Varietäten. No. 19 z. B. grobkörnige Varietät mit vorwaltend grünem Feldspath (grüner Gasterengranit), No. 20 mittelkörnige Varietät mit vorwaltend weissem Feldspath (weisser Gasterengranit).

Ein steilgestelltes Kluftsystem sondert die Granitmasse in Bänke von $^1/_2$—$1^1/_2$ m Dicke.

Schon auf der Nordseite des Granitmassivs ist der Grundgranit durchsetzt von vereinzelten Porphyrgängen (No. 22 und 22*). Dieselben häufen sich nach dem Südende des Massivs zu in einer Weise, dass der Porphyr das vorherrschende Gestein wird.

In Bezug auf Bohrarbeit wird diese mittlere Sektion die schwierigste sein. Der Gasterengranit könnte hinsichtlich des Widerstandes, den er dem Bohrer entgegensetzt, etwa verglichen werden mit dem Gneiss-

---

Anmerkung. Nach den uns vorliegenden Profilen des kürzeren Tunnels würde die zu erstellende Ausweichsstation in die Nähe des Granitkontaktes zu liegen kommen. Wir machen hier aufmerksam auf die teilweise schlechte Beschaffenheit der Liasgesteine und die voraussichtlich beträchtlichen Wasserinfiltrationen an jener Stelle.

granit der Schöllenen; eher ist er noch zäher, wird aber bessere Sprengresultate ergeben. Zur Vergleichung könnten nachstehende Bohrresultate beigezogen werden:

Im Gneissgranit des Gotthard:

Gneissgranit	4 m	pro	Stunde	2,5 m	täglich.	Fortschritt	im	Richtstollen	6 Maschinen (System Ferroux)
„	4,4 m	„	„	2,8 m	„	„	„	„	
„	5 m	„	„	3 m	„	„	„	„	
„	4,6 m	„	„	3 m	„	„	„	„	

Im zähen Antigoriogneiss des Simplon:

4 m täglich im Richtstollen (Brandt'sche Bohrmaschine).

Dagegen werden die ausserordentlich harten Porphyrgänge die Fortschritte in der Bohrung eher ungünstig beeinflussen, wenn auch die Sprengwirkung eine sehr gute sein wird.

Für den regelmässigen Fortgang der Arbeiten sodann ist die sehr gleichmässige Beschaffenheit des Gesteins von grossem Vorteil.

Trotz des vorzüglichen Gesteinsmaterials in dieser Sektion glauben wir doch eine Ausmauerung befürworten zu sollen, hauptsächlich im Hinblick auf die grossen Überhöhungen (1100—1640 m). Spannungen im Gestein, und die sind ohne Zweifel auch im Granitkern vorhanden, lösen sich mit der Zeit aus. Auch in ganz kompaktem Fels bilden sich dann Spaltfugen, was seine Zerbröckelung zur Folge hat und eine nachträgliche Auskleidung der Tunnelröhre doch notwendig macht. Daher wird z. B. der Simplontunnel vollständig ausgemauert, obschon der Tunnel auf der Südseite im Antigoriogneiss liegt, der an Festigkeit unserem Gasterengranit nur wenig nachgeben dürfte.

Übrigens wird gerade der Gasterengranit ein ausgezeichnetes Konstruktionsmaterial liefern. Zwar kann das im Tunnel gesprengte Gestein zu Bauzwecken nicht oder nur in geringem Masse verwendet werden, weil die Sprengung vollständige Zertümmerung im Gefolge hat.

Dagegen finden sich im Hintergrund des Gasterenthales genügend Stellen, wo der Granit mit Leichtigkeit gebrochen werden kann. Hier soll auch auf den bequemen Abbau der harten, eocänen Sandsteine des Fisistocks hingewiesen sein.

Auf der Nordseite wird der Tunnel auf den Granit stossen ungefähr bei Km 23. Die Grenze zwischen Sedimentdecke und Grundgebirge ist jedoch kaum genau zu bestimmen, da die nächste sichtbare Kontaktstelle bereits 1 Km von der Tunnelaxe entfernt liegt. Immer-

hin sind die Anhaltspunkte doch der Art, dass der Fehler nicht mehr als 200 m betragen sollte.

Schwieriger dagegen ist die Bestimmung der Südgrenze des Granitstockes. Jedenfalls liegt sie zwischen Km 28 und 29. Nehmen wir 28.7, so erhalten wir als Länge der mittleren Sektion 5.6 Km

c. Südliche Sektion.

Die südliche Sektion beginnt bei Km 28.7 circa, wo der Tunnel in die Zone der krystallinen Schiefer eintritt und darin verbleibt bis zu seiner Ausmündung ins Lötschthal.

Die Zone der krystallinen Schiefer ist ausgezeichnet durch die Mannigfaltigkeit ihrer Gesteine: Sericitische Gneisse und Schiefer Glimmerschiefer, grüne Schiefer mit Einlagerungen von Topfstein und Amphiboliten. Im südlichen Teil der Sektion erscheinen dann granitische und aplitische Gänge, die in grosser Zahl die Schiefer durchziehen. Eine petrographische Beschreibung der einzelnen Gesteine ist im Hinblick auf rein technische Fragen überflüssig. Besser als jede Beschreibung giebt unsere Handstücksammlung No. 23—42 Auskunft.

Der beständige Wechsel im Aussehen und in der Verteilung der verschiedenen Gesteine macht es unmöglich, für jedes einzelne derselben Ausdehnung und Lage in der Tunnelaxe festzustellen. Das hat übrigens gar keine grosse Bedeutung, weil die ganze Zone in technischer Beziehung doch eine mehr einheitliche darstellt. Doch konnten die Zonen der grünen Schiefer mit Amphibolit- und Topfsteineinlagerungen ungefähr festgestellt werden.

Die ganze Zone der krystallinen Schiefer streicht nördlich nach dem Hintergrund des Lötschthales; die Tunnelaxe steht also so ziemlich senkrecht zur Streichrichtung.

Während die Schichten oben an den Gräten flacher liegen, nimmt ihr Fallwinkel nach der Tiefe mehr und mehr zu, bis sie nahezu die Verticale erreichen. (Lonzabrücke 80°, Schlucht des Ferdenbachs 90°.)

Diese steile Schichtstellung ist für den Tunnelbau von grossem Vorteil. Der Schichtverband ist dabei ein fester und es sind so weniger starke Gewölbe notwendig, als bei mehr flacher Lagerung. Bezüglich der Mauerung verweisen wir auf das für die mittlere Sektion gesagte.

Was die Bohrung anbetrifft, so kann diese Sektion in Vergleich gebracht werden mit dem Stück des Gotthardtunnels unter dem Urserenthal, also mit den Gesteinen der Urserenmulde.

Zu den weichsten Gesteinen gehören die Glimmerschiefer, die Sericit- und die grünen Schiefer. (Vergl. No. 118, 81, 18, 12 Serie N. der Gotthardhandstücke, mit den nachstehend zusammengestellten Bohrfortschritten):

No. 118 Glimmerschiefer 8,98 m pro Stunde 4,49 m tägl. Fortschritt im Richtstollen
No. 12 Sericitschiefer 8,93 m „ „ 5,20 m „ „ „ „
(6 Maschinen System Ferroux.)

Geringere Bohrresultate werden sich von Km 32 an ergeben infolge der dort auftretenden granitischen und aplitischen Gänge.

Die zähesten Gesteine der ganzen Sektion sind ohne Zweifel die Amphibolite. Linsen- oder streifenförmige Amphiboliteinlagerungen von geringer Mächtigkeit sind zu erwarten zwischen Km 30 und 30.5 (Handstücke 28 und 33); grüne Schiefer zwischen Km 29.5 und 30.

Die Länge dieser Sektion mag 3,5—3,8 km betragen.

II. Der längere Tunnel 18.5 Km.

Für den längeren Tunnel ergeben sich insofern einige Abweichungen, als derselbe auf der Nordseite 168 m tiefer ins Gebirge eintritt, wodurch die Länge der Sektionen eine andere wird. Zugleich schneidet er eine Anzahl Gebirgsglieder, die der kürzere nicht mehr berührt. Sonst sind die Verhältnisse, soweit sie den anstehenden Fels betreffen, dieselben. Als neu kommt hinzu die in Schuttausfüllung zu erstellende Strecke Mitholz-Kandersteg. Wir erhalten also für den längeren Lötschbergtunnel folgende Gliederung:

1. Das Schuttgebiet von Kandersteg;
2. Die nördliche Sektion — im Kalk;
3. Die mittlere Sektion — im Granit;
4. Die südliche Sektion — in den krystall. Schiefern.

1. Das Schuttgebiet von Kandersteg.

Vom Nordportal bis zu Km 13.4 circa. Über die Thalausfüllung von Kandersteg ist im vorigen Kapitel eingehend berichtet worden.[1])

[1]) Da es für den Tunnelbau ziemlich gleichgültig sein kann, ob man die Schuttmassen am Bühlstutz als Moränen- oder als Bergsturzmaterial betrachtet, weil die beiden hier in technischer Beziehung keine grossen Verschiedenheiten zeigen, so verzichtet der eine Experte, der von der Bergsturznatur der ganzen Ablagerung überzeugt ist (Sturz vom Fisistock), auf eine ausführliche Begründung seines Standpunktes.

Sei es Moräne oder sei es Bergsturz, so viel ist sicher, dass man es in diesem ersten Stück unter allen Umständen mit Schuttgebirge zu thun haben wird, in welchem regelmässige mechanische Bohrung ausgeschlossen ist, und dass das Tunnelstück unter der Thalsohle von Kandersteg zu den schwierigsten gehört.

2. Die nördliche Sektion.

Von Km. 13.4 bis Km 17 circa trifft man mit einer einzigen Ausnahme die nämlichen Gesteine an, wie im vorigen Projekt. Vor dem Urgonkalk nämlich, bei Km 13.4, steht möglicherweise Eocän an und zwar ein sehr harter Sandstein.

3. Die mittlere Sektion.

7 Km lang, bis Km 24 circa, muss im Gasterengranit gebohrt werden.

4. Die südliche Sektion.

5½ Km, in den krystallinen Schiefern, die im vorigen Kapitel bereits besprochen wurden. Hinzuzufügen sind:

Bei Km 28 eine Zone grüner Schiefer mit einem Topfsteinlager. Gegen das Südportal hin bei Km 29.1 eine Amphibolitzone, die vom «roten Berg» auf das rechte Lonzaufer hinüber streicht und einen Bleiglanzgang enthält, der wahrscheinlich durch den Tunnel angeschnitten wird.

B. Wildstrubel-Tunnel.

Die beiden Wildstrubeltunnels erreichen das Grundgebirge und die ältesten am Lötschberg vorkommenden Sedimente der Trias nicht mehr. Die zu durchbohrenden Schichten setzen sich ausschliesslich zusammen aus Kalken, Schiefern und Sandsteinen. Was für ein Betrag freilich auf jede dieser Gesteinsarten fällt, lässt sich nicht zum voraus bestimmen; für das Innere des Wildstrubelklotzes sind wir auf die Hypothese angewiesen.

Sicher ist nur, dass der Tunnel auf der Nordseite auf die dunkeln thonigen, mit 30° Süd fallenden Flyschschiefer trifft, in welchen die Kalkklippe des Laubhorns steckt; auf der Südseite vorerst auf schwarze Schiefer und Sandsteine des Lias, dann auf die Kalkbänke des oberen und mittleren Jura. Möglicherweise wird man auf der grössten Tunnelstrecke eocäne Gesteine, Flysch, anbohren.

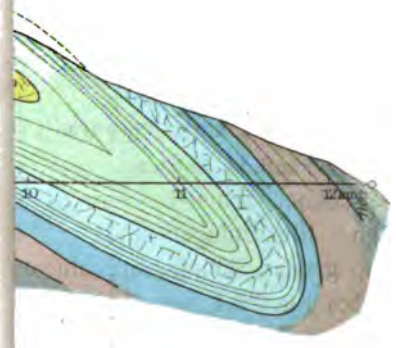
Die Bohrung in den durchweg weicheren Gesteinen, die auf grosse Strecken im grossen und ganzen dieselbe Beschaffenheit haben, wird eine leichte sein. Dagegen wird die Sprengwirkung durch die mehr flache Schichtenlage ungünstig beeinflusst.

Geolog

Wildstru

Siders

Massst



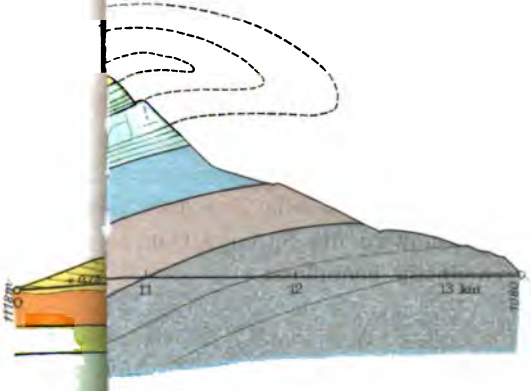
Bach

Bach

Strasse n. Leukerbad

Dala

Leuk



Ausdrücklich soll hervorgehoben werden, dass der Gebirgsdruck im Innern des Wildstrubelmassivs ein enormer sein muss, und falls dort wirklich die weichen Flyschgesteine anstehen, die stärksten Gewölbekonstruktionen notwendig werden.

IV. Wasser-Verhältnisse.

Lötschberg.

1. Kürzerer Tunnel. 12.9 Km.

Die Wechsellagerung wasserdichter und wasserdurchlässiger Schichten wird besonders in der Sektion *a* zu mehreren Wasserzuflüssen Veranlassung geben. Nahe beim Nordeingang wird der eine oder andere der Wasserstränge der am Thalrand von Kandersteg entspringenden Quellen durchschnitten werden. Das Wasser wird aus dem dunklen Urgonkalk heraustreten und bei der Bohrung wenig hinderlich sein, indem dasselbe meist seitlich oder in der Tunnelsohle zufliessen wird und ausgenommen beim Eintritt in die Neocomkalke (Km 20) wenig Wasserzufluss von oben zu befürchten ist.

Von Km 20—21 durch die oft schiefrigen Hauterivien- und Valangienschichten wird beständiger, aber schwacher und mit dem Fortschritt abnehmender Zufluss von oben stattfinden. Beim Eintritt in den rissigen Hochgebirgskalk, ungefähr bei km 21, sind bedeutende Wasserzuflüsse von oben zu befürchten, entsprechend dem Vorhandensein von starken Quellen, welche am nördlichen Thalrand des Gasterenbodens in 1360 m Meereshöhe austreten, ungefähr unterhalb der Stelle, wo der Hochgebirgskalk den Thalboden durchquert. Das Anschneiden des letzteren, nämlich des Kalkes, wird sehr wahrscheinlich dieses Quellenbassin anzapfen und die ganze Wassermenge nach und nach, im schlimmsten Falle auf einmal, zum Abfluss in den Tunnel bringen. Dabei wird der anfängliche Zufluss bedeutend grösser sein, indem sich der Wasserspiegel senken muss, bis das Reservoir vollständig entleert ist. Da es sich um eine sichtbare Wassermenge von ungefähr 200 SL handelt, wahrscheinlich aber viel mehr Wasser durch den Alluvialboden ausfliesst, so muss man sich auf ein anfänglich sehr bedeutendes Wasservolumen gefasst machen, 3—400 SL, im Frühjahr und Sommer mehr, als im Winter. Später mag die Wassermenge auf 250 SL herabsinken. Es ist wiederum möglich, dass durch sehr

günstige Verhältnisse nur ein kleiner Teil des Wassers abgezapft wird. Obige Ziffern beziehen sich auf den Fall, dass das ganze Quellenbassin angeschnitten wird.

Die Unterführung unter den Gasterenboden hat, trotz der geringen Überlagerung, nicht zu befürchten, auf Trümmergestein zu stossen. Die Auffüllung beträgt höchstens 60—70 m. Der Tunnel wird also sicher noch von mindestens 100 m Felsgestein überhöht sein. Wasserzufluss ist auf der Nordseite, im Hochgebirgskalk zu befürchten. Im Dogger, sowie im obern und untern Lias wird häufiges, aber schwaches Wasserträufeln stattfinden. Nur im kompakten mittleren Lias werden bedeutende Wasserzuflüsse zu erwarten sein.

Sektion *b*. Es ist kaum wahrscheinlich, dass der Eintritt in das Gasterengranitmassiv mit bedeutendem Wasserzufluss zusammenfallen wird. Der Granit ist, obschon zerklüftet, nur oberflächlich als Wasser durchlässiges Gestein zu bezeichnen. Die unbedeutende Löslichkeit seiner Substanz verhindert tiefgehende Erweiterungen der Klüfte; somit dringen Tagewasser gewöhnlich nur wenig tief in Granitgestein ein. Da die Überhöhung des Tunnels im abgedeckten Teil des Granitmassivs 1200—1400 m beträgt, so ist der Wasserzufluss bis in solche Tiefe fast vollständig ausgeschlossen.

Sektion *c*. Die steilstehenden krystallinen Schiefer werden, dank ihrer Parallelabsonderung, welche die Wasserführung sehr erleichtert, zuerst sehr schwachen Wassermengen tropfenweisen Zutritt gestatten. Die Menge dieses Sickerwassers wird mit abnehmender Überhöhung des Gebirgs zunehmen und besonders in der Nähe des Südportals in den sehr zerklüfteten Aplit- und Mikrogranitgängen kleinere Quellen bilden. Grössere Quellen werden in der Strecke *c* keine zu erwarten sein.

2. Langer Tunnel.

Hier ist besonders die Unterfahrung der Schuttauffüllung des Thalbodens von Kandersteg von grosser Bedeutung. Es ist erstens beständiger Zufluss von Tagewasser zu befürchten, im Falle, dass das Schuttmaterial aus grossen Blöcken (Bergsturz oder Blockmoräne) besteht. Bei lehmig-sandiger oder kiesig-sandiger Grundmoräne wäre dies weniger der Fall. Die Thatsache, dass auf beiden Seiten des Thalbodens, zwischen Kandersteg und Eggenschwand, bedeutende Quellen entspringen, mindestens 500 SL, deutet mit Sicherheit darauf-

hin, dass an der Randzone der Schuttmasse, vor dem Eintritt in das feste Gestein (Km 13.3—13.4), der rechtsseitige Quellenstrang abgeschnitten wird. Da derselbe der ergiebigste ist, so mag die Wassermenge auf mindestens 300 SL angesetzt werden; am Anfang bis zur Entleerung des Bassins natürlich viel mehr.

Sektion 2 wird sich verhalten ganz wie beim kurzen Tunneltracé. Bei Km 14.6 bedeutende Wassermenge aus dem Malm. Von Km 15 bis 17 wenige Zuflüsse oder nur ganz schwaches Schweissen des Gesteins.

Die Sektion 3 wird sich hier wegen der nur schwachen Überhöhung (430 m) durch den Gasterengranit unterhalb Brandhubel etwas anders verhalten, als der entsprechende Teil des kürzeren Projekts. Bei Km 18 wird möglicherweise Tagewasser durch Spalten eindringen. Die Sickerwasser werden aber mit der Überhöhung abnehmen und erst in den krystallinen Schiefern, Sektion 4, wieder etwas zunehmen, um dann mit der allmähligen Abdachung von Km 17 an sich mehr und mehr zu vermehren, ohne aber ein bedeutendes Volumen zu erreichen.

Wildstrubel.

Die sehr ähnlichen Verhältnisse beider Tunnelprojekte erlauben uns, dieselben zusammen zu besprechen. Die Strecke von Km 0—6 wird im allgemeinen nur diffuse, tropfenweise Sickerwässer aufweisen, besonders im Norden beim Durchfahren der steilstehenden Flyschschiefer. Nur beim Durchstich der Laubhornklippe, insofern dieselbe bis auf das Tunnelniveau herabreicht, wird ein grösseres Wasservolumen zu erwarten sein. Der südliche Tunnelteil in den Kreide- und Juraschichten wird bei Km 6.5 und besonders bei Km 8—8.5 bedeutende Wassermengen antreffen; beim Tracé Oberried-Leuk mehr, als beim Tracé Oberried-Siders. Bei ersterem werden höchstens die Liassandsteine in der Nähe des Südportals Wasserzuflüsse gestatten; bei letzterem die Malmkalke bei Km 11.5.

V. Temperatur-Verhältnisse.

Die Schwierigkeiten, die sich der Temperaturbestimmung für einen Punkt innerhalb eines Gebirgsstockes entgegenstellen, sind bekannt. Die Gesteinswärme hängt nicht nur ab von der vertikalen

Tiefe, resp. der kürzesten Entfernung zur Oberfläche; sie
mehr bedingt durch das Gesamtrelief der überlagernden G
und im einzelnen manigfach beeinflusst durch die Natur d
seine Struktur, Wasserführung u. s. w.

Aus dem Grunde ist es auch unmöglich, für die Ten
rechnungen exakte Formeln aufzustellen, um so weniger, a
die Temperatur der Bodenoberfläche in verschiedenen Höh
spärliche Beobachtungen besitzen.

Trotzdem wurden für die einzelnen Projekte die von
gestellten Formeln in Anwendung gebracht:

I. $T = t + 0{,}020679\ h$ (h = vertikale Überhöhung)
(n = kürzester Abstand zur O
II. $T = t + 0{,}02159\ n$ (t = Bodentemperatur)

Da die nach obigen Formeln erhaltenen Resultate aber
$\pm$ 5° unsicher sein können, so schien es wünschenswert, a
von *Heim* angewandte Methode des Vergleichens mit einem b
Temperaturprofil (Gotthard) zu benutzen, eine Methode, die
Temperaturen bis auf $\pm$ 2° richtig zu schätzen. Die letzte
der Vorausbestimmung diente zur Herstellung der Temperatur
doch werden wir vergleichsweise die nach Stapf erhaltenen
ebenfalls beisetzen.

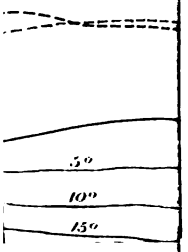
A. Der Temperaturverlauf im Lötschberg.

Das Lötschberggebiet weist in seinem äussern Relief m
Ähnlichkeit mit dem Gotthardgebiet auf: ähnliche Gipfelhöhen,
schneiden eines tiefen, bereits im Streichen verlaufenden Thal
den Gebirgskörper mit fast gleicher Thalsohlenhöhe u. s. w.

Aus dem Grunde ist ein Zunehmen der Erdwärme analog
jenigen des Gotthards sehr wahrscheinlich.

Für das höhere kürzere Lötschbergprojekt tritt dann
günstiger Umstand noch hinzu, dass die Tunnelaxe bei 100 m h
liegt als am Gotthard. Im übrigen ergeben sich die für dieses Pro
voraussichtlich zu erwartenden Temperaturen aus folgender Tabe

der Geoi



Km	Berechnet nach I.	II.	durch Vergleichung.
Nord-Portal	7,5°	7,5°	7,5°
20	15°	13°	14°
21	11°	10,5°	15°
22	10°	10°	15,4°
23	18°	16°	18°
24	25,5°	25,8°	25°
25	34°	30°	29,5°
26	28°	28°	29°
27	30°	30,5°	29°
28	29,7°	29°	28°
29	25°	25°	26°
30	23°	22°	22°
31	18°	18°	18°
32	13°	13°	14°
Süd-Portal	8°	8°	8°

Wir werden daher kaum fehlgehen, wenn wir die Maximaltemperatur bei 30° annehmen, und eine Vergleichung ergiebt, dass man beim Bau des kürzern Lötschbergtunnels mit ähnlichen Wärmeverhältnissen zu rechnen haben wird, wie es am Gotthard der Fall war.

Dasselbe gilt in noch höherem Masse auch für das tiefere Lötschbergprojekt. Doch wird hier die Maximaltemperatur der orographischen Verhältnisse wegen eine etwas höhere sein, 31° jedoch kaum übersteigen und überdies nur auf eine kurze Strecke. Die zu erwartenden Temperaturen sind folgende:

Km	Berechnet nach I.	II.	Durch Vergleichung.
Nord-Portal	8°	8°	8°
12	10,9°	10,9°	11°
13	11°	11°	12°
14	14,5°	13°	16°
15	26°	23°	23°
16	30°	30°	28°
17	21°	20,5°	22°
18	14°	13°	17°

Km	Berechnet nach I.	Berechnet nach II.	durch Vergleichung.
19	21°	19°	20°
20	22°	23°	26°
21	29°	26°	29°
22	36°	35°	31°
23	30°	30°	30,5°
24	25°	25°	27°
25	24°	23°	24°
26	22°	21°	20°
27	19°	17°	17°
28	13°	12°	15°
29	10°	10,5°	14°
Süd-Portal	8°	8°	8°

B. Der Temperaturverlauf im Wildstrubel.

Das Wildstrubelgebiet stellt eine einzige klotzige, wenig gegliederte Masse dar, mit mauerartig aus den Thälern emporstarrenden Abstürzen, gekrönt von einem breiten Plateau, aus dem nur wenige höhere Spitzen hervorragen.

In einem Gebirgsstock mit derartigen Reliefformen wird natürlicherweise der Verlauf der Geoisothermen ein wesentlich anderer sein, als am Gotthard resp. Lötschberg und für die Tunnelprojekte sind bedeutend höhere Temperaturen vorauszusehen. Während am Lötschberg die grösste Vertikaldistanz für den tieferen Tunnel 1700 m, für den höheren 1644 m beträgt und zwar nur auf einer ganz kurzen Strecke, wird sie im Projekt Oberried-Leuk z. B. 1950 m und überschreitet dort die Maximalüberhöhung des Lötschberges auf einer Länge von mehr als 4 Km. So erhalten wir denn im Leukertunnel höhere Temperaturen als 35° auf einer Strecke von 5 Km und für die innersten 3 Km steigt die Wärme sogar auf 37—38° (siehe die folgende Zusammenstellung).

Km.	Berechnet nach I.	II.	Durch Vergleichung.
Nord-Portal	7°	7°	7°
1	11°	11°	15°
2	19°	17°	20°
3	30°	28°	29°
4	39°	36°	35°
5	40°	40°	38°
6	36°	38°	37°
7	37°	38°	38°
8	39°	38°	37°
9	33°	33°	35°
10	31°	32°	31°
11	27°	23°	24°
12	17°	17°	16°
13	12°	12°	16°
Süd-Portal	8°	8°	8°

Etwas günstiger als das vorige Projekt stellt sich der Tunnel Oberried-Siders. Immerhin erhalten wir auch dort Temperaturen von über 30° auf einer Länge von 4,5 Km; 35° zwischen Km 5 und 7.

Aus den vorhergehenden Ausführungen ergiebt sich, soweit die Wärmeverhältnisse in Betracht kommen, dass die Lötschbergprojekte den Wildstrubelprojekten weit überlegen sind. Die beiden Lötschbergprojekte stellen sich so ziemlich in gleiche Linie. Eine Verschiebung der Tunnelaxe im Lötschberggebiet innerhalb der beiden Tracélinien wird an diesem Verhältnisse wenig ändern.

VI. Geologische Begutachtung einer allfälligen Verschiebung der noch nicht bestimmten Tunnelaxe durch den Lötschberg innerhalb eines Streifens von ½—1 Km Breite rechts und links von der vorläufig angenommenen Axe.

Eine Verschiebung der kürzeren Tunnelaxe nach Westen halten wir entschieden für unvorteilhaft. Erstens hätte sie eine Unterfahrung des Gasterenbodens unter ganz schiefem Winkel zur Folge, wodurch jene Strecke verlängert, die Überhöhung des Tunnels aber

auf kaum 150 m reduziert und die Mächtigkeit des Felsbodens über dem Tunnel kaum mehr als 50 m betragen würde. Dabei ist neben der Zunahme des Tagewassers zu befürchten, ja sicher anzunehmen, dass die ganze Wassermenge der Quellen am Nordrand des Gasterenbodens abgeleitet werde.

Sodann käme der Tunnel noch näher als es jetzt der Fall ist, in die Nähe der gewaltigen Kalkmasse des Balmhorns - Ferdenrothorns, wodurch die Temperaturverhältnisse sich bedeutend ungünstiger gestalten müssten.

Eine Verschiebung der Axe gegen Osten zu könnte nur den Vorteil haben, dass der Wasserzudrang von der Nordseite des Gasterenthales ein weniger grosser würde. Bezüglich der Temperatur bleiben sich die Verhältnisse so ziemlich gleich. Dagegen wird der Tunnel länger und zwar hauptsächlich die mittlere Granitsektion b.

Wir betrachten daher das eingezeichnete kürzere Tracé vom geologischen Gesichtspunkt aus als das richtige.

Bei einer Verschiebung der längeren Tunnelaxe kann es sich nur um eine solche in der Richtung nach Osten handeln, d. h. Verlegung des nördlichen Tunneleingangs in das Felsgestell der Birre durch eine gekrümmte Einfahrt. Eine derartige Verlegung hätte den Vorteil, dass der Tunnel dem schwierigen Teilstück unter dem Kanderstegboden ausweichen könnte.

VII. Vergleichung der verschiedenen Tunnelprojekte.

Nach eingehender Vergleichung vom geologischen Standpunkt aus kommen wir zu folgenden Schlüssen:

Lötschbergtunnel. Vorteile desselben:

1. Einheitlichkeit und gleichmässige Beschaffenheit der Gesteine auf lange Strecken, hauptsächlich im Gasterengranit.
2. Allgemein steile Stellung der krystallinen Schiefer und ihr Streichen senkrecht zur Tunnelaxe.
3. Verhältnismässig geringe Temperatur, auch beim tiefen Tracé.
4. Gutes Baumaterial, sowohl auf der Nord- als auf der Südseite.

Aus dem einzigen Vorteil des langen Tracés, seiner tiefen Lage, erwachsen folgende Nachteile:

1. Bedeutende Länge.

2. Schwierigèr Tunnelbau in der ersten Sektion auf der Nordseite, welcher höchstens durch eine bogenförmige Tunneleinfahrt mit Verlegung der gradlinigen Tunnelaxe gegen Osten umgangen werden könnte.

Wildstrubeltunnel.

Vorteile:

1. Leichte Nord- und Südzufahrt. Dieser Vorteil ist besonders den Lötschberg-Projekten gegenüber hervorzuheben, indem hier auf der Südseite der Tunnel in ein von Lawinen und Bergsturz viel bedrohtes Seitenthal ausmündet.
2. Leichtere Bohrung in ziemlich gleichmässig beschaffenem Gestein.
3. Einfachere Wasserverhältnisse.

Nachteile:

1. Starker Gebirgsdruck. Daher Notwendigkeit einer durchgehend sehr starken Ausmauerung.
2. Hohe Temperaturen auf lange Strecken.
3. Geringe Sprengwirkung in den flachliegenden Schichten.
4. Schwer zu beschaffendes, gutes Baumaterial auf der Südseite.

Nach rein geologischen Rücksichten kommen wir dazu, dem kürzeren Lötschbergprojekt den Vorzug vor den andern Tunnelprojekten zu geben.

Bern, den 17. Februar 1900.

Die Experten: *v. Fellenberg.*

Kissling.

Schardt.

Theophil Studer.

Ueber Hunde aus den Crannoges von Irland.

Der Vortragende hatte schon früher Gelegenheit, in den reichen prähistorischen Sammlungen des irischen Nationalmuseums in Dublin die Reste von Hunden zu untersuchen, welche zum Teil in den Kulturablagerungen der prähistorischen Seenwohnungen gefunden worden waren. Seither sind ihm durch die Güte des Direktors der Sammlungen, Herrn Dr. Scharff, eine Anzahl vorzüglicher Gypsabgüsse jener Hundeschädel mitgeteilt worden, welche erlauben, eine genaue Vergleichung derselben mit den in unserer Sammlung befindlichen prähistorischen und recenten Hundeschädeln anzustellen.

Zunächst liegen drei Abgüsse von Schädeln aus dem Crannoge von Dunshaughlin, County of Meath, vor. Zwei grosse Schädel gehören, nach Etiquette, der berühmten Rasse des irischen Wolfshundes, Irish Wulfsdog. Der eine hat eine Basilarlänge von 210, der andere von 217 mm. Der Schädel ist im allgemeinen schmal, der Gesichtsteil nicht scharf abgesetzt, nach vorn sich verjüngend, die Cristae parietales bei beiden sehr hoch, der Hinterhaupthöcker stark nach hinten ausgezogen, die Parietalgegend wenig gewölbt, so dass der Schädel fast dachförmig von der Parietalcrista nach der Ohrgegend abfällt. Der Gesichtsteil ist vor dem Jochbogenansatz noch breit, vor dem foram. infraorbitale verjüngt er sich stark und verschmälert sich nach vorn bis zur Schnauzenspitze. Im Profil ist die Gegend der Nasenwurzel nicht eingesenkt, der Schädel fällt von der Stirnhöhe sanft und gleichmässig nach der Spitze der langen Nasenbeine ab; nur bei dem grösseren Exemplar zeigt sich eine Einsenkung in der Mitte der Nasenbeine. Bei demselben ist auch die Schnauze vorn stumpfer und breiter, der ganze Schädel etwas plumper als beim anderen. Die Stirn ist breit, bei dem grösseren in der Medianlinie stark vertieft, weniger bei dem kleineren Exemplar.

Im allgemeinen, bei dem einen bis ins Detail, stimmen die

Schädel mit dem des irischen Wolfshundes im brit. Museum in London überein, ebenso mit einem Wolfshundschädel unseres Museums aus der Zucht des Herrn Walker in St. Moritz. Nach dem letzteren Exemplar darf man sagen, dass die alte Rasse sich in der Walkerschen Zucht noch gut erhalten hat.

Von den älteren Schriftstellern, die sich mit dem irischen Wolfshund befassen, wird derselbe stets in seinem Habitus mit einem kräftigen Windhund verglichen und namentlich auf seine Verwandtschaft mit dem Scotsch Deerhound hingewiesen.[1]) Schädel von solchen, welche mir aus den Zuchten von Herrn Staub in Zürich vorliegen, bestätigen auch die nahe Verwandtschaft beider Formen, nur zeigt der Scotsch Deerhound, ein gracileres Gepräge. Die Schnauze ist länger und schmaler, die Jochbogen sind weniger ausgelegt, die Crista sagittalis ist niedriger und die Parietalgegend mehr gewölbt.

Beide Formen sind vereinigt in dem Canis Leineri aus dem Pfahlbau von Bodman am Ueberlingersee, welcher der jüngeren Steinzeit der Pfahlbauten angehört.[2]) Hier zeigt der Schnauzenteil des Schädels und das Verhältnis der Jochbogen ganz den Bau des Wolfshundes, während der Hirnschädel mit seiner schwächeren Scheitelcrista und der gut gewölbten Parietalregion den Typus des Deerhounds wiederholt.

Wir dürfen also diesen grossen Rassen, die im Altertum und bis ins Mittelalter als kräftige Jagdhunde eine grosse Rolle spielen, einen mitteleuropäischen Ursprung zuweisen. Namentlich bei den keltischen Völkerschaften scheinen sie nach Ueberlieferung der Alten und nach Funden von bildlichen und plastischen Darstellungen in den römisch-gallischen Ueberresten eine grosse Rolle gespielt zu haben.[3])

Der dritte Schädel, mit 167 mm Basilarlänge, zeigt einen von dem vorigen sehr verschiedenen Habitus. Er gehörte einem mittelgrossen Hunde an, etwa von der Grösse eines kräftigen Spitzers.

[1]) S. Graham, The irish Wolfhound by Capt. Graham, Rednock, Durzley 1879 und Walker, Der irische Wolfshund. Schweiz. Hundestammbuch. Bd. VI, 1896, p. 64.

[2]) S. Studer, Zwei grosse Hunderassen aus der Steinzeit der Pfahlbauten. Schweiz. Hundestammbuch V, 1893, und Beiträge zur Geschichte unserer Hunderassen. Naturwissenschaftliche Wochenschrift XII, 1897, Nr. 28.

[3]) S. Studer Th., Die Hunde der gallischen Helvetier. Blätter für Kynologie. II. Jahrg., Nr. 17, Zürich, August 1886, und Beiträge zur Kenntnis unserer Hunderassen etc.

Der Schnauzenteil ist stumpf und wenig verlängert und setzt sich an der Nasenwurzel durch eine Einsenkung von dem schön gewölbten Hirnschädel ab, auf dem eine mässig starke Crista parietalis entwickelt ist. Die Jochbogen sind stark ausgelegt. Der Gaumen ist breit, namentlich in der Gegend des Reisszahnes. Mit einem Worte, der Schädel gehört zu dem Typus des Pfahlbautenspitzes, Canis f. palustris, und zwar stimmt er überein mit den kräftigen grösseren Formen desselben, wie sie in der jüngeren Steinzeit gezüchtet wurden. Aehnliche Schädel liegen schon aus dem Pfahlbau von Lattrigen am Bielersee und aus den römischen Ruinen von Baden im Aargau vor.

Ein vierter Schädel eines mittelgrossen Hundes stammt aus dem Lough Gur in Limerick. Auch dieser zeigt die Spuren hohen Alters. Er ist braun gefärbt, wie die Schädel aus Torfmooren. Dieser Schädel stimmt in Grösse und Form am meisten mit dem Canis f. intermedius Woldrich[1]) aus der Bronzezeit überein, namentlich in dem Verhältnis des Hirnschädels zum Gesichtschädel, nur erscheint der Hirnschädel breiter und besser gewölbt, die Crista parietalis niedriger und die Schnauze etwas spitzer. Im Uebrigen steht er auch den Jagdhundformen, namentlich den Laufhunden, sehr nahe, so besonders dem helvetischen Laufhunde. Ich hatte schon an andern Orten hervorgehoben[2]), dass der C. intermedius der Bronzezeit in seinem Schädel die Charaktere der Jagdhunde zeige, und dass sich ihm der helvetische Jagdhund von La Tene und der bernische Laufhund nahe anschliessen, andrerseits zeigt er Beziehungen zum Schäferhund der Bronzezeit, dem Canis f. matris optimae Jeitteles.

Die Untersuchung der Hundereste aus prähistorischen Ablagerungen Irlands zeigt uns hiemit, dass dort die gleichen Urrassen der Hunde wie in Mitteleuropa vorkamen. Canis palustris, C. Leineri, C. intermedius bilden die Grundformen, aus denen sich die späteren Rassen entwickelt haben. Soweit wir demnach in Mittel- und Nord-Europa, von Irland bis zum Ladogasee, die prähistorischen Hundeformen kennen, lassen sich bis jetzt überall dieselben Urformen wieder erkennen, die schon in den schweizerischen und süddeutschen Pfahlbauten während der Stein- und Bronzezeit vorkamen.

---

[1]) Woldrich, Ueber einen neuen Haushund der Bronzezeit. Mitteilungen der anthropol. Gesellsch. in Wien. VII. Bd., Mai 1877, S. 61.

[2]) Studer, Th., Hunde der gallischen Helvetier und Beiträge zur Kenntnis der Hunderassen.

A. Droz-Farny.

Sur un théorème de Steiner.

Etude géométrique et développements.

Le journal de mathématiques belge, *Mathesis*, proposait en 1894, sous la signature de l'éminent géomètre E. Lemoine, la question 937:

Soit un triangle ABC, et soient A_1 B_1 C_1 les symétriques de l'*orthocentre H*, par rapport aux milieux des hauteurs; *A'*, *B'*, *C'*, les symétriques des pieds H_a H_b H_c des hauteurs *par rapport aux* milieux M_a, M_b, M_c des côtés BC, *AC*, *AB*.

1° Il y a une ellipse qui passe par les six points A, B, C, A' B' C'.

2° Elle est normale aux hauteurs en A_1 B_1 C_1.

3° Elle est tangente aux côtés en A' B' C'.

4° Elle a pour centre, le centre O du cercle circonscrit.

5° La somme de ses demi-axes égale le rayon R du cercle circonscrit.

6° Elle a pour équation: $\sum \alpha \sqrt{\frac{x}{\cos A}} = 0$

7° Si le cercle ABC et l'ellipse sont fixes, il y a une infinité de triangles ABC.

En 1895, j'ai donné dans *Mathesis*, page 258, une solution complètement synthétique de la question. En 1896, j'ai publié en outre dans le *Journal de Mathématiques spéciales* de Mr. de Longchamps p. 229—233 une solution géométrique de la question 501, proposée par Mr. le commandant E. Barisien et contenant quelques propriétés nouvelles de la figure.

Monsieur Barisien avait rencontré cette figure dans ses belles recherches sur les cercles de Chasles, ces cercles concentriques à une ellipse et de rayons respectifs a+b et a—b et qui jouissent de si nombreuses propriétés.

Les diverses propriétés retrouvées par MM. Lemoine et Barisien, avaient été étudiées autrefois par le grand géomètre bernois Steiner, qui les avait publiées dans le journal de Borchardt, volume 55, pages 356—378, sous le titre: Vermischte Sätze und Aufgaben. Voir

ses œuvres réunies, tome II, pages 671 et suivantes. De nombreuses propriétés nouvelles de cette figure ont été énoncées sans démonstrations par Mr. Böklen dans le *Journal de Hoffmann.*

Nous les rencontrerons dans la 2me partie de notre étude. Lire aussi la si intéressante étude historique de la question dans *Mathesis*, année 1898, page 61, due au savant géomètre Mr. Brocard (Colonel du génie à Bar-le-Duc).

Soient donc dans un triangle ABC, A′, B′, C′ les symétriques des pieds des hauteurs H_a H_b H_c par rapport aux milieux M_a M_b M_c des côtés BC, CA, AB et A_1 B_1 C_1 les symétriques de l'orthocentre H par rapport aux milieux des hauteurs.

On démontre aisément que les droites AA′, BB′, CC′ se coupent en un point Q, réciproque de l'orthocentre. Il existe donc une conique qui touche les côtés de ABC en A′ B′ C′.

Une proposition connue (Mémoire sur les transversales réciproques, *Annales de l'Ecole Normale*, 1866) due à Mr. de Longchamps prouve que *cette conique est l'enveloppe des transversales réciproques de celles qui tournent autour du point H.* (Voir note II).

Le centre de cette courbe, d'après un cas particulier d'un théorème de Newton, sur le lieu des centres des coniques ayant quatre tangentes communes, est à l'intersection des droites joignant M_a, M_b, M_c aux milieux N_a, N_b, N_c des droites AA′, BB′, CC′; ces droites étant parallèles aux hauteurs AH_a, BH_b, CH_c, *le centre de la conique E coïncide avec le centre O du cercle ABC.* (Voir 3 autres démonstrations dans la note I).

Comme $OM_a = \frac{AH_a}{2} = \frac{A_1H_a}{2}$, la droite A′O passe par A_1 et $A'O = OA_1$; *donc E passe par* A_1 B_1 C_1 *et les tangentes* en ces points sont parallèles aux tangentes menées en A′ B′ C′, autrement dit: *Les hauteurs du triangle ABC sont normales à la conique E.*

Les perpendiculaires élevées en A′, B′, C′ sur les côtés se coupent en un point N, symétrique de l'orthocentre par rapport à O. Ce point est évidemment l'orthocentre du triangle anticomplémentaire de ABC; donc:

Les hauteurs du triangle anticomplémentaire sont aussi normales à la conique E.

Menons par O et par A_1 des parallèles à BC; la première rencontre E en S et la seconde AC en P. On voit facilement que les

segments A′C et A_1 P déterminés par la tangente AC sur les tangentes parallèles A_1 P et A′C sont toujours de même sens; donc:

E est une ellipse.

Ensuite d'après un théorème connu $\overline{OS}^2 = \overline{A'C} \cdot \overline{A_1P}$.

Mais si l'on mène par H une parallèle à AC qui rencontre BC en D, l'égalité $AA_1 = HH_a$ entraine $A_1P = H_aD$, d'où

$$\overline{OS}^2 = A'C.A_1P = BH_a.H_aD = \overline{HH_a}^2$$

Donc les demi-diamètres de E parallèles aux côtés de ABC sont égaux aux segments inférieurs HH_a, HH_b, HH_c *des hauteurs.*

Nous connaissons maintenant deux demi-diamètres conjugués, OA′ et OS. Pour appliquer la construction de Chasles, nous élevons en A′ sur BC la perpendiculaire xA′y, de manière que $xA' = A'y = HH_a$, et que O et x soient de part et d'autre de BC, on aura:

$$Ox = a+b; \quad Oy = a-b$$

et les axes de E sont dirigés suivant les bissectrices de l'angle xOy. Comme $BH_a = A'C$, $A'x = HH_a$, on voit que x appartient à la circonférence ABC, donc $R = a+b$

$$\text{En outre } Oy = ON = (a-b) = OH$$
$$HN = 2\,(a-b).$$

Si, entre le rayon d'une circonférence et les axes d'une ellipse de même centre, on a la relation $R = a \pm b$, on peut inscrire à la circonférence une infinité de triangles qui sont en même temps circonscrits à l'ellipse et celle-ci est normale aux hauteurs de chacun des triangles. Cette proposition est rendue presque évidente par ce qui précède; on l'établit par un calcul facile, en prenant pour axes de coordonnées, les axes de l'ellipse et en considérant d'abord un triangle isoscèle dont les sommets ont pour coordonnées $(a+b;\ 0)$ et $(-a; \pm\sqrt{(a+b)^2-a^2})$, puis en appliquant le théorème de *Poncelet*.

Ces triangles jouissent des propriétés suivantes:

1° L'orthocentre décrit une circonférence de centre O et de rayon (a—b); le centre de gravité décrit une circonférence de centre O et de rayon $\frac{a-b}{3}$; le centre du cercle d'Euler décrit une circonférence de centre O et de rayon $\frac{a-b}{2}$.

2° Le cercle d'Euler reste constamment tangent aux deux cercles décrits sur les axes de E, ce qui est évident puisque

$$a = \frac{1}{2}(R+OH) \text{ et } b = \frac{1}{2}(R-OH)$$

On sait que dans tout triangle on a:

$$\overline{OH}^2 = R^2(1-8\cos A.\cos B.\cos C.)$$

$$\text{et } \overline{OH}^2 = 9R^2 - (\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2)$$

De là:

3° Dans chaque triangle ABC on a:

$$\cos A.\cos B.\cos C = \frac{a.b.}{2(a+b)^2}$$

4° Dans chaque triangle ABC on a:

$$\sum \overline{AB}^2 = 4(2a^2+2b^2+5ab)$$

De là aisément comme $AB = 2R\sin A$.

5°
$$\sum \sin^2 A = 2 + \frac{ab}{(a+b)^2}$$

$$\sum \cos^2 A = 1 - \frac{ab}{(a+b)^2}$$

$$\sum \cos 2A = -1 - \frac{2ab}{(a+b)^2}$$

6° Dans chaque triangle ABC, le produit des segments supérieurs des hauteurs est constant et égal à:

$$AH.BH.CH = 8R^3\cos A.\cos B.\cos C$$
$$= 4ab(a+b)$$

7° Dans chaque triangle ABC, le produit des segments inférieurs des hauteurs est constant et égal à:

$$HH_a.HH_b.HH_c = 8R^3\cos^2 A\cos^2 B.\cos^2 C$$
$$= \frac{2a^2b^2}{a+b}$$

8° En représentant par x, y, z les coordonnées normales de O dans le triangle ABC, on a:

$$x\,y\,z = \frac{ab(a+b)}{2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + ab.$$

9° Le produit des distances du centre O à l'un des côtés de ABC et à la droite joignant les points milieux des 2 autres côtés est constant et égal à:

$$R^2 \cos A. \cos B. \cos C = \frac{a\,b}{2}$$

10° Le produit des distances du centre O aux côtés du triangle complémentaire de ABC est constant et égal à:

$$\frac{a^3\ b^3}{8} : \frac{a\,b\ (a+b)}{2} = \frac{a^2\ b^2}{4\ (a+b)}$$

11° Le produit des diamètres de l'ellipse, parallèles aux côtés de ABC est constant et égal à

$$16\ \frac{a^2\ b^2}{a+b}$$

IIme partie.

Des formules connues:

$$a = b \cos C + c \cos B$$
$$b = a \cos C + c \cos A$$
$$c = a \cos B + b \cos A,$$

on déduit en éliminant les côtés:

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix} = 0$$

d'où la formule bien connue aussi:

I) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A. \cos B \cos C = 1$

Portons $AC' = BH_c$, $AB' = CH_b$; on sait qu'il existe une ellipse E tangente aux trois côtés aux conjugués isotomiques des pieds des hauteurs et dont le centre est O. (figure I).

A est donc le pole de B'C' et par conséquent AO bisecte B'C'.

Théorème: Soient A'B'C' les conjugués isotomiques des pieds des hauteurs et α β η les points milieux des droites B'C', A'C', A'B', les trois droites Aα, Bβ, Cη se coupent au centre O du cercle circonscrit au triangle ABC.

Calcul de Aα: On a $AC' = BH_c = a \cos B$

$AB' = CH_b = a \cos C$

donc $\overline{B'C'}^2 = a^2 \cos^2 B + a^2 \cos^2 C - 2\, a^2 \cos A \cos B \cos C$

$= 4\, R^2 \sin^2 A\, [\cos^2 B + \cos^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C]$

Or: $\overline{AC'}^2 + \overline{AB'}^2 = 2\ \overline{C'\alpha}^2 + 2\ \overline{A\alpha}^2$

donc: $2\ \overline{A\alpha}^2 = 2\, R^2 \sin^2 A [\cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C]$

$= 2\ R^2\ \sin^4 A$ (d'après formule I)

$A\alpha = R \sin^2 A$

$O\alpha = R \cos^2 A$

Cherchons sur la droite OA, les points x et y tels que O soit le milieu de x y et que x et y divisent Aα harmoniquement.

On aura: $Ox^2 = Oy^2 = O\alpha.\ OA = R^2 \cos^2 A$

$Ox = Oy = R \cos A$

Donc $xy = AH$

Théorème: Le diamètre de la conique E dirigé suivant OA est égal au segment supérieur AH de la hauteur AH_a.

Triangle orthique d'un triangle ABC.

Le triangle orthique $H_a\ H_b\ H_c$ est inscrit au cercle d'Euler de ABC. *Le lieu du centre* O_9 *du cercle circonscrit à ce triangle* est donc une circonférence de centre O et de *rayon* $\frac{a-b}{2}$. L'orthocentre H du triangle ABC est le centre du cercle inscrit au triangle orthique, donc: *Le lieu du centre* H du cercle inscrit est une circonférence de centre O et de rayon (a—b)

Le rayon du cercle circonscrit à $H_a\ H_b\ H_c$ reste constant $R' = \frac{R}{2} = \frac{a+b}{2}$; il est facile de démontrer que le rayon r' du cercle inscrit à $H_a\ H_b\ H_c$ reste aussi constant.

En effet: $a' = a \cos A$; $b' = b \cos B$; $c' = c \cos C$.

donc $2\, p' = \Sigma\, a \cos A = \Sigma\ 2\ R \sin A \cos A = R \Sigma \sin 2\, A$

$2\ p' = 4\ R \sin A \sin B \sin C$

2 surface du triangle orthique $= 2\ S' = a'\ b' \sin 2\ C$

$2\ S' = a\, b \cos A \cos B \sin 2\ C$

$= R^2 \sin 2\ A \sin 2\ B \sin 2\ C$

$$r' = \frac{S'}{p'} = 2\,R\cos A\cos B\cos C = \frac{ab}{a+b}$$

On a donc:

$$R' = \frac{a+b}{2};\quad r' = \frac{ab}{a+b}$$

Si d'un point P, on mène les quatre normales possibles à une ellipse, on sait d'après un théorème de *Joachimsthal* que trois des pieds des normales et le point diamétralement opposé sur l'ellipse au quatrième pied sont quatre points d'une même circonférence. Cette remarque nous permettra de construire les quatrièmes normales des points N et H à l'ellipse.

Soit donc un triangle ABC inscrit dans le cercle de rayon $R = a+b$ et circonscrit à l'ellipse E [*figure 2*] OH fait avec un des axes de E un certain angle φ. Construisons la symétrique de OH par rapport aux axes de E et soit Q son point d'intersection avec le cercle. Comme $OQ = a+b$ et $OH = a-b$ et comme l'angle QOH est divisé en parties égales par les axes de E, on sait d'après Chasles, que HQ est normale à l'ellipse en son point milieu P et que $PH = PQ =$ le demi-diamètre conjugué à OP.

La perpendiculaire abaissée de O sur la tangente en P est égale en représentant par α l'angle de OP avec son diamètre conjugué à OP sin α et par conséquent d'après un théorème bien connu d'*Apollonius* en représentant la distance de O à la tangente par d on a:

$$d.\,HP = OP.\,HP\sin\alpha = ab.$$

Supposons une seconde ellipse Σ inscrite dans le triangle ABC et admettant pour foyers O et H. Son centre sera le centre O_9 du cercle des neuf points du triangle. Soit R le symétrique de H par rapport à BC. OR sera le grand axe de l'ellipse Σ et coupera BC au point de contact. Mais d'après un théorème connu de géométrie, les symétriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport à ses côtés appartiennent à la circonférence circonscrite au triangle, donc OR le grand axe de l'ellipse Σ est égal à $a+b$.

On a donc pour cette ellipse $2a' = a+b$

$$2c' = OH = a-b$$

$$2b' = 2\sqrt{ab}$$

On sait que les pieds des perpendiculaires abaissées des foyers d'une ellipse sur les tangentes sont sur le cercle principal de l'ellipse

et que le produit des deux perpendiculaires abaissées des foyers sur une tangente quelconque est égal au carré du demi petit axe. Comme d'après une relation précédente

$$d.\ HP = ab = \overline{b'^2}$$

il en résulte que la tangente à E au point P est aussi tangente à Σ d'où le théorème énoncé par Mr. *Böklen* [Dr. O. Böklen, Oberstudienrath à Stoutgart]

Théorème: Les deux ellipses E et Σ ont 4 tangentes communes, les 3 côtés du triangle ABC et une quatrième tangente dont le point de contact avec E est le pied P de la 4me normale de H à l'ellipse. Comme H et N sont symétriques par rapport à O, le point diamétralement opposé de P sur E est le pied de la 4me normale de N à E. Le point P est un des points d'intersection du cercle d'Euler de ABC avec l'ellipse E.

Transformons l'ensemble des deux ellipses E et Σ ainsi que le cercle principal de Σ, ou cercle d'Euler de ABC, par polaires réciproques, par rapport à une circonférence de centre O et de rayon $\varrho = \sqrt{ab}$. (voir figures 3′ et 3″)

L'ellipse E d'axes $AA_1 = 2\,a$ et $BB_1 = 2\,b$ se transforme suivant une ellipse égale E′ tournée autour de O de 90°.

L'ellipse Σ de foyers O et H de grand axe $CC_1 = a+b$ [$OC = a$ et $OC_1 = b$ puisque $OH = a-b$] se transforme suivant un cercle Σ' décrit sur $C'C_1'$ comme diamètre; $OC' = b$ et $OC_1' = a$, le cercle principal de Σ tourné de 180°. Enfin le cercle principal S se transforme suivant une conique S′ de foyer O égale à la conique Σ tournée de 180° autour de O.

Les deux coniques E′ et S′ ainsi obtenues, ayant la même position relative que les coniques E et Σ, il en résulte qu'aux points d'intersection de E et S correspondent 4 tangentes communes des coniques E′ et S′ dont trois forment un triangle inscrit dans une circonférence de centre O et de rayon $(a+b)$. En revenant à la figure primitive on a le théorème suivant de Mr. *Böklen.*

Théorème: Le cercle principal de la conique Σ ou le cercle d'Euler du triangle ABC coupe l'ellipse E en 4 points: un de ces points P est le pied de la 4me normale abaissée de H sur E. Les trois autres points A_2 B_2 C_2 forment un triangle cir-

conscrit à une circonférence fixe de centre O et de rayon $\frac{ab}{(a+b)}$

Les triangles variables $H_a H_b H_c$ et $A_2 B_2 C_2$ sont inscrits dans un même cercle variable, mais de rayon constant $R = \frac{a+b}{2}$ et ont un rayon de cercle inscrit constant $r = \frac{ab}{a+b}$.

Ces triangles jouissent de nombreuses propriétés provenant de l'invariance de R et r.

Ces propriétés seront démontrées en note à la fin du travail.

Démonstration analytique d'nn dernier théorème de Mr. Böklen.

Soient de nouveau l'ellipse E, le point H, HP la 4me normale à E; HP étant égal au demi-diamètre conjugué à OP; α étant l'angle excentrique de P, OH est égal à (a—b) et forme un angle α avec le grand-axe de E.

Le cercle d'Euler de ABC de centre O_9, point milieu de OH passe ainsi que nous l'avons vu par P et le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente en P à E. [fig. 4]

D'après un théorème de Laguerre, on peut considérer ce cercle comme un cercle de Joachimsthal et par conséquent les normales à la conique E, aux points A_2, B_2, C_2 sont concourantes en un point Q, situé sur la normale au point p, diamétralement opposé à P sur E.

Si d'un point Q quelconque, pris sur la normale fixe au point p (x′ y′) de l'ellipse E, on abaisse les trois autres normales à E, leurs pieds sont sur une circonférence qui passe aussi par le point diamétral P de p (coordonnées —x′—y′) d'après le théorème de Joachimsthal.

Cette circonférence passe aussi par le pied N de la perpendiculaire abaissée du centre O de l'ellipse sur la tangente au point P (théorème de Laguerre). Si le point de concours Q des normales se déplace sur la normale en p, le lieu du centre du cercle de Joachimsthal est une droite, la perpendiculaire à NP en son point milieu.

Le cercle d'Euler passant par P et N est donc bien un cercle *de Joachimsthal.*

Le symétrique du centre O de l'ellipse par rapport au centre du cercle J (ici H) et le symétrique Q′ du point Q de concours des normales par rapport à O sont évidemment sur la normale en P.

Mais on peut démontrer que ces deux points sont isotomiques sur cette droite par rapport aux axes.

En effet soient x', y' les coordonnées de p et α, β celles du point Q; l'équation du cercle de Joachimsthal sous la forme que lui a donnée Mr. de Longchamps sera:

$$x^2 + y^2 + xx' + yy' - u\left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + 1\right) = 0$$

où $u = a^2 + \frac{b^2\beta}{y'} = b^2 + \frac{a^2\alpha}{x'^2}$.

On aura pour les coordonnées de son centre.

$$2x = -x' + \frac{ux'}{a^2} = -x' + \frac{x'}{a^2}\left(a^2 + \frac{b^2\beta}{y'}\right) = \frac{b^2\beta x'}{a^2 y'}$$

$$2y = -y' + \frac{uy'}{b^2} = \frac{a^2\alpha y'}{b^2 x'}$$

On a donc pour les coordonnées du point H:

$$X = 2x \quad Y = 2y$$

Or $XY = \alpha\beta$

Les points Q, Q' H sont donc sur une hyperbole équilatère de centre O et dont les asymptotes coincident avec les axes de E.

On a donc bien HL = Q'M.

Donc PL + PM = PH + PQ'.

Or comme PH = b'

on sait que $PL = \frac{b}{a}b'$ et $PM = \frac{a}{b}b'$

Donc $\frac{b}{a}b' + \frac{a}{b}b' = b' + PQ'$

Il en résulte $PQ' = \gamma$. PH. Le lieu du point Q' est donc une ellipse coaxiale à la proposée; il en sera de même pour le lieu du point Q. Voici d'ailleurs son équation:

Les coordonnées du point P sont: $-x' = a\cos\varphi$; $-y' = b\sin\varphi$

nous avons trouvé pour H: $x = \frac{b^2\beta x'}{a^2 y'}$; $y = \frac{a^2\alpha y'}{b^2 x'}$

Mais on sait aussi que:

$$x = (a—b)\cos\varphi \text{ et } Y = —(a—b)\sin\varphi$$

$$\text{Donc: } (a—b)\cos\varphi = \frac{b^2\beta\, a\cos\varphi}{a^2\, b\,\sin\varphi}$$

$$—(a—b)\sin\varphi = \frac{a^2\alpha\, b\,\sin\varphi}{b^2\, a\,\cos\varphi}$$

$$\text{ou: } \sin\varphi = \frac{b}{a}\frac{\beta}{(a—b)};\ \cos\varphi = -\frac{a}{b}\frac{\alpha}{(a—b)}$$

et pour le lieu du point Q l'ellipse

$$\frac{\alpha^2}{\frac{b^2}{a^2}(a—b)^2} + \frac{\beta^2}{\frac{a^2}{b^2}(a—b)^2} = 1$$

1re Note relative à un problème de Steiner.

Une conique est inscrite dans un triangle ABC. Soient A′, B′, C′ les points de contact sur les côtés BC, AC, AB. Déterminer le centre M de la conique.

1re solution (fig. 5).

On sait que dans toute conique à centre, le produit sur deux tangentes parallèles, des segments déterminés par une tangente variable quelconque est égal au carré du demi-diamètre de la conique, parallèle aux tangentes fixes.

Menons à notre conique, une tangente parallèle à BC, qui coupe AB et AC respectivement en ß et γ et dont le point de contact soit α.

On a d'après le théorème cité:

$$\text{I} \qquad \alpha\,\beta.\ A'B = \alpha\,\gamma.\ A'C$$

A α coupe BC en A″; on aura: $\alpha\beta$: A″B = $\alpha\,\gamma$: A″C

$$\text{II} \qquad \alpha\,\beta.\ A''C = \alpha\,\gamma.\ A''B$$

De ces deux égalités on déduit: $\frac{A'B}{A'C} = \frac{A''C}{A''B}$

Il en résulte que les points A′ et A″ sont isotomiques sur BC. Le point milieu A_0 de A′A″ est donc aussi le point milieu de BC.

Soit D le point milieu de AA′. La droite DA_0 parallèle à AA″ divisera donc aussi $\alpha A'$ en parties égales. Or $\alpha A'$ est un diamètre de la conique.

Le centre M. point milieu de $\alpha A'$ est donc situé sur DA_0.

Théorème : Une conique est tangente aux trois côtés d'un triangle ABC. aux points A′, B′, C′. Soient A_0 B_0 C_0 les points milieux des côtés. Les trois droites qui joignent les points milieux des droites AA′, BB′, CC′ respectivement aux points A_0 B_0 C_0 se coupent au centre M de la conique.

IIme solution (même figure).

Le pôle de la droite AA_0 doit se trouver sur le rayon conjugué de AA_0 par rapport à AB et AC; or A_0 étant le milieu de BC, ce rayon sera parallèle à BC. Il doit aussi se trouver sur la polaire B′ C′ de A par rapport à la conique. Le point L, où ces deux droites se croisent sera le pôle cherché. A′ L sera donc la polaire de A_0. Soit N le second point d'intersection de A′ L avec la conique, par conséquent, le point de contact de la deuxième tangente menée de A_0 à cette courbe. Les 4 points A′ (AA_0, A′ L), N et L sont harmoniques; comme AL est parallèle à A′ A″, il en résulte que $A' A_0 = A_0 A''$. Le diamètre passant par A_0, doit diviser en parties égales la polaire A′ N de ce point; il est par conséquent parallèle à AA″; il divise donc aussi AA′ en parties égales en D; d'où le théorème.

IIIme solution (fig. 6).

D'après la méthode de Schroeter.

On sait que les paires de tangentes parallèles à une conique donnée, déterminent sur une tangente fixe, une série involutive. Le point de contact sur cette dernière est le centre de l'involution. La réciproque de cette proposition est exacte.

Soit M le centre cherché; menons les droites symétriques de AC et AB par rapport au point M. Ces droites sont tangentes à la conique et si elles rencontrent BC respectivement en γ et β, les paires de points B β et C γ déterminent sur la tangente B C l'involution produite par les paires de tangentes parallèles. Cette involution est donc parfaitement déterminée.

Projetons centralement, du sommet A sur la parallèle b_1, c_1, à BC, (b, milieu de AC) cette involution: On obtient ainsi les deux paires de points c_1, γ_1, et b_1, β_1,. β_1, étant le point milieu de A γ et les deux

droites AC et $\gamma\ \varepsilon$ étant parallèles, on a évidemment pour A_o comme milieu de BC: M β_1, parallèle de $A_o\ c_1$, et M γ_1, parallèle de $A_o\ b_1$,; s intersection de MA_o avec b_1, c_1,

$$\text{Donc: } \frac{s\ b_1}{s\ \gamma'} = \frac{s\ A_o}{s\ M} = \frac{s\ c_1}{s\ \beta_1} \text{ ou: } s\,b.\ s\,\beta, = s\,c_1.\ s\,\gamma_1$$

s est donc le point central de l'involution sur la droite b_1 c_1 et comme elle est parallèle à BC, la projection centrale de s sur BC sera aussi le point central de l'involution sur BC_1 c'est-à-dire le point de contact de cette droite avec la conique. La droite qui joint le point milieu de AA_1 au point milieu de BC passe donc bien par le centre M de la conique.

Note seconde (fig. 7).

Une transversale tourne autour d'un point fixe P et coupe les côtés d'un triangle ABC, BC en A′, AC en B′, et AB en C′. Soient sur le côté BC, A″ le point isotomique de A′; sur AC, B″ l'isotomique de B′ et sur AB, C″ l'isotomique de C′.

A″ B″ C″ est une ligne droite, la transversale réciproque de A′ B′ C′ (nomenclature de Mr. de Longchamps; démonstration évidente par application du théorème de Ménélaüs).

Quelle est l'enveloppe de A″ B″ C″, lorsque A′ B′ C′ tourne autour du point P.?

B et C, A′ et A″ sont les couples d'une involution ponctuelle dont les points doubles sont A_o, le point milieu de BC et le point infini sur BC.

De même A et B, C′ et C″ sont les couples d'une involution centrale dont les points doubles sont C_o et le point ∞ de AB.

Or les ponctuelles A′ et C′ sont perspectives; il en résulte que les ponctuelles A″ et C″ sont homographiques et par conséquent la droite A″ C″ enveloppe une conique tangente aux trois côtés du triangle. Comme il est facile de le voir, le point α isotomique sur BC, du point d'intersection de cette droite avec PA sera le point de contact de BC avec son enveloppe. $A\alpha$ et AP étant conjuguées isotomiques, il en résulte que $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ se croisent en un même point, le *point de Gergonne* de la conique, point réciproque de P.

Il est facile de trouver le centre de la conique enveloppée. On pourrait utiliser le théorème de la note précédente. D'après ce

théorème, le centre M se trouve sur la droite A_0 D qui joint les points milieux de BC et A α. Soit G le centre de gravité du triangle ABC; PG coupe A_0 D en M. Les triangles MGA_0 et GAP étant semblables on a: GP = 2 GM.

M est donc un point fixe de la droite GP, donc les trois transversales telles que A_0 D passent par ce point qui sera le centre de la conique.

M est le complémentaire de P qui est le réciproque du point de Gergonne de la conique.

Si par ex: on fait tourner une transversale autour de l'orthocentre du triangle, les transversales réciproques enveloppent une conique, tangente aux trois côtés du triangle, aux points isotomiques des pieds des hauteurs et dont le centre coïncide avec le centre du cercle circonscrit.

Note troisième.

Dans cette dernière note, nous développerons quelques formules, dont chacune d'elles fournirait un théorème commun aux triangles variables H_a H_b H et A_2 B_2 C_2

Dans tout triangle on a:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}$$

$$r = p \operatorname{tg}\frac{A}{2} . \operatorname{tg}\frac{B}{2} . \operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

$$R = \frac{p}{4 \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}}$$

$$\text{donc } \frac{r}{R} = 4 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}$$

et par conséquent:

Formule 1: $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$

Donc dans chacun des triangles variables H_a H_b H_c et A_2 B_2 C_2 la somme des cosinus de leurs angles reste toujours constante. Dans ce qui suit, nous ne ferons plus que citer la formule.

Comme $1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2}$

$$\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} = \frac{1}{2}\left[3 + \cos A + \cos B + \cos C\right]$$

Formule 2: $\sum \cos^2 \frac{A}{2} = 2 + \frac{r}{2R}$

$$\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = \sum (1 - \cos^2 \frac{A}{2})$$

$$= 3 - \sum \cos^2 \frac{A}{2}$$

Formule 3: $\sum \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \frac{r}{2R}$

Formule 4: $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$

$$\frac{abc}{2p} = \frac{4RS}{2p} = 2R\frac{S}{p}$$

donc:

Formule 5: $\frac{abc}{2p} = 2Rr$

La perpendiculaire abaissée du centre O du cercle circonscrit a pour valeur $x = R \cos A$.

$$\Sigma x = R \Sigma \cos A$$

Formule 6: $\Sigma x = R + r$ (formule de Carnot)

$$a \operatorname{ctg} A + b \operatorname{ctg} B + c \operatorname{ctg} C = \Sigma 2R \sin A . \frac{\cos A}{\sin A}$$

Formule 7: $\Sigma a \operatorname{ctg} A = 2(R + r)$

Soit H l'orthocentre; on sait que $AH = 2x$

Formule 8: $AH + BH + CH = 2(x + y + z) = 2(R + r)$

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{p}{S}$$

Formule 9: $\frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} = \frac{1}{r}$

Formule 10: $r' + r'' + r''' = 4R + r$

Formule 11: $\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''} = \frac{1}{r}$

On a comme conséquence d'une formule d'Euler

$$\overline{OI'}^2 + \overline{OJ''}^2 \overline{OJ'''}^2 = \Sigma (R^2 + 2\,Rr')$$
$$= 3\,R^2 + 2\,R\,(r' + r'' + r''')$$
$$= 3\,R^2 + 2\,R\,(4\,R + r)$$

Formule 12: $\overline{OJ'}^2 + \overline{OJ''}^2 + \overline{OJ'''}^2 = 11\,R^2\,2 + Rr$

Comme $\overline{AJ}^2 = \frac{p-a}{p}\,b\,c$

$$\overline{AJ}^2 . \overline{BJ}^2 . \overline{CJ}^2 = \frac{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{p^4}\,a^2b^2c^2 = \frac{S^2}{p^4}\,a^2\,b^2\,c^2$$

$$\overline{AJ} . \overline{BJ} . CJ = \frac{S}{p^2}\,a\,b\,c = \frac{4\,R\,S^2}{p^2}$$

Formule 13: $\overline{AJ}.\ \overline{BJ}.\ \overline{CJ} = 4\,R\,r^2.$

$AJ' = \frac{p}{\cos\frac{A}{2}}$; $AJ = \frac{p-a}{\cos\frac{A}{2}}$; donc $JJ' = \frac{a}{\cos\frac{A}{2}}$

$JJ'.\ JJ''.\ JJ''' + \frac{a\,b\,c}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$ d'où

Formule 14: $JJ'.\ JJ''.\ JJ''' = 16\,R^2.\ r$

$$\overline{JJ'}^2 + J'\overline{J'''}^2 = 16\,R^2$$

Formule 15: $\overline{JJ''}^2 + J'\overline{J'''}^2 = 16\,R^2$

$$\overline{JJ'''}^2 + \overline{J'J''}^2 = 16\,R^2$$

Ces formules dérivent immédiatement des formules connues $\overline{AH}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{4\,R}^2$, le rayon de la circonférence circonscrite au triangle J' J'' J''' étant égal à 2 R.

On trouve aisément aussi $J''\,J''' = 4\,R\cos\frac{A}{2}$

$$\overline{JJ'}^2 + \overline{JJ''}^2 + \overline{JJ'''}^2 = 48\,R^2 - 16\,R^2\left[\cos^2\tfrac{A}{2} + \cos^2\tfrac{B}{2} + \cos^2\tfrac{C}{2}\right]$$

Formule 16: $\overline{JJ'}^2 + \overline{JJ''}^2 + \overline{JJ'''}^2 = 16\,R^2 - 8\,Rr$

Formule 17: $J''\overline{J'''}^2 + J'\overline{J''}^2 + \overline{J'J'''}^2 = 32\,R^2 + 8\,Rr.$

Porrentruy ce 1er Août 1900.

Figure 1.

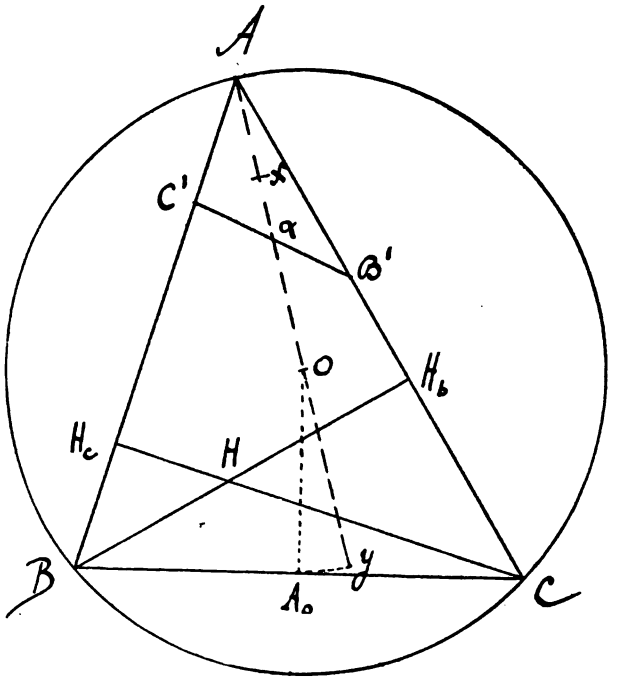


Figure 2.

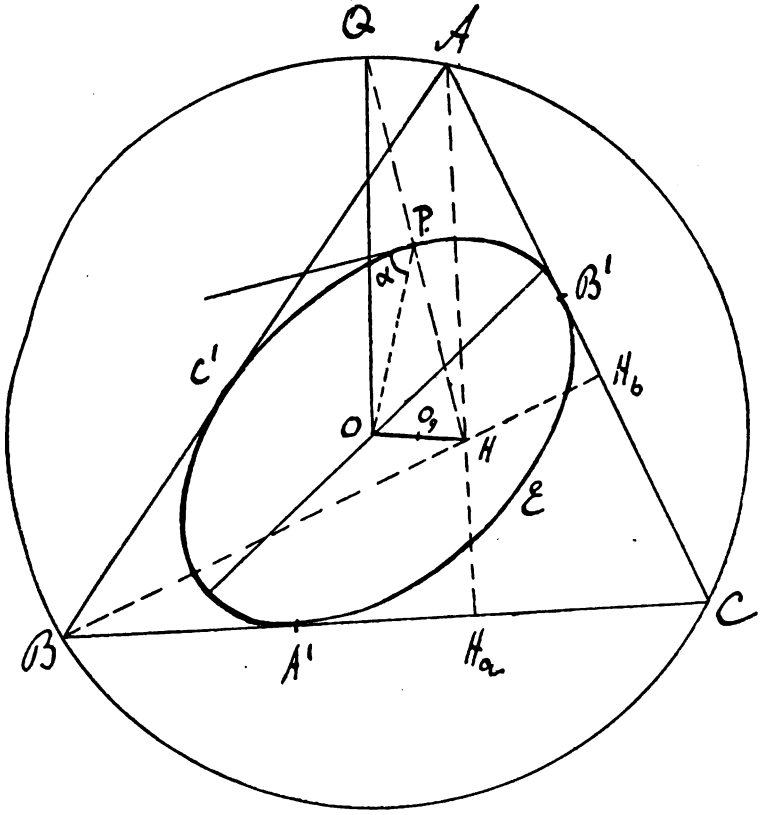
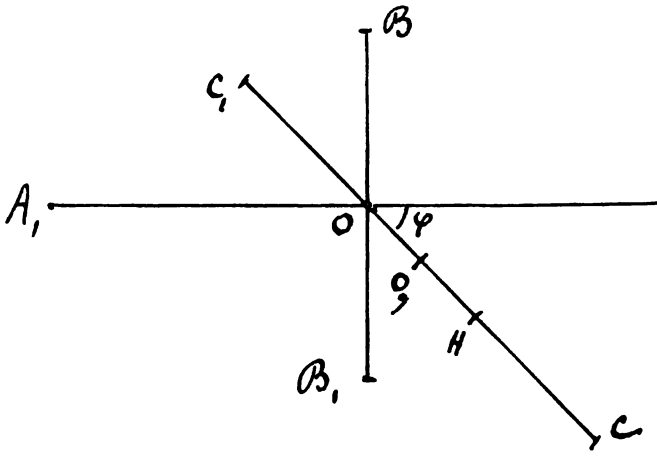
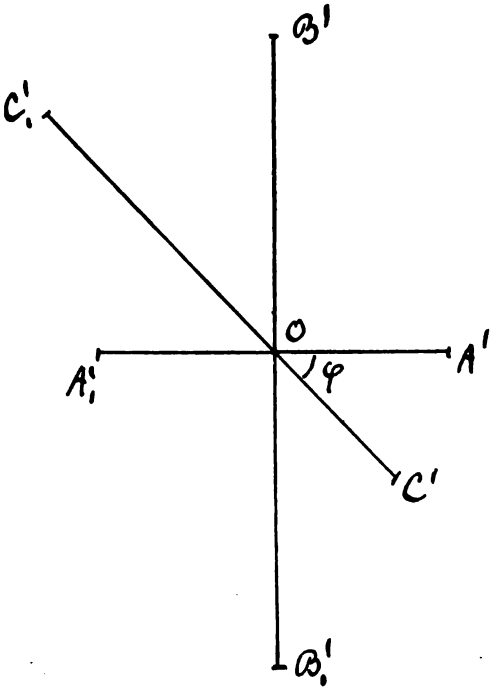


Figure 3a.



(3')

Figure 3b.



(3")

Figure 4.

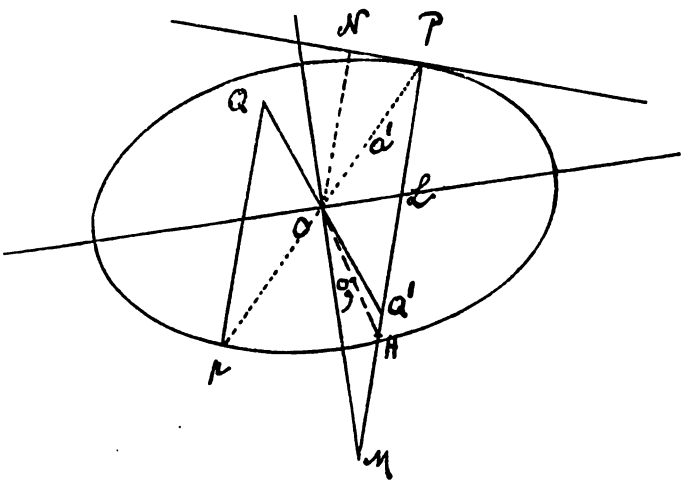


Figure 5.

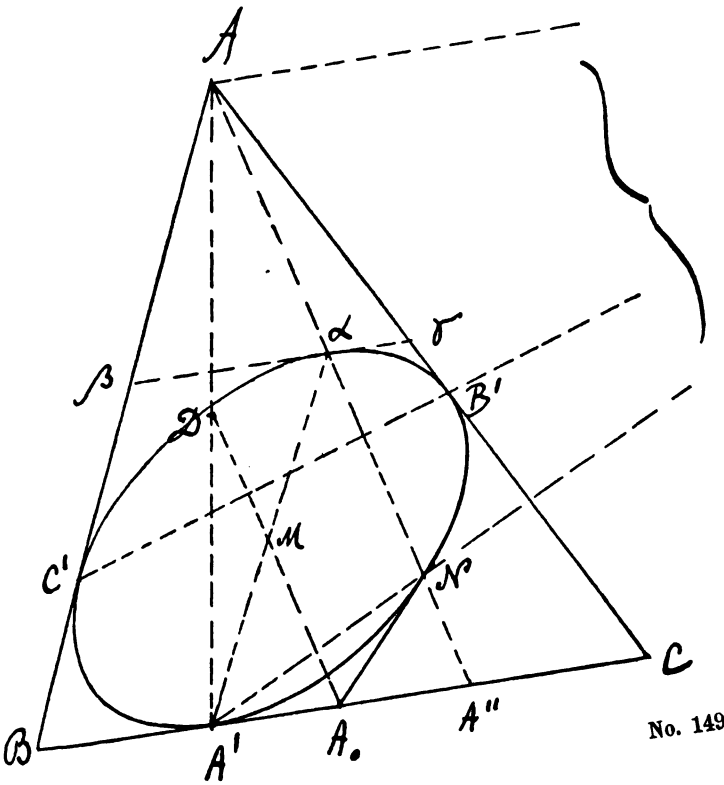


Figure 6.

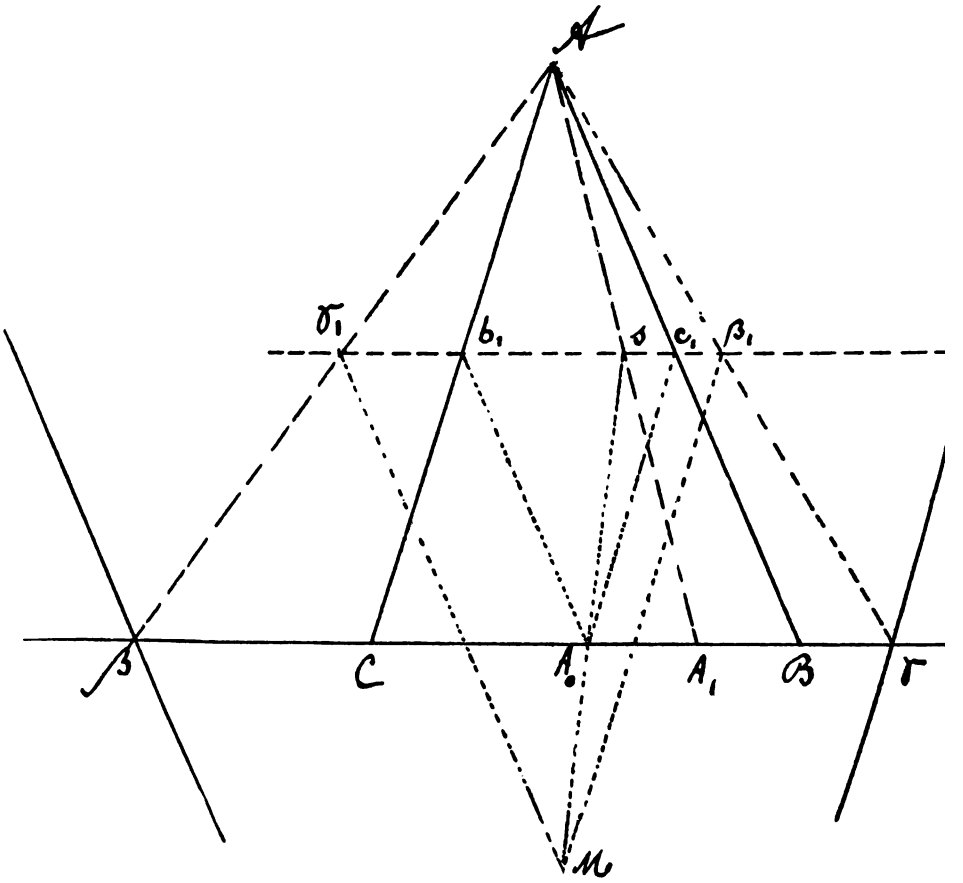
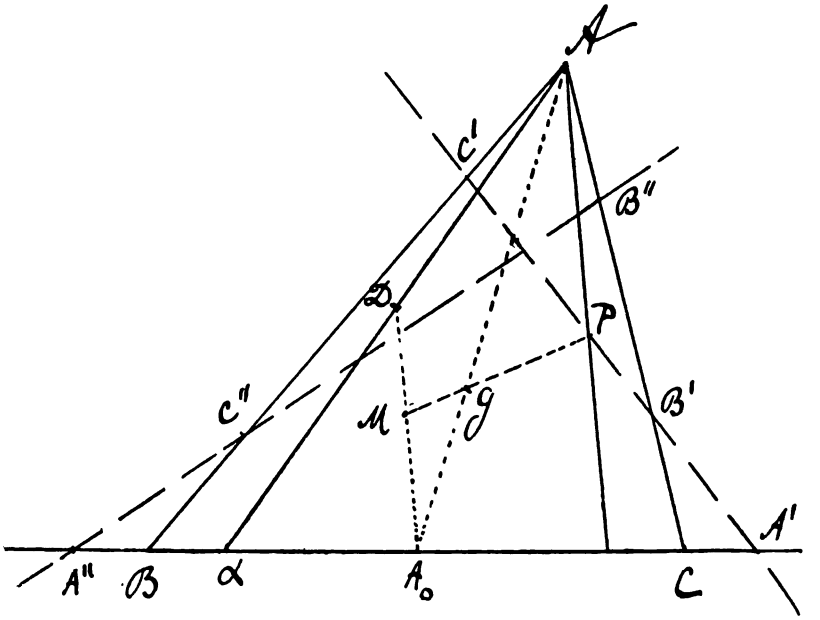


Figure 7.



J. H. Graf.

Notizen

zur

Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften in der Schweiz.

No. 56. L'Auteur a page 12 cite lexperience de Fahrenheit sur leau bouillante savoir quelle depend pour son degré de chaleur du poids de l'atmosphere et il estime à peu près le point necessaire à fixer du barometre au terme de 27 ponces 9 lignes mesure du Paris, coe je lai fixé car je crois que ces 27 pouces 9 lignes equivalent à 30 pouces Anglois. Mr. *le Monnier*[1]) se donne ici à connoitre pour le traducteur, puisquil cite au bas dans la note une experience par lui deja raportée dans un autre livre Anglois par lui traduit et ou est son nom. ce livre contient la table de Mr. Newton relative à son therm^{e}, lauteur est un professeur de Cambridge, je passe à present au second chap. pag. 51 ou il est parlé de deux therm^{es} de Florence d'un grand et d'un petit et supposé le terme de la glace ou neige fondante au grand au 20e degré et au petit a 13$^{1}/_{2}$ et ensuite le terme superieur du soleil ou visceres d'animaux à 80 au grand et 40 au petit et l'on conclut dela que les observations faites avec des therm^{es} de Florence reguliers et bien construits peuvent servir.

Mais en lisant les actes de l'academie de Florence intitulé *Tentamina* etc. on y voit que la regularité de la construction de ces instruments dependoit de l'habilité du souffleur qui savoit souffler disent ils une boule proportionelle pour sa contenance à la capacité du tuiau, croiez vous cela possible Mr. je n'en crois rien, d'ailleurs si vous remplissez le therm^{e} avec de l'esprit de vin teint avec de la cochenille qui fait la boule orangée ou teint avec de l'orcanette qui

[1]) *Le Monnier*, Pierre Charles, Prof. der Physik am Collège de France, Astronom der Marine, 1756 Theilnehmer an der lappländischen Gradmessung, geb. 23. Nov. 1715 in Paris, † 2. April 1799 in Héril.

la fait noire, le therm^e^ d'orcanette montera beaucoup plus haut au soleil que non pas l'autre, la forme encore de la boule peut procurer à cet egard beaucoup de difference de meme que le bois ou le therm^e^ se trouve enchassé, ainsy ces therm^es^ reglez au soleil ne seront pas d'accord entr'eux à l'ombre, et qui peut repondre d'ailleurs que ces experiences des visceres soient egales à celles du soleil, si elles n'ont pas eté faites avec les memes instrumens. Ainsy jai negligé dans mes observations la relation des No. 2 et 3 de ces deux therm^es^ de Florence pareillement le No. 4 de Paris; pour le 5 je l'ai raporté en correspondance sur plusieurs therm^es^ pareillement le 6 *d'Amontons*[1]) et il sera bien raporté si ce qu'il dit est vray que la marche de lair est egale à celle de lesprit de vin. le No. 7 est la meme chose que le No. 6, le No. 9 que jai raporté est à peu pres la meme que 10. Jai raporté ainsy dans plusieurs le No. 11 que j'ai rectifié d'apres d'autres observations, jai ainsy raporté No. 12 sur mes planches gravées, No. 13 sur plusieurs therm^es^ No. 14 que jai bien rectifié et No. 15 je l'ai abandonné. Or en tout cela Monsieur il y a beaucoup d'erreur car les therm^es^ de Mr. de *Reaumur* n'ont pas la meme marche que les autres dans les degrez de froid, ceux de Mercure s'accorderont avec ceux d'esprit de vin en deux therm^es^ savoir à l'eau bouillante entierement plongez, et au therme de l'eau dans la glace, et differentieront beaucoup dans les termes intermediaires et bien d'avantage encore dans les grandes degrez de froid. Le thermometre de Mr. *Newton* a une marche qui approche celle de Mercure, mais qui en differe cependant sensiblement, et pour ce qui est de celui de Mrs. *Amontons* et *Poleni*[2]) ... je ne pus pas poursuivre à Bale mes experiences sur les therm^es^ à air tels que je les ai fait d'abord, je ne saurois rien dire de positif sur leur marche si ce n'est que je m'en suis raporté au 1er, je suis bien etonné qu'aiant donné à Mr. le Monnier un excellent parallele de mercure et d'esprit de vin, cheminant jusqu'à l'eau bouill^e^ et jusqu'aux plus grands froids et encore un therm^e^ d'esprit de vin sur ma planche gravée, il ait fait abstraction dans les notes de cette difference si capitale des marches dont je me suis si souvent entretenu avec lui car il n'en sauroit pretexter cause

---

[1]) *d'Amontons Guillaume*, geb. 31. VIII. 1663 zu Paris, † 11. X. 1705 in Paris, Mitglied der Akademie der Wissenschaften.

[2]) *Poleni Giovanni*, geb. 23. VIII. 1683 in Venedig, † 14. XI. 1761 in Padua, Marchese, Prof. der Astronomie, der Philosophie und Mathematik zu Padua.

d'ignorance aiant de moi non seulement ce parallele mais encore ma planche gravée ou sont ces therm^{es} de *Newton, Delisle, Fahrenheit* et *Reaumur* en correspondance avec le mien. Or ces correspondances toutes differentes de celles de la table de Docteur *Martine* et justifiées par mon parallele et par mon imprimé de 1741 dont je lui ai aussy remis un exemplaire, renversent totalement le sisteme de cette table de façon que je suis grandement etonné qu'il avance dans sa préface à la page 10 parlant de cette table ces paroles suivantes:

Cette table de camparaison est la plus exacte qu'on ait faite jusquici (1751) c'est le jugement qu'en porte Mr. de Mairan[1]) *qui l'a verifiée avec les thermometres de Mr. de* Reaumur, Amontons, Hawksbee[2]) *et* Fahrenheit, *et tout le monde sait de quel poids est une pareille decision. Cette meme table peut tenir lieu d'un Thermometre universel, dont la pluspart des Physiciens ont reconnu les avantages sans avoir cherché à les procurer.*

Je suis porté à croire en lisant cela, que j'ai quelque ami à Paris qui s'entend avec Mr. *le Monnier* pour le refuter et pour attaquer de cette facon Mrs. *de Reaumur* et *de Mairan* et ce pourroit bien etre un ou deux Peres chartreux nos amis communs; si cela est on aura soin sans doute à Paris de faire parvenir la brochure a la personne à la quelle on a adressé le livre sur lequel je fais ces remarques, le tems eclaircira cette conjecture.

Jai encore oublié de vous raporter une remarque sur la matiere precedente. C'est que le Docteur *Martine*[3]) ne supposoit pas plonger dans l'eau bouillante tous les therm^{es} de la table pour les comparer, et quoique aucun ne l'ait fait avant moi, il le faut cependant ainsy supposer et pour cet effet ajouter l'excez, afin de pouvoir faire les comparaisons, car si vous ne supposez pas plongée toute la liqueur du therm desprit de vin dans l'eau bouillante, il manquera dans ce terme pres de dix de mes degrez de moins qui en valent environ 16 de Fahrenheit, au lieu qu'en ne plongeant pas non plus de meme Fahrenheit cela ne faira qu'un excez de deux, et c'est pourquoi jai

---

[1]) *Mairan, Jean Jacques d'Ortous de*, geb. 26. XI. 1678 in Béziers, † 1771 20. II. zu Paris, Sekretär der Akademie der Wissenschaften zu Paris.

[2]) *Hawksbee, Francis*, 1713 gestorben, Mitglied der Royal Society.

[3]) *Martine*, ein schottländischer Schiffsarzt, promovirte in St. Andrews, geb. 1702, † 1743, schrieb «Essai sur la construction et la comparaison des thermomètres» und andere Arbeiten über die Wärme.

supposé l'eau bouille à Fahrenheit à 214 et averti que le zero de Mr *de Lisle* repondoit à 97 degrez 7½ de mon therme. Or j'ai tenu compte de toutes ces corrections qu'il faut necessairement faire pour avoir la correspondance juste, autrement cela n'est pas possible.

Personne avant moi ne s'est avisé de graduer les thermes de 5 en 5 avec des soies sur les tuiaux, de les tenir entierement plongez dans l'eau lorsqu'on les eprouve de 5 en 5 degrez jusqu'a l'eau bouille et de faire faire une machine de fer blanc qui pivote et tourne dans l'eau avec les thermes et d'avoir une multitude de petits lampions pour donner sous cette machine le degré de feu convenable, c'est pourtant ce qu'il faloit faire afin de reconnoitre les diverses marches des liqueurs, pour pouvoir marquer leur comparaison et c'est ce que jai fait non sans beaucoup de peine et beaucoup de travail jusqu'au point de fixer les minutes, secondes et tierces de degrez dernierement. Je passe à la dissertation sur l'echauffement et le refroidissement des corps, et comme jai presque rien travaillé sur cette matière, car j'apelle ne rien travailler lorsqu'on ne fait pas toutes les experiences qu'il faut faire pour bien approfondir un sujet cela fait que je ne vous dirai pas la dessus des choses bien curieuses, n'y interessantes. Mr. le Professeur *Bernoulli* m'a souvent sollicité à Bale d'y travailler mais j'ai toujours renvoié parceque je voulois voir auparavant comment il fait les thermes à air, qui regagnoient si vite leur equilibre à un demi degré près et que tardoient ensuite plusieurs heures avant que d'acquerir ce dernier point d'equilibre lorsqu'ils avoient passé une nuit au dehors de la chambre.

Mr. *Martine* a raison de refuter Mr. *Boerhave* et nombre d'autres sur le principe *que les corps emploient à s'echauffer et à se reffroidir, des tems proportionels a leurs densitez* et la reflexion quil propose la dessus art. 18 pag. 95 de la presomtion de l'esprit humain à prononcer trop rapidement sur semblable hose, n'est certainement pas un exemple des plus frapans de cette presomtion, car j'en pourrois citer un nombre excessif de plus forts dans des memoires meme d'Academie.

Le procedé à tenir pour faire les experiences convenables à cet egard sur la matiere des liquides est de regler les thermes comme je l'ai dit avec des soies de 5 en 5 degrez sur le verre et les suspendre en plein air eloignez les uns des autres dans une chambre fermée il faut que leurs boules et leurs tuiaux soient egaux en capacité, mais pour faire des pareils thermometres, il faut avoir comme moi un

magazin de 600 boules de toutes grosseurs et dont la capacité soit exactement reconnüe, de meme que des tuiaux d'un calibre egal. Or tout cela exige un tems tres long, et des attentions tres grandes, pour former ce magazin, et qui que ce soit à Paris n'y à Bale n'a voulu la dessus m'imiter, ainsy il ne faut pas etre surpris du retardement des progrez des decouvertes, car elles exigent beaucoup de peine, et le Docteur *Martine* en convient lui meme à pag. 113, lorsqu'il dit que cette doctrine de l'echauffement et du refroidissement des corps pourroit etre poussée beaucoup plus loins, et quil en laissoit le soin a ceux qui seroient en situation pour cela. Or il est certain qu'ici je ne le suis pas, puisque j'y suis logé comme un chien, et de plus dans un souterrain tres mal sain, ou je suis tres souvent attaquée par des oppressions de poitrine, ou je n'ai dailleurs pas la liberté de pouvoir me plaindre. Je passe au chapitre suivant qui traite des differens degrez de chaleur des corps.

Cette matiere il faut l'avouer est de la derniere utilité pour la medecine, mais tant que vous ne supposerez que la matiere ignée pour determiner l'action de la chaleur et l'action du froid comme le fait ici Mr. *Martine* et tant d'autres. Vous vous egarerez etrangement car vous batirez un edifice en lair pour ainsy dire, que vous ne pourrez plus elever solidement ensuite. En general on ne peut guere compter sur les observations faites jusqu'a present avec les therm^{es} de Mr. de *Réaumur* ainsy qu'il est demontré dans ma reponse à l'Abé *Nolet*, dont je vous prie Mr. de m'envoier ici une copie, que je prie de faire faire par un copiste et Mr. *Louvis* de le paier, car j'omets ici de parler de bien d'autres articles, puisqu'on trouve l'eclaircissement dans cette reponse.

Je dis donc Monsieur qu'il me paroit vraisemblable que la matière ignée est de 3 espèces, savoir la bleüe, la jaune et la rouge puisqu'on la peut separer au moien d'un prisme, et qu'etant une fois separée elle passe à travers un autre prisme d'un chalumeau et en conservant sa nature, et qu'il me paroit aussy vraisemblable que la matière du froid est de 3 espèces, savoir la première qui forme le froid commun depuis le plus grand chaud qu'il tempère jusqu'au terme de l'eau dans la glace, la seconde qui est plus grossière et qui sert à former la glace, et la 3e à produire dans le nord ces froids excessifs. Quant à ce que le froid soit une matière c'est ce qui se peut prouver mais à l'egard des 3 matières que je vous propose ici ce n'est qu'une

hypothèse. Je crois encore que le createur a pourvu la Terre de la quantité suffisante de l'une et de l'autre de ces deux genres de matières et que leur parfait equilibre est ce qui constitue le Tempéré universel de Globe de la Terre a formé de la figure de ce globe que vous avez de moi, ou vous voiez qu'on doit rencontrer à environ 100 pieds sous terre, par tout ou il n'y a pas des fermentations chaudes ou froides le terme moien fixe et invariable de la temperature du climat plus chaud dans les pais chauds et plus froid dans les pais froids, et que dans les climats temperez en egard à l'elevation du terrain au dessus de la mer et à l'elevation du pole et à la nature du terroir et à son exposition, vous devez rencontrer à cette profondeur le temperé universel, et ce meme terme partout ailleurs en s'approfondissant davantage à mesure qu'on s'approche des climats chauds et des climats froids et cela partout ou il n'y a pas de fermentations chaudes ou froides, jusqu'au centre de la terre, dont j'exclus le pretendu feu central par des raisonemens et par des experiences quil n'y a pas lieu de raporter ici parceque Mr. *Martine* ne le suppose pas.

Je ne le suivrai pas dans ses recherches sur les chaleurs celestes et planetaires par qu'elles me paroissent trop au dessus de la sphere de mon genie pour y pouvoir atteindre, et je me contenterai de dire à cet egard *qua supra nos nihil ad nos* et par raport à tout ce qu'il dit sur la chaleur des divers animaux je le trouve tres curieux, mais n'aiant fait la dessus des experiences je ne puis dire autre chose *qu'amen* et quant à ce qu'il dit des liqueurs qui se gelent, j'avance ici que j'avois fait à Paris deux therm^{es} d'excellent vin de palme de Canarie divisez de 5 en 5 par des soies, et que je les ai tenu plusieurs fois à Paris dans des congelations forcées avec diverses sortes de sels, que ce *non plus ultra* de leur condensation etoit dix degrez sous le Temperé et qu'ils aqueroient ce terme à environ 20 degrez de froid, qu'etant poussez ensuite jusqu'a 29 degrez $^1/_4$ de froid de ma graduation dans la congelation forcée du sel marin et y etant restez au moins deux heures, ils n'ont pas branlé et n'ont point gelé: d'on je conclus qu'ils etoient bien eloignez de geler, car l'eau qui gele a cela de propre qu'elle se condense jusqu'au *non plus ultra* dans le terme de froid de l'eau dans la glace: Ensuite elle s'enfle considerablement avant que de se reffroidir jusqua 14 degrez comme cela s'observe au therm d'eau colorée et d'abord que la glace s'y forme ce qui s'execute c$\overline{oe}$ une etincelle qui allume du bois bien sec tout

le froid qui avoit fait enfler l'eau la quitte et se rend à la circonference où il forme la glace, et celui du therme^{e} d'eau part aussy et va joindre cette glace, d'où je conclus qu'il faut que tout liquide qui doit geler commence à s'enfler préalablement et que longtems auparavant il cesse à se condenser uniformement. Or le vin de Canarie etoit arrivé au *non plus ultra* de sa condensation longtems auparavant et cependant ne s'est point enflé et n'a point gelé, donc l'esprit de vin pur ne sauroit gelé à 100 degrez de froid, car l'eau a cela de propre que depuis l'eau bouillante jusqu'au 50e degrez au dessous ou environ, elle se condense toujours uniformement et suit exactement le therm^{e} d'esprit de vin, ensuite elle commence à resister à la condensation à mesure toujours davantage qu'elle approche du *non plus ultra:* depuis le temperé jusqu'a l'eau dans la glace sa condensation, n'est gueres que de deux degrez, son renflement ensuite en fort considerable, donc l'esprit de vin pour geler doit cesser de se condenser uniformement aumoins soixante au quatre vingt degrez au dessous de ce commencement et resister ensuite encore longtems après avant que de s'enfler et de geler par consequent. Or j'ai eprouvé qu'il se condensait toujours uniformement avec le mercure jusqu'au 30e degré de froid; il est vray que pour l'eclaircissement de cette question il faudroit pousser plus loin l'experience, mais on n'oppose à mon sentiment que de fausses experiences, ainsy j'apelle à des veritables et je croirois gager à coup sur en gageant que qui que ce soit ne fera geler l'esprit de vin carachterisé comme je l'ai dit.

Ce qui fait geler sont des petits dards de froid qui percent et qui enchainent des globules de leau et ces globules ont des germes qui s'attirent les uns et les autres et bien plus fortement lorsqu'ils sont crevez de facon qu'ils se font ainsy tout crever successivement coe une trainée de poudre et il paroit que ces dards de froid ont une tres grande analogie avec ces germes et peut etre meme en tout coe un etui formé par la nature s'ils ne sont pas ces germes. Il faut donc de l'eau pour former de la glace et là ou il n'y a point d'eau le fluide n'en est pas susceptible et peut etre qu'il n'y en a point dans le bon vin de palme, je ne vois point d'ailleurs d'apparence qu'il y en ait dans l'esprit de vin pur qui enflame la poudre et nonobstance tout ce que dit Mr. *Geoffroy*[1]) sur le compte de son Aether qu'il entrait de l'esprit

[1]) *Geoffroy* Etienne François, genannt der Ältere, geb. 13. II. 1672 in Paris, † 6. I. 1731 in Paris, Professor der Pharmacie und Medizin am Collège de France.

de vin, coe si ce qu'il en separe etoit de l'eau, il n'y auroit pour eclaircir ce fait qu'à prendre de l'aether et y remettre la pretendue quantité d'eau extraite et voir s'il allumeroit alors la poudre. je gage quil ne l'allumera point. Donc ce n'est pas de l'eau qu'il aura tiré de l'esprit de vin pur qui enflame la poudre.

Je ne dirai rien sur l'article qui suit à l'egard des metaux si ce n'est que j'ai vue methode laquelle je crois vous avoir communiquée pour en faire des thermometres elle est du moins dans un memoire qu'a de moi le Docteur *Zelmater*. Et pour ce qui concerne le terme du mercure bouillant il y a une erreur de près de 70 degrez dans les observations de Mr. *Muschembrock* et *Fahrenheit* à cet egard, mais n'aiant pas ici ces papiers je n'en dirai pas davantage sur ce sujet. je passe au Chap^{e} suivant sur la generation de la chaleur des animaux. —

Cette matiere est plutost du ressort de Mrs. les Docteurs en Medecine que d'un homme tel que moi, ainsy je me bornerai par dire à cet egard que je conviens avec Mr. *Martine* que la chaleur animale est produite par le frotement des globules du sang dans les vaisseaux capillaires mais qu'il me paroit que ce n'est pas la cause primitifve de la quelle il sagit pour cette chaleur et qu'il faut l'attribuer aux contractions fortes et frequentes du cœur, et ces contractions a des fermentations ou effervescences qui se font dans l'estomach. Cependant je raisonne à peu pres de cela coe un aveugle sur les couleurs et je m'apercois que plus je m'approche de la fin du livre et moins je me trouve en etat d'en pouvoir raisonner. C'est pourquoi je me tairai entierement sur le reste et finis ces remarques par les assurances qu'on ne peut etre plus parfaitement que j'ai l'honneur de me dire Monsieur

Votre tres humble et tres obeissant serviteur

Micheli du Crest.

A Monsieur Baviere l'ainé à Basle. pag. 5.

Reponse au Memoire intitulé: «Maniere de construire une Echelle de Barometre etc.»

L'auteur de ce memoire me paroit penser tres juste lors qu'il prefere ainsy qu'il le fait d'entrée le barometre simple à tous les autres, mais on estime qu'il y a lieu d'ajouter à cela qu'il en faut fixer le calibre interieur à une mesure certaine et commode attendu que le mercure se tient plus haut et de plusieures lignes dans un tuiau d'une

ligne et demi que dans un tuiau de demi ligne, d'où il suit qu'il faut determiner ce calibre à une ligne et demi attendu qu'au dessus il est incommode pour le transport.

2° il faut supposer encore le tuiau d'un calibre egal et parfaitement lisse interieurement pour sa perfection que le mercure dont on le remplira sera parfaitement purifié, le tuiau avant tout, purgé de toute humidité, et ensuite purgé d'air sur le feu, lorsqu'on y aura mis un pied de mercure puis deux pieds, puis ce qu'il faudra pour l'achever.

3° l'on estime qu'il faut en diviser la graduation par pieds, pouces et lignes de Paris, attendu que c'est la mesure la plus universellement recüe et que d'abord qu'on estime devoir s'exprimer en français pour se faire entendre plus commodement des diverses nations qui habitent le nord, il s'ensuit par la meme raison que l'on doit adopter les poids et les mesures de la capitale de la meme langue.

4° au lieu de mettre au dessus de la boule inferieure du tuiau une vis ainsy qu'il est dit à la fin du memoire, il me paroit plus convenable de placer cette vis sous le coude inferieur du barometre et meme sous une espece de genou en forme d'arc mobile pour soutenir ce coude en le faisant ainsy hausser ou baisser avec cette vis.

5° Quoiqu'on puisse tres bien connoitre la question de l'air en fesant mouvoir l'échelle mobile dont le dessein se trouve à la fin du memoire puisque l'on defalque ou l'on ajoute ainsy à la colonne de mercure du barometre l'excez que le chaud ou le froid lui procurent de cote ou d'autre cela neantmoins se peut aussy excuter au moien d'une table, mais peut etre moins commodement, c'est pourquoi pour aider à cette ingenieuse invention j'estime devoir ajouter.

6° Qu'il me paroit qu'il n'y a aucun fonds à faire sur les experiences ces raportées au Memoire de l'academie de Mrs. *Amontons* et *de Reaumur* à moins qu'on ne les ait verifiées soimeme avec soin, avec peine et avec sagacité, car j'y en trouve quantité d'erreurs. On ne sauroit faire une experience plus exacte que celle que j'ai faite à Paris pour connoitre la condensation du mercure depuis le terme de l'eau bouillante le barometre susdit à 27 pouces 9 lignes, et tout le mercure plongé dans l'eau bouillante, car j'ai reiteré deux années apres la meme experience dans le meme instrument et elle s'est trouvée entierement conforme à la precedente au lieu que dans quantité d'autres instrumens où j'ai fait la meme experience j'ai trouvé qu'elle varioit suivant la grandeur de la surface de la boule par raport

à sa contenance quoique toujours le meme dans le meme instrument, qu'ainsy mon temperé tel qu'il est sur mes thermom^{es} à mon dit instrument composé de dix mille grains de mercure et divisé par 10 mille degrez se trouvoit toujours à 137 degrez $^1/_2$, dans les tems qu'aux autres qui avoient la boule beaucoup plus petite et divisez de meme ce terme de condensation etoit à l'un a 135 à l'autre a 134, à l'autre à 133 suivant que la boule diminue en capacité. Or il est aisé de trouver mon dit temperé, en y ajoutant le nombre de degrez qui se trouvent au thermometre de Mr. *Delisle* depuis le terme de l'eau dans la glace jusques audit terme.

Nota bene que mon dit thermometre de Mr. *de lisle* est cõe je le suppose avec une boule de dix mille grains de mercure poids de Paris et celui de Fahrenheit de meme et que j'ai baissé le terme de l'eau bouillante à l'un et à l'autre en vertu des raisons raportées dans mon imprimé, ce qui fait que sur votre planche le temperé de Mr. *de Lisle* n'est qu'à 135.

7° Ce terme du temperé etant le terme mitoien du chaud et du froid de toute la Terre, est le veritable terme où l'on doit fixer le terme moien de la hausse ou de la baisse du mercure du barometre par le chaud ou froid, car l'objection qu'on peut faire que le terme du 13e degré du therm^e de Mr. *de Reaumur* est plus maniable, n'est pas une objection, puisqu'il n'est pas necessaire de porter la main aux instrumens pour les observer et qu'au contraire en ce cas il ne faut point les manier du tout et les ternir meme dans de l'eau temperée, dans un lieu temperé, pour les pouvoir alors observer si l'on veut bien exactement; il y a donc lieu suivant mon avis, de fonder le calcul de l'echelle sur le terme du temperé, et d'en diviser la hausse ou baisse, dessus ou dessous, suivant un thermometre de mercure qu'on divisera en autant de degrez qu'on voudra depuis le Temperé au dessus et depuis le Temperé au dessous en placeant zero au dit Temperé et deposant l'instrument à coté du barometre comme il est marqué au memoire.

8° Car si l'on vouloit se servir pour un tel effet d'un bon thermometre d'esprit de vin pur (puisque celui de Mr. *de Reaumur* ne vaut rien pour les degrez de froid) on auroit alors une marche toute differente, qu'on pourroit cependant combiner avec celle du mercure du barometre pour la faire rencontrer dans les excez de chaud et de froid, mais cela causeroit alors assez d'embarras et de peine

pour faire exactement les divisions c'est pourquoi je prefere *ad hoc* les Thermometres de Mercure.

Voila Monsieur ce que j'ai crû devoir vous dire en vous renvoiant le memoire ci joint, vous m'obligerez fort d'ailleurs de m'expliquer si c'est sur le pied de Roy de Paris que sont fondées les observations barometriques de Berlin, car si c'etoit sur le pied de Roy il se trouveroit que le terme moien de ce barometre seroit à 28 pouces 4 lignes et $^1/_2$ et par consequence encore bien plus haut au bord de la mer, d'où il s'ensuivroit que sous l'Equateur il y auroit alors une assez grande difference avec les observations du Perou, pour accuser les observateurs de negligence soit dans l'observation soit dans la comparaison qu'ils ont faite de leurs instrumens. Car ils ont trouvé que le terme moien du barometre y etoit au bord de la mer à peu pres à 28 pouces et supposé encore que par tout ailleurs il etoit de meme. Or c'est ce que j'aurois grande envie de bien s'avoir car si l'observation du barometre est juste à 28 pouces je tiens la terre spherique et non pas applatie du coté des poles, puisque la pesanteur de l'air y seroit egale partout, et par consequent, ce me semble, les lieux d'observation egalement eloignez du centre de la Terre. Or si les lieux d'observation au bord de la mer sont egalement eloignez ou distans du centre de la Terre, soit sous l'equateur soit sous le cercle polaire, il s'ensuit clairement de la que la Terre est parfaitement spherique.

Il ne s'agit donc ici que de justifier ma consequence precedante de la pesanteur de l'air et je le fais en supposant que l'extremité perpendiculaire de toute la hauteur de l'athmosphere de l'air est egalement haute sous le cercle polaire que sous l'equateur, à meme degré de chaleur ou de froid, cette difference devroit exhausser par le chaud la meme colonne plus sous l'equateur qu'au cercle polaire, mais qu'apparemment il y fait par tout dans le haut de cet Athmosphere egalement froid et ainsy la colonne d'air doit suivre exactement la meme curvité dans sa superficie que les eaux de mers dans la leur.

Je n'ignore pas qu'on m'objectera contre cette experience celle du pendule qui prouve, dit on, que la pesanteur n'est pas la meme sous le cercle polaire que sous l'Equateur et quelle est moindre sous l'equateur, mais l'experience du barometre me paroit la contrequarrer vigoureusement. Ainsy c'est du moins un procez fort litigieux qu'une telle affaire car l'academie des sciences de Paris paroit persister dans

la sphericité ainsy qu'il est clair à la page 193 de la connoissance des tems où elle determine la mesure des degrez de l'altitude et cela prouve assez que l'experience du Pendule, non plus que les diverses mensurations du Perou, de Tornea et de France ne l'ont pas convaincüe et par conseq^e^ que cet argument du barometre est d'un bien grand poids.

Je desirerois au sur plus Monsieur d'avoir un calcul de mille en mille toises de distance jusques à 100 mille toises de Paris qui determinera la difference d'une tangente de niveau sur la mer savoir de combien de pieds s'abaisse au dessous la courbe spherique du niveau naturel à 1000 toises puis à 2000, puis à 3000 et successivement jusqu'à 100,000. Mr. *Picard* a fait ce calcul dans un petit traité qu'il a fait du nivellement, d'autres l'auront fait sans doute de meme, ainsy je vous serais obligé Mr. de la peine de cette copie.

J'attends votre planche et calculs de correction avec impatience je m'imagine que vous enverrez le tout avec les 4 cartes demandées, je prie par celle-ci Mr. *Louvis* de vous rembourser à cet egard.

J'ai l'honneur d'etre tres parfaitement Monsieur votre tres humble et tres obeissent serviteur

Micheli du Crest.

Au chateau d'Arbourg le 24 Oct. 1753.

Au chateau d'Arbourg
le 7 nov^e^ 1753.

A Monsieur Huber le fils à Bale

Monsieur

J'accepte avec bien du plaisir l'honneur de votre correspondance et par conseq^e^ je vai repondre à tous les articles de votre lettre du 3 de ce mois, mais comme vous n'y dites rien sur le terme du Temperé par moi proposé, comme le point fixe dont il m'a paru convenable que vous parliez pour commencer votre calcul dessus et dessous, le 1er de dilatation, le 2e de condensation, c'est pourquoi j'ai crû devoir tous faire faire ici outre ce que je puis avoir dit quelques nouvelles reflexions sur ce sujet.

En choisissant par vous Monsieur le point de 3 degréz au dessus comme plus approchant de la chaleur de la main, une autre dira que la meme raison doit plutot produire 4, et une autre 5 et une autre 6 et ainsy peut etre encore au dela, au lieu que le temperé etant ou du moins devant etre le milieu commun du chaud et du froid de

toute la Terre c'est la l'unique point appuié de quelque raison que l'on puisse choisir pour accorder tout le Monde sur ce point de commencement.

Reste donc à savoir si le temperé que j'ai determiné du Globe de la Terre sur mon thermometre se trouve le vrai et exacte temperé or pour cela je ne puis dire autre chose si ce n'est qu'il en approche fort et que si j'avois eu les mains libres pour ecrire, il y a longtems que j'aurois reçu de Lion des eclaircissement suffisans pour ce sujet, car il faut savoir qu'il y a eu de la cabale et à Paris et à Lion contre cette et c'est la raison pour laquelle on a marqué dans la connoissance des tems imprimé depuis 1744 que la temperature moienne de Caves de l'observatoire repondoit à 45 degrez de l'ancien therm^{e} de l'observatoire, au lieu de 48 qu'on avoit accusé ci devant, et la cause de cela vient de la jalousie que l'abè *Nolet* avoit concüe contre la reputation de mon thermometre que plusieurs imitent à Paris qui la fait décrier la Temparature d'une niche de ces memes caves que j'avois indiquée pour la regle du Temperé et qui etoit la meme que celle qui avoit il y a peut etre environ 60 ans servi de regle à Mr. *de la Hire* pour regler le Temperé de cet ancien thermometre.

Il est vrai qu'aiant eprouvé moi meme le Temperé de cette niche en 1742 avec cet ancien Thermometre, j'y trouvai cette temperature de 47 degrez au lieu de 48, quelle etoit du tems de Mr. de la Hyre, mais la raison de cela vient evidemment de ce que ce thermometre avoit deposé depuis le 82e degrez au dessus, jusqu'a ce 47 au dessous, la valeur de ce degré en couleur le long des parois du tuiau, or un degré de ce thermometre ne fait qu'a peu pres la valeur d'un demi du mien, et cela a été fait dans l'intervalle, et l'ont voit dans cette partie de tuiau tout trouble, et d'ailleurs l'esprit de vin n'a plus de couleur. Par consequent voila deja un degré demontré de malice par cette reticement, les deux autres le sont par la moienne prise entre les differences de temperature de certaines parties des caves, que je suppose bien varier de l'une et l'autre au moins de 4 degrez et plus de ce thermometre dans de certaines branches qui s'etendent assez loin dans la campagne et qui sont exposés à des eaux qui y tombent et en hyver par conseq^{e} y amenent du froid. Or auparavant on n'avoit point parlé de moienne et on n'avoit tacitement consideré que la niche surditte pour les experiences de Mr. *de la Hire.* Or Mr. *de la Hire* les y avoit toujours faites et moi consequemment à la meme place,

cependant en 1741 j'avois tres bien observé que les autres branches de ces caves varioient fort en temperature quoique la niche en question ne branlat pas ou du moins que sa variation fut presqu'insensible et je n'avois pas pris la peine de desabuser Mr. *de Reaumur* de la fausse croiance où il etoit de meme que bien d'autres sur l'egalité de Temperature des susd^es^ caves mais apparemment qu'en 1744 l'Abé *Nolet* apprit de quelqu'un les observations et crut devoir les reiterez puis en faire grand bruit dans un memoire academique à cet egard afin de decrier ces caves et m'attaquer en suite dans son livre 4 tome experiences de Physique à quoi j'ai repondu convenablement.

Et quant à Lion j'ai soupconné les memes difficultes mais beaucoup plus faciles à surmonter d'ailleurs infiniment plus sûres pour regler le temperé dont il s'agit bien au juste parceque le climat de Lion est un climat parfaitement moien par sa situation à tous egards. Ainsy si vous souhaitez de vous en eclaircir il faudroit consulter le Pere *Beraud* Jesuite sur cet article, il est depositaire de mon therm^e^ et de ceux de l'academie des beaux arts, garde de l'observatoire etc., et personne ne peut etre mieux en etat que lui de juger si mon Temperé est un peu trop haut ou un peu trop bas.

Voila Monsieur ce que j'ai cru devoir ajouter en eclaircissement sur le terme du Temperé.

Je vous serois bien obligé de me communiquer vos reflexions sur les consequences que j'ai tiré forte à la hate de la supposition que le terme moien du barometre sous l'equateur au niveau de la mer et à Stockolm au meme niveau fut egal dans l'un et dans l'autre et à 28 pouces du pied de Roy je vois cette supposition d'ailleurs assez confirmée parceque vous marquez les experiences du barometre de Berlin faites suivant la mesure du pied du Rhin et par consequent leur terme moien se rencontrer etre a 27 pouces 5 lignes du pied de Roy.

A l'egard de la table du niveau de Mr. *Picart* je vous serois bien obligé Monsieur si vous vouliez bien m'en faire une copie manuscrite et me l'envoier avec l'addition du calcul pour 5000 toises, puis pour 10 mille, 20 mille, 30 mille, 40 mille, 50 mille, 60 mille, 70 mille, 80 mille, 90 mille et puis pour 100 mille et que vous vouliez bien Mr. prendre la peine de faire les susd^s^ calculs. C'est afin de pouvoir juger des hauteurs des eaux du Deluge lorsque les sommets des montagnes eloignés à une certaine distance commencerent a paroitre à l'arche de Noë, suivant la relation de Moyse.

Quant a ce qui concerne les diverses questions que vous me faites Mr. sur ma table de correspondance qu'a de moi Mr. *Baviere* je n'y saurois bien repondre sans avoir la dite table n'en aiant pas de double avec moi et ne comprenant pas bien d'ailleurs votre façon de calculer m'etant fait pour mes calculs ma maniere particuliere et n'entendant l'algebre de sorte que lorsqu'il m'a falu sortir de ma d^e^ maniere pour en trouver une autre qui convient au calcul dont je desirois la correction, je n'ai pas pû la trouver et voila pourquoi j'ai marquer ci devant à Mr. *Baviere* ma correspondance des therm^es^ de mercure de *Delisle* et de *Fahrenheit* n'est pas aussy exactement calculée qu'elle devrait etre, je la puis bien faire exacte en comptant par les degrez par ex^e^ de *Fahrenheit* 54 qui repond au zero de mon therm^e^ d'esprit de vin et 73^d^—45′—36″ qui repond à 10 du meme et 92^d^—49′—36″ qui repond à 20 et 102 qui repond à 25, mais non pas de la façon qu'elle est marquée sur ma planche.

Ou le 54 degré de *Fahrenheit* repond bien à zero de mon thermometre d'esprit de vin mais ou je ne suis pas sur que le 60 reponde à 2 degr. 59 dud^e^ thermom^e^ le 70 à 8 degrez, 3 c̄oe je l'ai marqué sur la d^e^ planche et je vous avoüe Monsieur mon insuffisance pour corriger cela en vertu de votre principe, ma regle de progression de division du thermometre de mercure pour l'accorder parfaitement dans sa marche avec mon thermometre d'esprit de vin, ainsy qu'on peut le voir dans la parallele des deux thermom^es^ lequel j'ai donnée à votre bibliotheque, et bonne pour cela, mais n'est pas susceptible de renversement comme si je voulois par exemple faire marcher l'esprit de vin encore formité du mercure et le diviser pour un tel effet de dix en dix sur le thermometre de mercure.

Ainsy je sais bien en vertu de ma d^e^ regle à combien dix degrez de chaud de mon therm^e^ d'esprit de vin sur le temperé repondent à celui de Mercure egalement divisé, s'avoir 12 degrez 24 minutes, de sorte qu'ecrivant dix à la place des 12 deg. 24 et 5 au dessous, soit à 6^d^ 16 sur le temperé soit à 6 deg. 8 de distance au dessous de dix, le Therm^e^ de Mercure suit exactement alors le therm^e^ d'esprit de vin.

Mais si je voulois diviser mon therm^e^ d'esprit de vin de façon qu'il s'accordat de 10 en 10 du therm^e^ de mercure et de cinq en cinq c'est ce dont je n'ai pas pû jusqu'a present trouver la clef, par deffaut de savoir qu'elle doit etre en ce cas la progression. Ainsy

ne le pouvant pas trouver de cette facon de l'un à l'autre, je n'ai pas pu parvenir à trouver jusqu'à present la proportion dont il s'agit par raport à *Delisle* et à *Fahrenheit* dans le nombre que j'ai citer quoique je les trouve bien de distance en distance intermediaire et meme par tous les degrez de mon therm^e^ de mercure egalement divisez. J'estime donc que la chose n'est pas si aisée qu'il semble d'abord à pouvoir trouver; toutefois Mr. je m'en raporte à vos recherches. Quant à la faute que je puis avoir faite à la table susmentionée par l'article de Pondicheri je la corrigerai.

La où j'ai marqué à ce que je crois Mr. sur cette planche, *mon thermometre de Mercure, mon thermometre d'huile de lin,* c'est que je les y suppose peut etre egalement divisez, s'ils sont egalement divisez la ponctuation depuis les points 5 et 10 de mon double echelle demontre le degré qu'ils doivent alors accuser pour se rencontrer avec mon thermometre d'esprit de vin, suivant ce que vous me faites l'honneur de me dire Monsieur, mais comme je ne crois pas que je les aie ainsy divisez, j'estime en ce cas que ce n'est qu'aux nombres et aux divisions qu'il faut avoir egard pour juger de la concordance. Quoi qu'il en soit s'il y a de la faute ou de l'equivoque je la corrigerai, si non j'expliquerai et rendrai raison de la chose quand je verrai la planche.

Peut etre Monsieur que quand vous aurez examiné à votre bibliotheque le parallele susmentioné, vous trouverez vous meme l'explication de cette enigme.

Je vous prie au surplus de faire ces souvenir Mr. *Baviere* au sujet des eclaircissemens que je lui ai demandez touchant le cours de la comete de 1680 et d'agreer ici les assurances de la tres parfaite consideration avec la quelle j'ai l'honneur de me dire

Monsieur ..... votre tres .....

57. Reliefs der Schweiz: *R. Wolf* erwähnt in seiner «Geschichte der Vermessungen» S. 141 einen *Léonard Gaudin*, Topographe et membre de la Société des beaux arts à Genève, der ca. ums Jahr 1820 Reliefs anfertigte. Er soll 1822 in einem eigenen Gebäude im Pâquis in Genf ein 24 auf 19 Fuss haltendes, fast die ganze Schweiz umfassendes Relief zur Ansicht ausgestellt haben, das 1835 um 3600 Fr. an die Sammlung bei den Invaliden in Paris abgetreten wurde. Durch Hrn. *Wäber-Lindt* ist mir kürzlich ein französischer Prospekt in die

Hände gekommen, der zeigt, dass L. Gaudin die Relieffabrikation im grossen Style betrieb, indem er darin 7 Reliefs in grossem, 5 Reliefs in kleinem Massstab dem Publikum zum Ankauf anbot.

Nr. 1. Relief, in welchem der Genfersee die Mitte einnimmt und das sich von Chambéry nach dem Ufer des Neuenburgersees und vom St. Bernhard bis zum Jura erstreckte.

grosses Modell 52 auf 48 Zoll Preis 720 Fr.
kleines » 24 » 19 » » 144 »

Nr. 2. Relief der neuen Simplonstrasse

grosses Modell 27 auf 23 Zoll Preis 144 Fr.
kleines » 12 » 10 » » 60 »

Nr. 3. Relief des St. Gotthard, wo sich das Hospiz, die Quellen des Rheins und alle bemerkenswertesten Berge und Gletscher befinden

grosses Modell 22 auf 17 Zoll Preis 144 Fr.
kleines » 10 » 9 » » 48 »

Nr. 4. Relief des Montblanc und der angrenzenden Aiguilles, des Thales von Chamounix von Servoz bis zum Col de Balme

grosses Modell 24 auf 19 Zoll Preis 192 Fr.
kleines » 12 » $8^1/_2$ » » 72 »

Nr. 5. Ein Relief von Siders bis zum Rhonegletscher und den Gletschern von Grindwald (!), Lauterbrunnen, Jungfrau, das Schreckhorn, die Seen von Thun und Brientz, kurz die centrale Alpenkette

Modell 27 auf 18 Zoll Preis 240 Fr.

Nr. 6. Die ganze Gegend von Nr. 1 vermehrt um die centrale Alpenkette, d. h. das Oberland, Grindwald (!), die Jungfrau, die grossen Aletschgletscher(!), den Simplonübergang, die Gemmi, die kleine und grosse Scheideck, das Lauterbrunnenthal, die Seen von Thun und Brientz bis Meringen (!), den Grimsel, den Brunich (!), die Furka, Sant-Gotthard, Teufelsbrücke, Alcorf(!), der Langensee, Domo-Dossola, Kanton Schwitz, Zug, Luzern bis Zürich und andere Details, bei denen es viel zu lang ginge, sie hier zu beschreiben, in 4 Stücken, wegen der Bequemlichkeit des Transportes

grosses Modell 72 auf 62 Zoll Preis 1450 Fr.
kleines » 26 » 21 » » 370 »

Nr. 7. Das Basrelief, die Katastrophe des Bagnethales im

Wallis mit allen Details dieses traurigen Ereignisses vom 16. Juni 1818 vom Autor an Ort 10 Tage nachher gezeichnet

Modell 52 auf 10 Zoll Preis 120 Fr.

Das letzte erwähnte Relief betrifft den Gletschersturz am Giétrozgletscher mit seinen verheerenden Wirkungen.

L. Gaudin muss die Herstellung von Reliefs sehr intensiv betrieben haben, er verwahrt sich am Schluss gegen die Nachahmungen seiner Produkte, wie sie in Paris, London und Genf auf den Markt gebracht werden. Deshalb tragen alle seine Erzeugnisse eine bestimmte Marke. Die Genauigkeit seiner geographischen Namenschreibung lässt zu wünschen übrig.

Da Wolf in Genf selbst nichts über diese Reliefs von Gaudin erfahren konnte und seine Nachrichten von Kapitän *Penel* in Paris hatte, so ist der im obigen skizzierte fliegende Zeddel vom grössten Werte. Er gehört der schweizerischen Landesbibliothek in Bern.

58. Im Besitze von Hr. Professer *Dr. Lotmar* in Bern befindet sich ein interessantes Instrumentchen. Dasselbe besteht inwendig aus einem Compass mit Sonnenuhr, wobei der gespannte Faden fehlt. Es kommen drei befestigte Kreisteilungen vor.

1) Die äusserste: Die Monate des Jahres.

2) Die zweitäusserste enthält eine Dreiteilung für jeden Monat z. B.

Mai	10.	20.	31.
Juni	10.	20.	30.

3) Die innerste hat zwei Einteilungen.

Juli	I.	II.
August	III.	IV.
Septemb.	V.	VI.
Oktober	VII.	VIII.
Novemb.	IX.	X.
Dezemb.	XI.	XII.
Januar	I.	II.
Februar	III.	IV.
März	V.	VI.
April	VII.	VIII.
Mai	IX.	X.
Juni	XI.	XII.

Ferner finden sich inwendig zwei bewegliche Scheiben und zwar eine grössere Scheibe mit der Einteilung 1—30, also die Monatseinteilung. Die kleinere Scheibe dient zur Darstellung der Mondsphasen im Monat.

Die äussere Seite des Instruments enthält oben eine sogenannte Polar-Sonnenuhr, die untere Seite, wo ein Zeiger fehlt, weist vorerst eine quadratische Platte mit folgenden Zahlen:

5	7	4	12	6	3	11
2	10	0	10	9	0	8
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	(11)	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	0	0	0	0

auf.

Die ersten zwei Reihen enthalten die Stunden des Tages 1—12, die folgenden 5 die Tage des Monats und alles bildet 7 Reihen, entsprechend der Zahl der Tage der Woche. Um alles herum geht der Kranz der Monatsnamen

Januar bis Dezember,

dann folgt hier herum eine zweite Einteilung in 10 20 30 oder 31 und endlich noch eine Gradeinteilung ohne Zahlen.

Die Verwendung des Instruments ist nur zum Teil ersichtlich, in einigem uns noch absolut dunkel. —

Inhalts-Verzeichnis.

	Seite der Sitzungsberichte	Seite der Abhandlungen
Baltzer A., Prof. Dr.,		
Demonstration eines geologischen Profils durch die Schänzli-Moräne	V	
Vorweisung von Mineralien	V	
Altes und Neues von der Insel Rügen	V	
Eiszeiten und Schreibkreide	V	
Brückner E., Prof. Dr.,		
Neuere Probleme der Gletscherforschung	VI	
Die Arbeit Imhofs «Über die Waldgrenze in der Schweiz»	VII	
Droz-Farny A., Professeur à Porrentruy,		
Sur un théorème de Steiner (mit Tafeln)		135
Dutoit E., Dr. med. und Docent,		
Vegetationscharakter des Val de Cogne	VI	
v. Fellenberg E., Dr., *Kissling E.*, Dr. und *Schardt*, Dr.,		
Lötschberg- und Wildstrubeltunnel. Geologische Expertise (mit drei Profilen)		100
Fischer E., Prof. Dr.,		
Über die neuern Untersuchungen betreffend die Befruchtung der Gymnospermen	VII	
Vorweisung von Morchella rimosipes D. C.	VIII	
Über die Bearbeitung der Pilze im grossen Sammelwerk «Die natürlichen Pflanzenfamilien» von Engel und Prantl und der Beiträge zur Kryptogamenflora der Schweiz	VIII	
Graf J. H., Prof. Dr.,		
Notizen zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften in der Schweiz		155
Gruner P., Dr., Gymnasiallehrer und Docent,		
Demonstration astronomischer Arbeiten	V	
Über die bevorstehende Sonnenfinsternis und einen beobachteten Sonnenring	VIII	
Guillebeau A., Prof. Dr.,		
Über die Fleckniere der Kälber	VI	
Heffter A., Prof. Dr.,		
Die Peyote, ein Berauschungsmittel der mexikanischen Indianer	VI	

	Seite der Sitzungsberichte	Seite der Abhandlungen
v. Jenner A., Custos, Mitteilung über die Staare	VI	
Kissling, E., Dr., Sekundarlehrer und Docent, Bergbau und Molassekohlen in der westlichen Schweiz	VI	
v. Kostanecki St., Prof. Dr., Demonstration von Chrysin und Tecto-Chrysin	V	
Marti C., Sekundarlehrer, Über die Gesetze des Wetters	VIII	
Renfer H., Dr., Professor in St. Gallen, Die Definitionen der Bernoullischen Funktion und Untersuchung der Frage, welche von denselben für die Theorie die zutreffendste ist (mit Figuren im Text und 4 Tabellen)		1
Ringwald, Ingenieur, Betriebsleiter des Elektrizitätswerks in Spiez, Über elektrische Kraftgewinnung und Kraftübertragung	VIII	
Schapiro J., Dr. phil., Fortschritt und Rückschritt in biologischer Bedeutung	IX	
Steck Th., Dr. und Conservator, Vorweisung von Litteratur über die Hydrachniden (Wassermilben)	V	
Über die Arbeit von H. Volz «Die Turbellarien in der Gegend von Aarberg»	V	
Über eine entomologische Sammelreise in die grajischen Alpen	IX	
Studer Th., Prof. Dr., Demonstration älterer und neuerer Hundeschädel	V	
Die Fauna der Hawaï-Inseln	VI	
Vorweisung neuer Präparate	IX	
Über die Hunde aus den Crannoges von Irland		132
Tschirch A., Prof. Dr., Die Entwicklung der Chinologie im XIX. Jahrhundert	VIII	
Mitgliederverzeichnis pro 31. Dezember 1900	X	
Rechnung der bern. Naturf. Gesellschaft pro 1899	XV	
Jahresbericht pro 1899/1900	III	
Inhaltsverzeichnis		174

Verlag von K. J. WYSS in Bern.

(Fortsetzung von Seite 2 des Umschlags.)

Fascikel IV6: *Fauna helvetica.* Heft 5: Reptilien und Amphibien. Zusammengestellt von Dr. H. Fischer. 39 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

Fascikel IV6: *Fauna helvetica.* Heft 5δ: Fische. Zusammengestellt von Dr. H. Fischer-Sigwart. Bern 1900. 99 Seiten. Preis Fr. 1.50

Fascikel IV6: *Fauna helvetica.* Heft 6: Mollusken. Zusammengestellt von Prof. Dr. Th. Studer, Dr. G. Amstein und Dr. A. Brot. Preis 60 Cts.

Fascikel IV6: *Fauna helvetica.* Heft 9: Crustacea. Von Dr. J. Heuscher etc. 35 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

Fascikel V4: *Heraldik und Genealogie.* Bearbeitet von Jean Grellet und Maurice Tripet. Bern 1895. 68 Seiten 8°. Preis Fr. 1.50.

Fascikel V6^{a-e}: *Architektur, Plastik, Malerei.* Zusammengestellt von Dr. B. Haendcke. Bern 1892. 100 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel V6^{e}: *Leibesübungen.* Turnen, Fechten, Reiten, Wassersport etc. Zusammengestellt von Alois Landtwing. 165 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel V9ab: *Landwirthschaft.* Zusammengestellt v. Prof. F. Anderegg u. Dr. E. Anderegg. Bern 1893. Heft 1—3. 258 S. 8° à Fr. 3.—
id. „ 4 „ —.60
id. „ 5 und 6 „ 2.—

Fascikel V9c: *Forstwesen, Jagd und Fischerei.* Forstwesen. Zusammengestellt durch das eidgen. Oberforstinspektorat. Bern 1894, 160 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel V9c: *Forstwesen, Jagd und Fischerei.* Jagd. Zusammengestellt durch das eidgen. Oberforstinspektorat. 77 Seiten 8°. Preis Fr. 1.50

Fascikel V9c: *Forstwesen, Jagd und Fischerei.* Fischerei. Zusammengestellt durch das eidgen. Oberforstinspektorat. Bern 1898, 65 Seiten 8°. Preis Fr. 1.50

Fascikel V9d: *Schutzbauten.* Zusammengestellt durch das eidgen. Oberforstinspektorat. Bern 1895. 136 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel V9gβ: *Mass und Gewicht.* Bearbeitet von F. Ris, Direktor der eidgen. Eichstätte. Bern 1894. 36 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

Fascikel V9gγ: *Post- und Telegraphenwesen.*
Postwesen. Zusammengestellt von der Schweizer. Oberpost-Direktion.
Telegraphenwesen. Zusammengestellt von E. Abrezol. Inspektor der Central-Telegraphenverwaltung. Bern 1895. 113 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel V9gε: *Bankwesen, Handelsstatistik, Versicherungswesen.* Zusammengestellt von W. Speiser. Basel, Dr. Geering und Dr. J. J. Kummer. Bern 1893. 207 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel V9j: *Alkohol und Alkoholismus.* Zusammengestellt von Otto Lauterburg, Pfarrer in Neuenegg, E. W. Milliet, Direktor der eidgen. Alkoholverwaltung, und Antony Rochat, Pfarrer in Satigny. Bern 1895. 183 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel V10eγ: *Die christkatholische Litteratur der Schweiz.* Zusammengestellt v. Dr. F. Lauchert. Bern 1893. 32 Seiten 8°. 60 Cts.

Fascikel V10eα; *Bibliographie der evangelisch-reformirten Kirche in der Schweiz.* Heft 1: Die deutschen Kantone. Zusammengestellt von Dr. G. Finsler. Preis Fr. 2.—

Fascikel V10e: *Die katholisch-theologische und kirchliche Litteratur des Bisthums Basel* vom Jahre 1750 bis zum Jahre 1893. Zusammengestellt von Pfr. Ludwig R. Schmidlin in Biberist.
Heft 1 und 2 à Fr. 3.—

Verlag von K. J. WYSS in Bern.

Graf, J. H., Prof., Dr. *Einleitung in die Theorie der Gamm-funktion und der Euler'schen Integrale.* Fr. 2.
— — *Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaft in bernischen Landen* vom Wiederaufblühen der Wisse-schaften bis in die neuere Zeit. Heft 1—3. Fr. 7.
— — *Leben und Wirken des Physikers und Geodäten Jacq. Barthélmy Micheli du Crest* aus Genf, Staatsgefange-des alten Bern 1746—1766. Mit Porträt Michelí's, einer Ansicht seines Gefängnisses in Aarburg u. Facsimile seines Panorama der Alpen Fr. 3.
— — *Das Leben und Wirken des Physikers und Astronom Joh. Jac. Huber* aus Basel, 1733—1798. Mit d. Bildnisse Huber's und einer Tafel, seine freie U-hemmung darstellend . . . . . Fr. 1.
— — *Professor Dr. Rudolf Wolf, 1816—1893* . . 1.
— — *Professor Ludwig Schläfli, 1814—1895* . . . 1.
— — *Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludw. Schläfli* . . . . . Fr. 3.
— — *Die Exhumierung Jakob Steiner's* und Einweihung d. Grabdenkmals Ludwig Schläfli's anlässlich des 100. Geburtstages Steiner's. Mit 2 Lichtdrucken Fr. 1.
— — *Der Mathematiker Jakob Steiner von Utzenstorf.* Ei-Lebensbild und zugleich eine Würdigung seiner Leistungen . . . . . Fr. 1. 50
— — *Wann beginnt das XX. Jahrhundert?* Vortrag. Fr. —. 50
Graf J. H., Prof. Dr. und **Gubler Ed., Dr.** *Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Funktionen.* 2 Hefte: Die Bessel'schen Funktionen erster und zwei-ter Art . . . . . à Fr. 4. —
Huber, G., Prof. Dr. *Sternschnuppen, Feuerkugeln, Meteo-ite und Meteorschwärme* . . . . Fr. 1. —
— — *Forschungen auf dem Gebiete der Spektralanalyse* —. 60
— — *Die kleinen Planeten des Asteroidenringes* . —. 60
Kissling, Dr., E. *Die versteinerten Tier- und Pflanzenreste in der Umgebung von Bern.* Exkursionsbüchlein für Studierende . . . . . Fr. 4. —
Baumberger, E. *Ueber die geologischen Verhältnisse am linken Ufer des Bielersees* . . . . . Fr. 2. —
Baltzer, A., Prof. *Vom Rande der Wüste.* Populärer Vortrag, gehalten im November 1894 in der Bern. Naturforsch. Gesellschaft. Mit drei Lichtdrucktafeln. . Fr. 1. 50
Fischer, Prof., L., *Zweiter Nachtrag z. Verzeichnis der Gefäss-pflanzen des Berner-Oberlandes, mit Berücksichtigung der Standortsverhältnisse, der horizontalen und ver-tikalen Verbreitung* . . . . Fr. —. 25

Durch jede Buchhandlung zu beziehen.

AY 25 1902

123.

Mitteilungen

der

turforschenden Gesellschaft

in Bern

aus dem Jahre 1901.

Nr. 1500-1518.

Redaktion: J. H. GRAF.

BERN
Druck und Verlag von K. J. Wyss
1902

Verlag von K. J. WYSS in Bern.

BIBLIOGRAPHIE
der
Schweizerischen Landeskunde.

Unter Mitwirkung
der
hohen Bundesbehörden, eidgen. und kant. Amtsstellen
und zahlreicher Gelehrter
herausgegeben von der
Centralkommission für schweizerische Landeskunde.

In deutscher und französischer Ausgabe.

Bis jetzt erschienen :

Fascikel Ia: *Bibliographische Vorarbeiten der landeskundlichen Litteratur und Kataloge der Bibliotheken der Schweiz.* Zusammengestellt von Prof. Dr. J. H. Graf. Bern 1894. 69 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

Fascikel I b, enthaltend: *Bibliographie der Gesellschaftsschriften, Zeitungen und Kalender der Schweiz*, von Prof. J. L. Brandstetter in Luzern. 380 Seiten. Preis Fr. 3.—

Fascikel II a: *Landesvermessung und Karten der Schweiz, ihrer Landstriche und Kantone.* Herausgegeben vom eidgen. topographischen Bureau. Redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf. Bern 1892. 193 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel II b: *Karten kleinerer Gebiete der Schweiz.* Herausgegeben vom eidg. topograph. Bureau. Redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf, Bern 1892. 164 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel II c: *Stadt- und Ortschaftspläne, Reliefs und Panoramen der Schweiz.* Herausgegeben vom eidg. topograph. Bureau. Redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf. Bern 1893. 173 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel II d, enthaltend: *Generalregister, Ergänzungen und Nachträge zu den Fascikeln II a—c* (Landesvermessung, Kataloge der Kartensammlungen, Karten, Reliefs und Panoramen). Im Auftrage des eidgen. topograph. Büreaus redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf. 220 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel III: *Landes- und Reisebeschreibungen.* Ein Beitrag zur Bibliographie der schweizer. Reiselitteratur, 1479—1890. Zusammengestellt von A. Wäber, Bern. 462 Seiten 8°. Preis Fr. 4.—

Fascikel IV 3: *Balneologie und Climatotherapie.* Versuch einer schweiz. Bibliographie der Litteratur auf den Gebieten des Badewesens, der Heilquellen, der climaterischen Kurorte u. s. w. Von B. Reber in Genf. 130 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel IV 6: *Die Fauna der italienischen Schweiz.* Redigirt von Prof. Dr. A. Lenticchia. Como 1894. 19 Seiten 8°. Preis 50 Cts.

Fascikel IV 6: *Fauna helvetica*: Heft 2: Seenfauna. Zusammengestellt von Prof. D. F. Zschokke. Bern 1897. 30 Seiten. 60 Cts.

Fascikel IV6: *Fauna helvetica.* Heft 3: Säugethiere. Zusammengestellt von Dr. H. Fischer-Sigwart. Bern 1900. 119 Seiten. Fr. 2.—

Fascikel IV 6: *Fauna helvetica.* Heft 4: Vögel. Zusammengestellt von Prof. Dr. Theophil Studer. Bern 1895. 57 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

(Fortsetzung auf Seite 3 des Umschlags.)

Mitteilungen

der

Naturforschenden Gesellschaft

in Bern

aus dem Jahre 1901.

Nr. 1500-1518.

Redaktion: J. H. GRAF.

BERN
Druck und Verlag von K. J. Wyss
1902

MAY 26 1902

Jahresbericht

über die

Thätigkeit der bernischen Naturforschenden Gesellschaft

im Vereinsjahr 1900/1901.

Hochgeehrte Herren!

Das hinter uns liegende Vereinsjahr war für unsere Gesellschaft ein stilles. Unser Mitgliederbestand erfuhr keine wesentliche Aenderung. 3 Mitglieder, nämlich die Herren Prof. Dr. Berdez, Ingenieur Koller und Oberfeldarzt Dr. Ziegler sind uns durch den Tod entrissen worden; 5 weitere Mitglieder traten aus. Neu eingetreten sind 6, sodass die Zahl der ordentlichen Mitglieder heute 190 beträgt, wozu noch 17 korrespondirende Mitglieder kommen.

14 Sitzungen wurden abgehalten, darunter 1 Demonstrationsabend. Folgende Herren haben sich mit Vorträgen, kleineren Mittheilungen oder Vorweisungen betheiligt:

Herr	Baltzer	3
»	Brückner	1
»	Eduard Fischer	5
»	Gruner	2
»	Guillebeau	1
»	Heffter	1
»	König	1
»	v. Kostanecki	1
»	Marti	1
»	Ringwald	1
»	Schapiro	1
»	Steck	1
»	B. Studer	1
»	Theophil Studer	1
»	Tschirch	2

Von diesen Mittheilungen entfallen auf Botanik 5, Zoologie (einschl. Entwicklungsgeschichte) 5, Pharmakognosie 4, Geologie 3, Physik 3, Physikalische Geographie 2, Chemie 1, Astronomie 1.

Am 24. Juni veranstaltete die Gesellschaft eine Sitzung in Spiez, bei der der Betriebsleiter des Elektrizitätswerks an der Kander, Herr

Ingenieur Ringwald, über elektrische Kraftgewinnung und Kraftübertragung sprach. Eine Besichtigung der Kraftanlage schloss sich an.

Das Comité hielt 3 Sitzungen ab.

Nach aussen ist unsere Gesellschaft wenig hervorgetreten. An der Jahresversammlung der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft in Thusis war sie durch Herrn Prof. Dr. Th. Studer vertreten; in das grosse Denkmalcomité, das die Errichtung eines Hallerdenkmals vor der neuen Hochschule anbahnen soll, ordnete sie Herrn Apotheker B. Studer sen. ab. Beim Jubiläum der botanisch-zoologischen Gesellschaft in Wien wurde sie durch ihr Mitglied Hofrath Brunner von Wattenwyl vertreten.

Eine Aufforderung, sich einem Protest gegen die technische Ausnützung des Rheinfalles anzuschliessen, lehnte die Gesellschaft vorläufig ab, bis ihr das Material zur Beurtheilung der Sachlage vorgelegt wird.

Unsere Bibliothek hat auch in diesem Jahr einen ansehnlichen Zuwachs erfahren. Leider aber droht ihr eine grosse Gefahr. Bekanntlich hat die schweizerische naturforschende Gesellschaft ihre Bibliothek der bernischen naturforschenden Gesellschaft in Verwahrung und Verwaltung gegeben. Unsere Bibliothek und die der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft sind vereinigt und zusammen in Räumen der Stadtbibliothek aufgestellt. Um die Kosten für den Unterhalt der Bibliothek, von denen der Grosstheil auf den Buchbinder entfällt, zu ersparen, hat das Centralcomité der schweiz. naturf. Gesellschaft, das augenblicklich in Zürich seinen Sitz hat, bei der Jahresversammlung in Thusis den Antrag eingebracht, die Bibliothek der schweiz. naturf. Gesellschaft zu veräussern. Die Angelegenheit schwebt noch und wird in Zofingen bei der diesjährigen Versammlung ihre definitive Erledigung finden.*) Wir richten hier noch einen Appell an die Mitglieder der bernischen Gesellschaft, möglichst zahlreich in Zofingen sich einzufinden, um die Interessen Berns wahrnehmen zu helfen.

Der Lesezirkel zeigt keine Veränderungen gegenüber dem Vorjahr, auch darin, dass die Versendung der Mappen durch die Theilnehmer an Pünktlichkeit wieder viel zu wünschen übrig liess. Da sich gerade so viele neue Theilnehmer gemeldet haben, wie alte abgegangen sind, ist die Zahl der Theilnehmer unverändert 36 geblieben.

Zum Präsidenten für das neue Vereinsjahr wurde der bisherige Vicepräsident, Privatdocent Dr. Kissling, gewählt, zum Vicepräsidenten Prof. Dr. Strasser. An Stelle des sein Amt als Sekretär niederlegenden Dr. Gruner wurde gewählt Dr. R. Huber.

Der Präsident:

Ed. Brückner.

*) Die Angelegenheit hat inzwischen eine glückliche Lösung gefunden, indem die Bernische Stadtbibliothek die Bibliothek der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft übernahm, so dass die Bibliothek der schweiz. naturf. Gesellschaft vereinigt mit der der bernischen naturf. Gesellschaft endgiltig in Bern bleibt.

Sitzungs-Berichte.

957. Sitzung vom 19. Januar 1901.

Abends 8 Uhr im pharmaceutischen Institut.

Vorsitzender: Hr. Ed. Brückner. Anwesend: 28 Mitglieder und Gäste.

1. Hr. A. Tschirch spricht über: «**Neueres über Kautschuk und Guttapercha**». (Mit Demonstrationen und Projektionen.)

958. Sitzung vom 26. Januar 1901.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Hr. Ed. Brückner. Anwesend: 31 Mitglieder und Gäste.

1. Der Vorsitzende macht Mitteilung von dem kürzlich erfolgten Hinscheide von Hrn. H. Berdez, Professor an der Tierarzneischule Bern, und fordert die Versammlung auf, sich zu Ehren des Verstorbenen zu erheben.
2. Hr. P. Gruner spricht über: «**Neuere Beziehungen zwischen Licht und Magnetismus**». (Zeemanns Phänomen).

959. Sitzung vom 9. Februar 1901.

Abends 8 Uhr im geologischen Institut.

Vorsitzender: Hr. E. Kissling. Anwesend: 30 Mitglieder und Gäste.

1. Hr. A. Baltzer spricht über: «**Die Entstehung der Berneroberländer-Marmore**».
2. Hr. A. Baltzer führt die Gesellschaft in das **Sammlungszimmer des geologischen Instituts** und erklärt die daselbst befindlichen geologischen Photographien.

960. Sitzung vom 2. März 1901.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Hr. Ed. Brückner. Anwesend: 25 Mitglieder und Gäste.

1. Hr. A. Heffter spricht über: «**Pfeilgifte**».
2. Hr. Th. Studer weist eine Anzahl **zoologische Objekte aus Sumatra** vor, die dem naturhistorischen Museum geschenkt wurden.

961. Sitzung vom 9. März 1901.

Abends 8 Uhr im Chemiezimmer des städt. Gymnasiums.

Vorsitzender: Hr. Ed. Brückner. Anwesend: 50 Mitglieder und Gäste.

1. Als Delegierter in das Hallerdenkmalkomitee wird Hr. Apotheker B. Studer sen. gewählt.

2. Als Delegierter an das 25jährige Jubiläum der zoologischen Gesellschaft in Wien wird Hr. Hofrat Brunner-von Wattenwyl gewählt.
3. Hr. E. König führt eine Reihe interessanter **Demonstrationen aus dem Gebiete der Elektrizität**, speziell das **Nernstlicht**, vor.

962. Sitzung vom 23. März 1901.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Hr. Ed. Brückner. Anwesend: 18 Mitglieder und Gäste.

1. Hr. Ed. Fischer referiert über **die neueren Untersuchungen von Norwaschin und Guignard** betreffend die Entstehung des Endosperms der Angiospermen durch Verschmelzung eines Spermakernes mit den sog. Polkernen des Embryosackes und die von de Vries und Correns damit in Zusammenhang gebrachte Entstehung von sog. Xenien beim Mays.

   Derselbe legt die dritte Serie seiner Untersuchungen zur vergleichenden Entwicklungsgeschichte und Systematik der Phalloideen (Denkschriften der schweiz. naturf. Gesellschaft Bd. XXXVI 1900) vor und demonstriert eine Anzahl von Phalloideen, die von Herrn Prof. C. Schröter in Zürich aus Java mitgebracht wurden.

   Ebenso erwähnt er kurz einige der Hauptresultate der im botan. Institut Bern ausgeführten Arbeit von Hrn. Dr. R. Lüdi, speziell die für Synchytrium Taraxaci nachgewiesene hochgradige Spezialisierung auf besondere Nährpflanzen.

963. Sitzung vom 27. April 1901.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Hr. Ed. Brückner. Anwesend: 14 Mitglieder und Gäste.

1. Für das Vereinsjahr 1901/1902 wird der Vorstand gewählt:
   Hr. Dr. E. Kissling, Priv.-Doc., zum Präsidenten.
   Hr. Prof. Dr. H. Strasser zum Vice-Präsidenten.
   Hr. Dr. Rud. Huber zum Sekretär.
2. Hr. St. v. Kostanecki spricht über den «**Wau**».

964. Sitzung vom 11. Mai 1901.

Abends 8 Uhr im Hörsaal des geolog. Instituts.

Vorsitzender: Hr. E. Kissling. Anwesend: 45 Mitglieder und Gäste.

1. Der abtretende Präsident, Hr. Prof. Ed. Brückner, verliest den Jahresbericht pro 1900/1901.
2. Hr. Ed. Brückner spricht über: «**Die Eiszeiten in der Schweiz**».
3. Hr. E. König weist ein Exemplar der zum ersten mal in Bern eingetroffenen **Nernst-Lampen** vor.

965. Sitzung vom 16. Juni 1901.

Vormittags 11 Uhr in Grosshöchstetten.

Vorsitzender: Hr. E. Kissling. Anwesend: 24 Mitglieder und Gäste.

1. Hr. Th. Studer spricht über: «**Neue Entdeckungen aus der Urgeschichte des Menschen**».

2. Hr. Guillebeau spricht über: «**Die Bakterien der Euterentzündung bei Kühen**».

Nachmittags wurden durch die Firma Ruef in Ostermundingen Hagelkanonen demonstriert.

966. Sitzung vom 27. Juli 1901.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Hr. E. Kissling. Anwesend: 14 Mitglieder und Gäste.

1. Hr. Th. Studer hält ein einleitendes Referat über die Frage einer **Veräusserung der Bibliothek** von Seiten der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft.
2. Hr. Th. Steck gibt eine Übersicht über den Bestand **der vereinigten Bibliotheken der schweizerischen und der bernischen naturforschenden Gesellschaften.**

967. Sitzung vom 19. Oktober 1901.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Hr. E. Kissling. Anwesend: 21 Mitglieder und Gäste.

1. Hr. Th. Steck gibt Auskunft über die Bibliothekangelegenheit.
2. Hr. Ed. Fischer spricht über den sog. **Weisstannen-Hexenbesen und dessen Urheber, das Aecidium elatinum** und gibt eine kurze Darstellung seiner Beobachtungen und Versuche, die ihn zum Nachweise der zugehörigen Medo- und Teleutosporenform: Melampsorella Caryophyllacearum DC. führten. Es werden drei kleinere mit zahlreichen Hexenbesen und jungen Krebsbeulen besetzte Weisstannen vorgewiesen, die mit vielen andern ebenso erkrankten neben reichlich Melampsorella-tragenden Pflanzen von Stellaria nemorum gestanden waren; ferner einige kleine Weisstannen, die der Vortragende im Mai mit Basidiosporen genannten Pilzes inficiert hatte und die jetzt an den diesjährigen Trieben junge Krebsbeulen tragen. Eine detailliertere Publikation über diesen Gegenstand erscheint in der «Zeitschrift für Pflanzenkrankheiten».

   Anschliessend hieran werden noch einige andere Hexenbesenbildungen: auf Rottanne, Kiefer und auf den Berberitze demonstriert.
3. Hr. Rud. Huber weist einen **botanischen Atlas** vor, herausgegeben von Dr. J. Huber, Chef der botanischen Abteilung des Museums Göldi in Pará.

968. Sitzung vom 2. November 1901.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Hr. E. Kissling. Anwesend: 20 Mitglieder und Gäste.

1. Hr. G. Huber spricht über «**Der grosse Astronom Tycho Brahe**», zum Andenken an die dreihundertste Wiederkehr seines Todestages.
2. Hr. J. H. Graf weist 4 Hauptwerke Tycho's vor, welche der hiesigen Stadtbibliothek angehören.
3. Hr. E. Kissling spricht über «**Gliederung der Molasse im Napfgebiet** in obere Süsswassermolasse und untere Meeresmolasse».

4. Hr. Schaffer spricht über «Prüfung von **Defraudationen an Wertzeichen**».
5. Hr. Th. Studer spricht über eine neu entdeckte **Samoterium-Art: Okapia**, welche im Urwald Central-Afrikas vorkommt.

Exkursion, Samstag den 23. November 1901.

Anwesend: 20 Mitglieder und Gäste.

Besichtigung der Rüben-Zuckerfabrik Aarberg.

969. Sitzung vom 30. November 1901.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Hr. E. Kissling. Anwesend: 14 Mitglieder.

1. Die vom Kassier vorgelegte **Rechnung** über das abgelaufene Rechnungsjahr wird genehmigt und verdankt.
2. Die Mitglieder werden durch den Präsidenten eingeladen an der Feier zu Ehren des Herrn Professor Th. Studer (25jähriges Professorenjubiläum) teilzunehmen.
3. Hr. J. H. Graf spricht über «**Die Vermessung des Kantons Basel von Professor Daniel Huber** und ihre Bedeutung für die Dufour-Karte».
4. Hr. Ris macht eine kurze Mitteilung über **einen neuen Masstab** vom letzten internationalen Kongress für Mass und Gewicht in Paris.

970. Sitzung vom 14. Dezember 1901.

Abends 8 Uhr im pharmaceutischen Institut.

Vorsitzender: Hr. E. Kissling. Anwesend: 12 Mitglieder und 1 Gast.

1. Vertrag betreffend Übergabe der Bibliothek der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft an die Stadtbibliothek Bern.

   Es wird der Entwurf zu dem **Vertrag zwischen der Stadtbibliothek Bern und der bernischen naturforschenden Gesellschaft** verlesen und genehmigt.

   Auf Grund dieses Entwurfes wird der Vorstand ermächtigt, den definitiven Vertrag abzuschliessen.
2. Hr. G. Streun spricht über «**Nebelverhältnisse in der Schweiz**».
3. Hr. A. Benteli spricht über «**Kleine Föhnstudie**» und kurz über die neu erschienene Arbeit über den Föhn von Professor Wild.

   Ein Föhnerlebnis am Thunersee in den 80er Jahren brachte den Vortragenden zur Ueberzeugung von dem Bestehen von Lokaldepressionen in den Thälern, in welchen der Föhn zur Entwicklung kommt. Da ihm zu einer gründlichen Untersuchung sowohl das Material als die nötige Zeit fehlte, so begnügte er sich mit der Zeichnung der Luftdruckkurven der Stationen Lugano, Altorf, Basel und Bern für das Jahr 1887 und mit dem Einzeichnen der meteorologischen Elemente: Windrichtung und -Intensität, Temperatur und relative Feuchtigkeit für 14 schweizerische Normalstationen in kleine Kärtchen. Das Material dazu lieferten die Annalen der schweiz. meteorolog. Zentralstation Zürich. Aus diesen Aufzeichnungen konnte man auf das Bestehen der Lokaldepressionen während eines Föhns schliessen, aber

genaue Auskunft darüber geben eben nur synoptische Karten mit Isobaren von Millimeter zu Millimeter, wie solche die ausgezeichnete Arbeit von Professor Wild über den Föhn enthält, welche jüngst in den Denkschriften der schweiz. naturf. Gesellschaft erschienen ist. Besonderes Interesse bietet die Vergleichung der Barometerkurven von Lugano und Basel. Beinahe ausnahmslos steht bei Altorf Föhn verzeichnet, wenn die Lugano-Kurve sich um 5—11 Millimeter über die Basler-Kurve erhebt und umgekehrt steht bei Lugano oder bei Castasegna oder beiderorts Nordföhn verzeichnet, sobald die Basler-Kurve um ebensoviel über der Lugano-Kurve steht. Zum Schlusse teilt der Vortragende mit, wie Professor Wild das Herunterstürzen der Luft bei Föhn im Thalgrunde erklärt und durch Experiment zu beweisen versucht hat. Dies gab Anlass zu einer Diskussion, an welcher sich Herr Professor Brückner und der Vortragende beteiligten.

Verzeichnis der Mitglieder
der
Bernischen Naturforschenden Gesellschaft.

(Am 31. Dezember 1901.)

Die mit * bezeichneten Mitglieder wurden im Jahre 1901 neu aufgenommen.

Vorstand.

Dr. *E. Kissling,* Präsident.
Prof. Dr. *H. Strasser,* Vice-Präsident.
B. Studer, jun., Apotheker, Kassier seit 1875.
Prof. Dr. *J. H. Graf,* Redaktor der Mitteilungen seit 1883.
Dr. *Th. Steck,* Oberbibliothekar und Geschäftsführer des Lesezirkels.
Dr. *R. Huber,* Sekretär seit 1901.

Mitglieder.

1.	*Allemann,* J., Arzt, Zweisimmen	1898
2.	*Anderegg,* Ernst, Dr. phil. und Gymnasiallehrer, Bern	1891
3.	*Andreae,* Philipp, Apotheker, Bern	1883
4.	*Badertscher,* Dr. A., Sekundarlehrer, Bern	1888
5.	*Balmer,* Dr. Hans, Bern	1886
6.	*Baltzer,* Dr. A., Professor der Mineralogie und Geologie, Bern	1884
7.	*Beck,* Dr. Gottl., Lehrer des Freien Gymnasiums, Bern	1876
8.	*v. Benoit,* Dr. jur. G., Bern	1872
9.	*Benteli,* A., Rektor und Dozent, Bern	1869
10.	*Benteli,* A., Buchdrucker, Bern	1891
11.	**Bohren,* Lehrer an der landwirtsch. Schule Rütti	1901
12.	*Brückner,* Dr. Ed., Prof. der Geographie, Bern	1888
13.	*Brunner,* C., Dr. phil., Hofrath, Trautsohngasse 6, Wien	1846
14.	*Büchi,* Fr., Optiker, Bern	1874
15.	*Burri,* Dr. phil., Prosektor	1895
16.	*v. Büren,* Eug., allié von Salis, Sachwalter, Bern	1877
17.	*Coaz,* Dr., eidgenössischer Oberforstinspektor, Bern	1875
18.	*Conrad,* Dr. Fr., Arzt in Bern	1872
19.	*Dick,* Dr. Rud., Arzt in Bern	1876
20.	*Droz,* Arnold, Kantonsschullehrer in Pruntrut	1890

21. *Dubois,* Dr. med., Arzt, Privatdocent, Bern . . . 1884
22. *Dumont,* Dr. med. F., Arzt, Privatdocent, Bern . . 1890
23. *Dutoit,* Dr. med., Arzt in Bern 1867
24. *Egues,* Jules, Dr. med., Corgémont 1898
25. *Engelmann,* Dr., Apotheker in Basel 1874
26. *Farner,* Dr. A., Apotheker 1899
27. *v. Fellenberg,* Dr. phil. E., Bergingenieur, Bern . . . 1861
28. *Fischer,* Dr. phil. Ed., Professor der Botanik, Bern . . 1885
29. *Fischer,* Dr. L., Honorar-Professor, Bern 1852
30. *v. Freudenreich,* Dr. E., Bern 1885
31. *Friedheim,* Dr. Prof., Bern 1897
32. *Geering,* Ernst, Dr. med., Reconvillier 1898
33. *de Giacomi,* J., Dr. med., Arzt und Privatdocent, Bern . 1889
34. *Girard,* Prof. Dr. med., Arzt in Bern 1876
35. *Gosset,* Philipp, Ingenieur, Wabern bei Bern . . . 1865
36. *Graf,* Dr. J. H., Professor der Mathematik, Bern . . 1874
37. *Gressly,* Alb., Oberst, Maschinen-Ingenieur, Bern . . 1872
38. *Grimm,* J., Präparator, Bern 1876
39. *Gruner,* Dr. Paul, Gymnasiallehrer und Docent, Bern . 1892
40. *Guillebeau,* Professor Dr., Bern 1878
41. *Haaf,* C., Droguist, Bern 1857
42. *Haas,* Dr. med., Sigismund, Arzt in Muri bei Bern . . 1890
43. *Häni,* Rud., Dr. med., Arzt in Köniz 1900
44. *Hartmann,* Dr. phil., Mathemat. a. Eisenbahndepartement, Bern 1898
45. *Heffter,* Dr. A. W. A., Prof. der med. Chemie u. Pharmakologie 1899
46. *Held,* Leon, Chef des eidgen. topograph. Bureaus, Bern . 1879
47. *Huber,* Dr. G., Professor der Mathematik, Bern . . 1888
48. *Huber,* Rud., Dr. phil., Gymnasiallehrer, Bern . . . 1891
49. *Hug,* Otto, Dr. phil., Bern 1897
50. *Hugi,* E., Dr. phil., Assistent am geolog. Institut, Bern . 1900
51. **Jacky,* Ernst, Dr. phil., Werdtweg 21, Bern . . . 1901
52. *Jadassohn,* Dr. Prof., Bern 1897
53. *Jenner,* E., Entomolog, hist. Museum, Bern . . . 1870
54. *Jonquière,* Dr. med. Georg, Arzt in Bern 1884
55. *Käch,* P., Sekundarlehrer in Bern 1880
56. *Kaufmann,* Alfr., Dr. phil. und Gymnasiallehrer, Bern . 1886
57. *Kesselring,* H., Lehrer an der Sekundarschule in Bern . 1870
58. *Kissling,* Dr. E., Sekundarlehrer und Privatdocent, Bern . 1888
59. *Kobi,* Dr., Rektor der Kantonsschule Pruntrut . . . 1878
60. *Kocher,* Dr., Professor der Chirurgie, Bern . . . 1872
61. *von Kostanecki,* Dr., Professor der Chemie, Bern . . 1896
62. *König,* Emil, Dr. phil., Gymnasiallehrer, Bern . . . 1893
63. *Körber,* H., Buchhändler in Bern 1872
64. *Kraft,* Alex., Besitzer des Bernerhofs, Bern . . . 1872
65. *Krebs,* A., Seminarlehrer in Bern 1888
66. *Kronecker,* Dr. H., Professor der Physiologie, Bern . . 1884
67. *Kummer,* Dr. med. J., Arzt in Bern 1890
68. *La Nicca,* Dr. med. R., Arzt in Bern 1899
69. *Lanz,* Dr. Em., Arzt in Biel 1876
70. *Leist,* Dr. K., Lehrer an der Sekundarschule in Bern . 1888
71. *Lerch,* M., Professor Dr. in Freiburg 1898

72. *v. Lerber*, A., Dr. med., Arzt in Laupen 1898
73. *Lindt*, Dr. med., W. jun., Arzt und Dozent in Bern . 1888
74. *Lory*, C. L., Rentier in Münsingen 1894
75. *Lüscher*, E., Dr. med. in Bern 1895
76. *Lütschg*, J., gewesener Waisenvater in Bern . . . 1872
77. *Marckwald*, Dr. Max, Frankfurt a. M. 1889
78. *Marti*, Lehrer an der Neuen Mädchenschule in Bern . . 1892
79. **Mooser*, W., Dr., Belpstrasse 71, Bern 1901
80. *Moser*, Ch., Professor Dr. in Bern 1884
81. *Müller*, Emil, gew. Apotheker in Bern 1882
82. *Müller*, Professor Dr., P., in Bern 1888
83. *Müller*, Max, Dr. med. in Bern 1893
84. *v. Mutach*, Alfred, von Riedburg, Bern 1865
85. *Mützenberg*, Dr. med. Ernst, Spiez 1885
86. *Nanny*, Dr. Wilhelm, Arzt in Mühleberg 1890
87. *Nicolet*, L., Pharmacien, St. Imier 1892
88. *Pfister*, J. H., Mechaniker in Bern 1871
89. *Pflüger*, Dr. Professor in Bern 1889
90. *Pulver*, E., Apotheker in Interlaken 1890
91. *Pulver*, G., Vorsteher in Hindelbank 1891
92. *Renfer*, H., Dr. Prof. an der Handelsakademie in St. Gallen 1898
93. *Ris*, F., Lehrer der Physik am städtischen Gymnasium . 1869
94. *Rothen*, A., Sekundarlehrer, Bern 1900
95. *Rothenbühler*, Dr., Sekundarlehrer in Bern. . . . 1896
96. *Rubeli*, Dr. O., Professor an der Thierarzneischule, Bern . 1892
97. *Sahli*, Professor Dr. H., Bern 1875
98. *Sauter*, Dr. J., Ingenieur, Bern 1900
99. *Schaffer*, Dr., Kantonschemiker und Docent, Bern . . 1878
100. *Schapiro*, Dr. J., Bern 1900
101. *Schlachter*, Dr., Gymnasiallehrer, Bern 1884
102. *Schmid*, Dr. W., Oberst, Oberinstruktor der Artillerie, Bern 1891
103. *Schürch*, Otto, Dr. phil., Zahnarzt, Langnau . . . 1898
104. *Sidler*, Dr., Honorar-Professor, Bern 1856
105. *v. Speyer*, Dr. Prof., Direktor der Waldau . . . 1898
106. **Spiess*, Otto, Dr., Assistent in Trappes (France) . . 1901
107. *Stäger*, Rob., Dr. med., Bern 1898
108. *Steck*, Th., Dr. phil., Conservator am Naturhist. Museum Bern 1878
109. *Steiger*, Hans, Oberstlieutenant, Bern 1897
110. *Stooss*, Professor Dr. med. Max, Arzt in Bern . . . 1883
111. *Strasser*, Dr. Hans, Professor der Anatomie, Bern . . 1872
112. *Strelin*, Alexander, Dr. med., Arzt, Bern 1898
113. *Streun*, G., Dr., Lehrer auf der Rütti 1898
114. *Studer*, Bernhard, sen., Bern 1844
115. *Studer*, Bernhard, Apotheker, Bern 1871
116. *Studer*, Dr. Theophil, Professor der Zoologie, Bern . . 1868
117. *Studer*, Wilhelm, Apotheker in Bern 1877
118. *Tambor*, J., Dr. phil., Prof., Laboratorium, Bern . . 1894
119. *Tanner*, G. H., Apotheker in Bern 1882
120. *Tavel*, Professor Dr. E., Bern 1892
121. *Thiessing*, Dr., Redaktor, Bern 1867
122. **Thomann*, Dr., Apotheker in Bern 1901

123. **Truninger*, E., Cäcilienstrasse 44, Bern 1901
124. *v. Tscharner*, Dr. phil. L., Oberst, Bern 1874
125. *v. Tscharner-de Lessert*, Oberst, Bern 1878
126. *Tschirch*, Dr. A., Professor der Pharmakognosie in Bern . 1890
127. *Valentin*, Professor Dr. med. Ad., Arzt in Bern . . 1872
128. *Vögeli*, H., Dr. med., Thun 1898
129. *Volz*, Wilhelm, Apotheker in Bern 1887
130. *Wäber-Lindt*, A., Bern 1864
131. *Walthard*, Max, Dr. med. P.-D., Arzt in Bern . . . 1894
132. *Wanzenried*, Sekundarlehrer in Grosshöchstetten . . 1867
133. *v. Wattenwyl-v. Wattenwyl*, Jean, Oberst, Bern . . 1877
134. *Wilhelmi*, A., Dr. Thierarzt, Bern 1898
135. *Wollensack*, Heinrich, Dr. med., Giessbach . . . 1898
136. *Wüthrich*, Dr. phil. E., Direktor der Molkereischule Rütti 1892
137. *Wyss*, Dr. G., Buchdrucker in Bern 1887
138. *Wyttenbach-v. Fischer*, Dr., Arzt in Bern 1872
139. *Zeller*, R., Dr. phil., Geolog, Bern 1893
140. *Zumstein*, Dr. med., J. J., in Marburg . . . 1885

Mitgliederzahl auf 31. Dezember 1901: 144.

Im Jahre 1901 ausgetreten:

Kürsteiner, Dr. med., Bern 1895
Marti, Christian, Sekundarlehrer in Nidau 1889
Rothenbach, Alfred, Alt-Gasdirektor in Bern 1901
Schütz, Assistent des Kantonschemikers, Bern 1896

Im Jahre 1901 gestorben:

Berdez, H., Professor an der Thierarzneischule, Bern . . 1879
Koller, G., Ingenieur, Bern 1872

Korrespondierende Mitglieder:

1. *Flesch*, Dr. M., Arzt in Frankfurt 1882
2. *Gasser*, Dr. E., Professor der Anatomie in Marburg . . 1884
3. *Graf*, Lehrer in St. Gallen 1858
4. *Grützner*, Dr. A., Professor in Tübingen 1881
5. *Hiepe*, Dr. Wilhelm, in Birmingham 1874
6. *Imfeld*, Xaver, Topograph in Hottingen 1880
7. *Krebs*, Gymnasiallehrer in Winterthur 1864
8. *Landolf*, Dr., in Chili 1881
9. *Lang*, Dr. A., Professor in Zürich 1876
10. *Leonhard*, Dr., Veterinär in Frankfurt 1870
11. *Lichtheim*, Professor in Königsberg 1881
12. *Metzdorf*, Dr., Prof. der Vet.-Schule in Proskau, Schlesien. 1870
13. *Petri*, Dr. Ed., Professor der Geographie in St. Petersburg 1883
14. *Regelsperger*, Gust., Dr., rue la Boétie 85, Paris . . 1883
15. *Rothenbach*, Lehrer am Lehrerseminar in Küssnacht . . 1871
16. *Wälchli*, Dr. med. D. J., Buenos Ayres 1873
17. *Wild*, Dr. Professor, in Zürich 1859

Rechnung der bernischen naturforschenden Gesellschaft pro 1900.

Einnahmen.

Saldo letzter Rechnung	Fr.	324.65
An Jahresbeiträgen	»	1120.—
An Eintrittsgeldern	»	25.—
An Zinsen	»	128.80
	Fr.	1598.45

Ausgaben.

Mitteilungen	Fr.	649.50
Bibliothek	»	718.55
Sitzungen	»	99.60
Lesezirkel	»	307.70
Verschiedenes	»	66.25
	Fr.	1841.60

Bilanz.

Ausgaben	Fr.	1841.60
Einnahmen	»	1598.45
Passiv-Saldo	Fr.	243.15

Reservefonds

ist im Jahre 1900 unverändert geblieben mit . . Fr. 1800.—

Koch-Fundus

ist nunmehr angelegt in einem Kassa-Schein der Hypothekar-Kassa des Kantons Bern à 4% . . . . . » 500.—

Vermögensetat.

Das Vermögen der bernischen naturforschenden Gesellschaft besteht auf 31. Dezember 1900 in dem Reservefonds	Fr.	1800.—
Kochfundus	»	500.—
	Fr.	2300.—
Weniger dem Passiv-Saldo obiger Rechnung	»	243.15
Demnach netto	Fr.	2056.65
Auf 31. Dezember 1899 betrug das Vermögen	Fr.	2124.65
Auf 31. Dezember 1900 beträgt dasselbe	»	2056.85
Es ergiebt sich demnach eine Verminderung um	Fr.	67.80

Der Kassier:
B. Studer-Steinhäuslin.

Genehmigt in der Sitzung vom 30. November 1901.

G. Sidler.

Die Schale Vivianis.

(Eingereicht Febr. 1901.)

Die Aufgabe Vivianis, auf der Kugel ein quadrirbares Flächenstück zu begrenzen, lässt eine völlig elementare Behandlung zu.

1. In jedem eingehendern Lehrbuche der Stereometrie finden wir die Quadratur der sogen. hufförmigen Abschnitte des geraden Kreiscylinders. Wir können daher den folgenden Satz als bekannt voraussetzen:

Sei A C B die halbkreisförmige Basis eines geraden Cylinders (Fig. 1), so legen wir durch den Durchmesser A O B derselben eine Ebene A D B, die mit der Basis einen Winkel $= 45^0$ bilde. Dies vorausgesetzt, ist der Flächeninhalt des von der Basis A C B und der Schnittlinie A D B jener Ebene mit dem Cylindermantel begrenzten Teiles des Cylindermantels $= 2\,R^2$, wo R der Radius des Cylinders.

In der That legen wir durch den höchsten Punkt D der Schnittlinie A D B parallel zur Basis die obere Grenzebene D G E des Cylinders, welche die Axe O P in P schneide, so ist C D = O C, also O P = R. Eine durch die Axe gehende Ebene P O l k, die mit der Ebene P O A E den Winkel λ bilde, schneide nun die Cylinderfläche in der Erzeugenden l k, und l k treffe die Schnittlinie A D B im Punkte S; ferner sei n h die Projektion von l k auf die Ebene A B G E. Endlich sei l′ k′ eine benachbarte Erzeugende des Cylinders und n′ h′ deren Projektion. Nun ist $l S = n l = R \sin \lambda$ und somit Flächenelement $ll' SS' = ll' . R \sin \lambda$.

Das Element ll′ des Äquators bildet mit n n′ den Winkel $90^0 - \lambda$, und daher ist $nn' = ll' . \sin \lambda$ und Flächenelement $nn' hh' = R . nn' = ll' . R \sin \lambda$.

Die Flächenelemente ll′SS′ und nn′hh′ sind also einander gleich und somit Huffläche ACB, ASDS′′B = Rechteck ABGE $= 2\,R^2$, wie z. z.

2. Betrachten wir nun die Kugel (Fig. 2), deren Durchmesser AOB ist, die also den Cylindermantel längs des Äquators ACB und die obere Grenzfläche im Pole P dieses Äquators berührt. Dies vorausgesetzt, schneiden wir Cylinder und Kugel durch ein System von Ebenen parallel zur Basis ACB. Eine dieser Ebenen schneide die Axe OP im Punkte J und die Ebene ADB in der Geraden SS'' (Fig. 1), und S, S'' seien die Punkte, wo die Gerade SS'' die Cylinderfläche schneidet, so mögen die Radien JS und JS'' des Cylinders die Kugelfläche in den Punkten s und s'' durchdringen (Fig. 2). Der Ort der Punkte s und s'' ist nun eine sphärische Kurve AsuPu''s''B. Nach einem elementaren Satze der Stereometrie ist aber der Inhalt der vom Äquator ACB und von der obigen Kurve AsuPu''s''B begrenzten Teiles der Kugelfläche gleich dem Inhalte der Projektion dieser Fläche auf den dem Kugeläquator umschriebenen Cylinder, d. h. gleich dem Teile der Cylinderfläche zwischen dem Äquator ACB und der Kurve ASDS''B (Fig. 1). Wir erhalten daher den Satz: *Der vom halben Aequator ACB und von der Ortskurve AsPs''B der Punkte s und s'' begrenzte Teil der Kugelfläche ist quadrirbar: der Inhalt dieses sphärischen Flächenstückes ist* $= 2R^2$, *wo R der Radius der Kugel, oder gleich der Fläche des dem Meridiane APB umschriebenen Rechtecks ABGE.*

3. Auf der obigen Kugel (Fig. 2) sei Psl der durch s gehende Meridian und $\lambda = AOl$ die geographische Länge dieses Meridians; ferner sei K die Projektion des Punktes s auf die Äquatorebene und (Fig. 1) n die gemeinsame Projektion der Punkte S und l auf den Durchmesser AOB, so ist $\sphericalangle lnS = 45^0$, also $Sl = nl = R \sin \lambda$. Anderseits $Sl = sK$. Somit $sK = R \sin \lambda$ und daher $\sphericalangle sOK = \lambda$, d. h.: die geographische Breite des Punktes s ist gleich dessen geographischer Länge. Wir erhalten daher von der Vivianischen Ortskurve der Punkte s und s'' auch folgende Erzeugung: *Auf der kugelförmigen Erdoberfläche bewege sich ein Reisender vom Ausgangspunkte A der geographischen Längen auf dem Aequator so gegen den Pol P hin, dass seine geographische Breite stets gleich seiner geographischen Länge sei, so beschreibt derselbe den Zweig AsP der Vivianischen Kurve. Zählt man aber vom Diametralpunkt B von A aus die Längen im entgegengesetzten Sinne, so beschreibt ein Reisender, der sich in analoger Weise von B aus zum Pole P bewegt, den zu AsP symmetrischen Zweig Bs''P der Vivianischen Kurve.*

Fig. 1

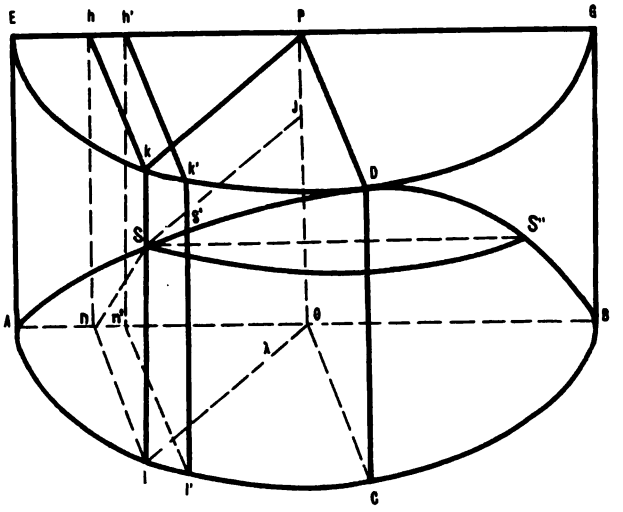
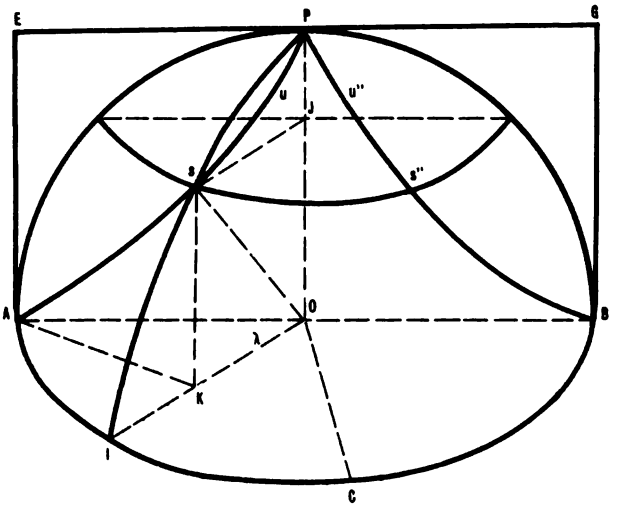


Fig. 2



4. Ziehen wir in Fig. 2 die Gerade AK, so sind die Dreiecke AOK und sOK kongruent, denn sie haben je zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel λ gleich. Daher steht AK senkrecht zu OK und der Ort des Punktes K ist der um OA als Durchmesser beschriebene Kreis. Die Projektion des Zweiges AsuP der Vivianischen Kurve auf die Ebene des Äquators ACB ist also der um AO als Durchmesser beschriebene Halbkreis. Hieraus die gewöhnliche Erzeugungsweise der Vivianischen Kurve (Fig. 3) *als Durchschnitt der Kugelfläche mit dem geraden Cylinder, dessen Basis der in der Aequatorebene der Kugel liegende um den Aequatorradius A O als Durchmesser beschriebene Kreis ist.* Bezeichnen wir mit H die Mitte der Strecke AO, so geht durch H die Axe HL dieses Cylinders, und wir wollen diesen Cylinder, im Gegensatze zu dem in § 1 betrachteten Cylinder O, den Cylinder H nennen.

5. Die Kurve ADB auf der Cylinderfläche O (Fig. 1) ist die Hälfte einer *Ellipse*, deren halben Axen respektive $R\sqrt{2}$ und R sind. Der Brennpunkt dieser Ellipse liegt auf der dem Cylinder eingeschriebenen Kugelfläche in Fig. 2 und ist die Mitte des Quadranten PC. Nun ist $Sl = nl$ (Fig. 1); wird daher die Cylinderfläche abgewickelt, so geht die Kurve ADB in eine *Sinusoïde* über. Für die Fläche des betrachteten Cylinderhufes ADB erhalten wir somit

$$\int_0^{\pi} R \sin\lambda \,.\, R \,.\, d\lambda = R^2 \,.\, \Big(-\cos\lambda\Big)_0^{\pi} = 2R^2, \text{ wie oben in § 1.}$$

6. Nehmen wir A zum Ursprung rechtwinkliger Koordinaten, die Äquatorebene ACB zur x, y Ebene und legen die positive x Axe durch O (Fig. 3), so ist die Gleichung der Kugelfläche $x^2 - 2Rx + y^2 + z^2 = 0$, und die Gleichung des in § 4 genannten Cylinders H $x^2 - Rx + y^2 = 0$. Durch die Vivianische Kurve geht daher das Büschel von Rotationsflächen zweiten Grades

$$(1+k)x^2 - (2+k)Rx + (1+k)y^2 + z^2 = 0,$$

wo k eine willkürliche Konstante. Die Äquatorkreise dieser Flächen liegen in der x, y Ebene und berühren einander im Punkte A, die Mittelpunkte erfüllen die x Axe und die Rotationsaxen sind der z Axe parallel. Da alle Büschelflächen durch die Vivianische Kurve gehen, so gehen die in die z, x Ebene fallenden Meridiane dieser Flächen durch die Pole P und P′ der gegebenen Kugel und berühren einander im Punkte A.

Wenn k positiv, so ist die betreffende Büschelfläche ein verlängertes Rotationsellipsoïd und sämtliche Meridiane der Fläche haben dann anf der Rotationsaxe ein gemeinsames Paar reeller Brennpunkte. Die Abscisse des Mittelpunktes M des Ellipsoïdes und zugleich der Radius AM des Äquators ist $\alpha = \frac{2+k}{1+k} \cdot \frac{R}{2} = \frac{R}{2} + \frac{1}{1+k} \cdot \frac{R}{2}$, und die halbe Rotationsaxe ist $\gamma = \frac{2+k}{\sqrt{1+k}} \cdot \frac{R}{2}$. Wenn k von o an ins positiv Unendliche wächst, so nimmt α von R bis $\frac{R}{2}$ ab. Die Äquatorkreise dieser verlängerten Rotationsellipsoïde bestehen also in dem von den Äquatorkreisen ACB und AKO der Kugel und des Cylinders H erzeugten Büschel sich in A berührender Kreise aus denjenigen Kreisen, die den Raum zwischen jenen zwei Grundkreisen erfüllen, oder deren Mittelpunkte die Strecke OH erfüllen. Während die halbe kleine Axe α der Meridianellipsen von R bis $\frac{R}{2}$ abnimmt, wächst die halbe grosse Axe γ von R bis ∞. Die Distanz der Brennpunkte von der Äquatorebene nimmt also von 0 bis ∞ zu und es wird somit ein Ellipsoïd geben, wo die Brennpunkte auf der Kugelfläche liegen. Bestimmen wir dieses Ellipsoïd:

Wenn F ein Brennpunkt dieses speziellen Ellipsoïdes, so ist $AM = \alpha$, $AF = \gamma$ und das rechtwinklige Dreieck AFB giebt $\gamma^2 = 2R\alpha$, d. h. $\frac{(2+k)^2}{1+k} \cdot \frac{R^2}{4} = \frac{2+k}{1+k} R^2$, woraus $2+k=4$ oder $k=2$. Das betreffende Ellipsoïd ist also $3x^2 - 4Rx + 3y^2 + z^2 = 0$, und hier ist $\alpha = \frac{2R}{3}$, $\gamma = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. Wenn also M der Mittelpunkt dieses Ellipsoïdes, so ist $AM = \frac{2}{3} AO = \frac{1}{3} AB$, und die Brennpunkte F und F′ desselben sind die Punkte, wo die in M in der Ebene APB zu AB errichtete Senkrechte den Kugelmeridian APB trifft. Ein beliebiger Meridian dieses speziellen Rotationsellipsoïdes treffe die Kugelfläche O und somit die Vivianische Kurve im Punkte s, so besteht für die Sehnen Fs und F′s die Relation $Fs + F's = 2AF$ oder $Fs + F's = \frac{4R}{\sqrt{3}}$.

Der Strahl AF treffe die Gerade OP in f und der Strahl BF treffe die in A an den Kreis APB gelegte Tangente in q (Fig. 3), so

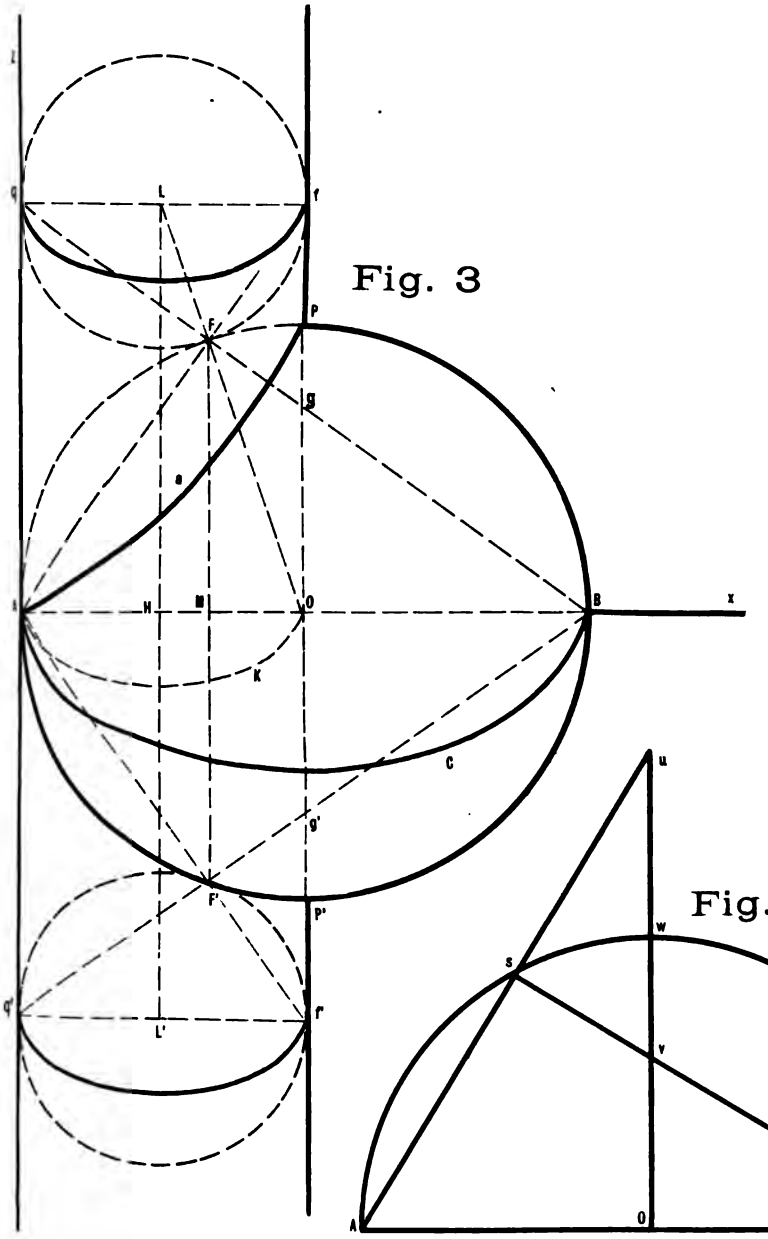


Fig. 3

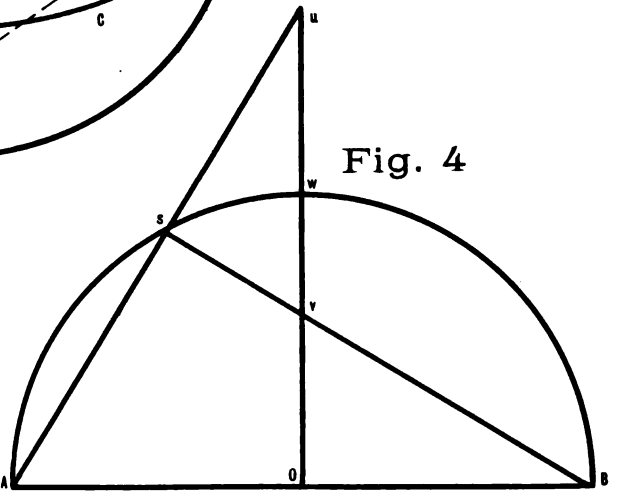


Fig. 4

hat man $\frac{Of}{MF} = \frac{AO}{AM} = \frac{3}{2}$ und $\frac{Aq}{MF} = \frac{AB}{MB} = \frac{3}{2}$. Somit $Of = Aq$, und zwar $Of = Aq = \frac{3}{2} MF = \frac{3}{2}\sqrt{AM \cdot MB} =$

$= \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2R}{3} \cdot \frac{4R}{3}} = R\sqrt{2}$, oder $Of = Aq = AP$.

Bestimmt man also auf dem Meridian APB der Kugelfläche O die beiden Punkte F und F′ derart, dass man durch den Punkt M auf AB, wo $AF = \frac{1}{3} AB$, zu AB eine Senkrechte zieht, welche jenen Meridian in F und F′ trifft, oder dass man auf OP die Strecken $\left.\begin{matrix} Of \\ Of' \end{matrix}\right\} = AP$ *macht und die Strahlen Af und Af′ zieht, welche den Kreis APB in F und F′ wieder treffen, oder dass man auf der in A an den Meridian APB gelegten Tangente die Strecken* $\left.\begin{matrix} Aq \\ Aq' \end{matrix}\right\} = AP$ *macht und die Strahlen Bq und Bq′ zieht, welche den Kreis APB wieder in F und F′ treffen, so wird, wenn man in F und F′ die Enden eines undehnbaren Fadens befestigt, dessen Länge gleich der gebrochenen Linie FAF′ ist, ein Stift s, der diesen Faden stets zu einer gebrochenen Geraden Fs + F′s spannt, auf der Kugelfläche O die Vivianische Kurve beschreiben.*

Wir können daher *F und F′ die Brennpunkte der Vivianischen Kurve* nennen.

7. Da $Of = Aq$, so ist die Gerade qf parallel zu AB und das Dreieck qFf ist zu BFA ähnlich und liegt zu diesem perspektivisch mit dem perspektivischen Zentrum F und da $qf = \frac{1}{2} BA$, so ist das Ähnlichkeitsverhältnis $\frac{1}{2}$. Der Strahl OF geht daher durch die Mitte von qf, d. h. durch den Punkt L, wo qf die Axe HL des Cylinders H schneidet, und es ist $LF = \frac{1}{2} FO$, d. h. $LF = \frac{1}{2} R$. Beschreiben wir daher um L als Mittelpunkt eine Kugel mit dem Radius $\frac{R}{2}$, so berührt diese Kugel die gegebene Kugel O im Punkte F und ist zugleich dem Cylinder H eingeschrieben.

Wir erhalten so den Satz von d'Arrest: *Ist eine Kugel O gegeben, und beschreiben wir einen geraden Cylinder, dessen Basis in der Aequatorebene ACB der Kugel der um den Radius AO dieses Aequators als Durchmesser beschriebene Kreis AKO ist und konstruieren endlich die beiden Kugeln, die dem Cylinder eingeschrieben sind und die zugleich die gegebene Kugel O von aussen berühren, so sind die Berührungspunkte F und F' jener beiden Kugeln mit der Kugel O die Brennpunkte der Vivianischen Kurve, die durch die Schnittlinie des Cylinders mit der Kugelfläche O gebildet wird.*

Für die Mittelpunkte L und L' jener beiden Kugeln hat man $\left.\begin{matrix} HL \\ HL' \end{matrix}\right\} = R\sqrt{2} = AP$. Die Punkte L und L' sind auch bestimmt als Schnittpunkte der Cylinderaxe mit dem zum Kreise APB konzentrischen Kreise vom Radius $\frac{3R}{2}$. Wenn f und q die Berührungspunkte der Kugel L mit den in der Ebene APB liegenden Erzeugenden OP und Aq des Cylinders, so liegen die Punkte A, F, f und B, F, q je in einer Geraden.

8. Für $k = -2$ geht die Büschelfläche des § 4 in den rechtwinkligen Rotationskegel $x^2 + y^2 = z^2$ über, dessen Spitze A und dessen Axe die z Axe ist. *Die Vivianische Kurve ist daher auch die Schnittlinie einer Kugelfläche mit einem rechtwinkligen Rotationskegel, dessen Spitze ein Punkt A der Kugel und dessen Axe eine Tangente der Kugelfläche im Punkte A ist.*

Für $x = R$ erhalten wir aus der Gleichung dieses Kegels die *stereographische Projektion der Vivianischen Kurve für den Pol A* $z^2 - y^2 = R^2$. Diese Projektion ist also in der Meridianebene PCP' der Kugel *die rechtwinklige Hyperbel, die zu Scheiteln die Punkte P und P' hat.* Seien f und f' die Brennpunkte dieser Hyperbel, so ist $Of = R\sqrt{2}$. Anderseits $\overline{MF^2} = AM \cdot MB = \frac{2R}{3} \cdot \frac{4R}{3}$, also $MF = \frac{2}{3} R\sqrt{2}$. Somit $MF = \frac{2}{3} \cdot Of$. Der Strahl AF trifft also OP im Brennpunkt f der Hyperbel. *Nimmt man also vom Punkte A der Kugel aus die stereographische Projektion der Vivianischen Kurve, so gehen die Brennpunkte F und F' dieser Kurve in die Brennpunkte f und f' der gleichseitigen Hyperbel über, welche jene stereographische Projektion bildet.*

Sei AwB (Fig. 4) ein beliebiger durch den Durchmesser AB gehender Hauptkreis der gegebenen Kugel, s ein auf demselben liegender Punkt der Vivianischen Kurve, und seien u und v die stereogr. Projektionen von s respektive von den Punkten A und B aus, so ist $\frac{Ou}{OA} = \frac{Bs}{As}$ und $\frac{Ov}{OB} = \frac{As}{Bs}$, also $Ou \,.\, Ov = R^2$. Wenn also (u) die stereographische Projektion irgend einer sphärischen Kurve (s) von einem Punkte A der Kugel aus und wir transformieren (u) mittelst reciproker Radien in Bezug auf den Grosskreis der Kugel, dessen sphärisches Centrum A ist, als Grundkreis, so erhalten wir die stereographische Projektion (v) von (s) vom Diametralpunkte B von A aus. Nun ist die Gleichung der Hyperbel $z^2 - y^2 = R^2$ in Polarkoordinaten $r^2(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2) = R^2$. Die in Bezug auf den konzentrischen Grundkreis von Radius R transformierte Gleichung ist $r^2 = R^4 \cdot \frac{\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2}{R^2}$ oder wieder in rechtwinkligen Koordinaten $z^2 + y^2 = \frac{R^2(z^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$, d. h. $(z^2 + y^2)^2 = R^2(z^2 - y^2)$. *Die stereographische Projektion der Virianischen Kurve vom Diametralpunkte B von A aus ist also die Lemniskate, deren Scheitel P und P' sind.* Seien g und g' zwei Punkte der z Axe in der Distanz $\pm$ c vom Mittelpunkt O, so hat man für die Radien Vektoren ϱ und ϱ', die von diesen Punkten nach einem Punkte (z, y) der Kurve gehen, $\varrho^2 = y^2 + (z - c)^2$, $\varrho'^2 = y^2 + (z + c)^2$, also $\varrho^2\varrho'^2 = (z^2 + y^2)^2 - 2c^2(z^2 - y^2) + c^4$, d. h. zufolge der Kurvengleichung. $\varrho^2\varrho'^2 = (R^2 - 2c^2)(z^2 - y^2) + c^4$. Wenn also $c = \frac{R}{\sqrt{2}}$, so kommt $\varrho\varrho' = c^2$. Diese zwei festen Punkte g und g' auf der Hauptaxe $PP' = 2R$ der Kurve, wo die von diesen Punkten nach einem variabeln Punkte der Kurve gehenden Radien Vektoren ϱ und ϱ' ein konstantes Produkt bilden, sind *die Brennpunkte der Lemniskate.* Die Distanz dieser Punkte vom Zentrum O der Kurve ist also $Og = \frac{R}{\sqrt{2}}$. Nun war $Of = R\sqrt{2}$, also $Of \,.\, Og = R^2$. Die beiden Punkte f und g sind also einander in Bezug auf den Kreis vom Durchmesser PP' harmonisch zugeordnet und somit sind g und f die stereographischen Projektionen von den Diametralpunkten B und A aus eines nämlichen Punktes F der Kugelfläche. Oder da

$Og = \frac{R}{\sqrt{2}}$, so ist (Fig. 3) $Og = \frac{1}{2} Aq$; der Strahl Bq, d. h. der Strahl BF schneidet also OP im Brennpunkt g der Lemniskate, w. z. z.

Nimmt man also von den Endpunkten A und B des Kugeldurchmessers A B aus die stereographischen Projektionen der Vivianischen Kurve, so sind dieselben respektive eine rechtwinklige Hyperbel mit den Scheiteln P und P' und eine Lemniskate mit den Scheiteln P und P'. Die Brennpunkte dieser beiden Kurven sind die stereographischen Projektionen eines nämlichen Punktenpaares F, F' der Kugelfläche und F, F' sind hinwieder die Brennpunkte der Vivianischen Kurve.

Dr. Fritz Machacek-Wien.

Beiträge

zur

Kenntnis der lokalen Gletscher des Schweizer und französischen Jura.

Obwohl bereits Agassiz auf das Vorhandensein von rein jurassischen Moränen im Innern des Schweizer Jura aufmerksam gemacht hatte[1]), so erfuhren dieselben doch erst 1891 durch *Auguste Jaccard* eingehendere Würdigung, der seinen «Contributions à l'étude du terrain erratique dans le Jura» (Bull. soc. sc. nat. Neuchâtel XX. 1891 pag. 124 ff.) ein reichhaltiges Verzeichnis von Fundstellen jurassischer Erratica beigab. In der jüngsten Zeit ist die Frage nach der Grösse und Bedeutung der lokalen Juragletscher durch *H. Schardt* aufgegriffen worden.[2]) Schardt gelangte anlässlich der Revision des Blattes XVI der geologischen Karte der Schweiz zu der Ansicht, dass nach Rückzug des letzten Rhônegletschers die lokalen Gletscher des Jura eine Rekurrenzphase mitgemacht, nämlich den Fuss des Gebirges verlassen und sich weit in die den Genfer See umrahmenden Ebenen erstreckt hätten. So soll u. a. ein grosser Juragletscher vom Col du Marchairuz zwischen Bière und Gimel abgeflossen und gelegentlich bis Aubonne und Savigny gereicht haben. *Baltzer* ist dieser Auffassung entgegengetreten[3]) und sieht in den von Schardt für Juramoränen angesprochenen und kartierten Vorkommnissen teils Seitenmoränen, teils fluvioglaciale Bildungen des Rhônegletschers; überhaupt hält Baltzer eine «Rekurrenzphase» der Juragletscher klimatologisch für unmöglich und die Existenz von 10—12 km langen Gletscherzungen für unvereinbar mit den entsprechenden kleinen Einzugsgebieten.

[1]) Agassiz, Untersuchungen über die Gletscher 1841, pag. 282.

[2]) Schardt, über die Rekurrenzphase der Juragletscher nach dem Rückzug des Rhônegletschers, Eclogae, geologiae helvetiae V 1898, pag. 511 ff. und Archives des sc. nat. Genève 1898, 39, pag. 482.

[3]) Baltzer, Beiträge zur Kenntnis des diluvialen Rhônegletschers, Mitt. Berner naturf. Gesellsch. 1899 und Eclogae VI 1900, pag. 378.

Eine kurze Durchstreifung des Schweizer Jura, die ich zum Zweck morphologischer Studien im August dieses Jahres unternahm, führte mich auch dazu, die Frage nach der Rekurrenzphase der Juragletscher an andern von Schardt erwähnten Punkten zu studieren und weiteres Material zur Kenntnis der lokalen Gletscher des Jura zu sammeln.

Oberhalb Gex tritt der Journan aus der Jurakette in das zwischen Jura und Genfer-See gelegene, von den fluvio-glacialen Ablagerungen des Rhônegletschers bedeckte Molasseplateau. In seinem Oberlaufe durchströmt er ein kleines, von der Gruppe des M. Colombier (1689 m) überragtes Combenthälchen, in dem durch den Bach an mehreren Stellen eine jurassische Moräne aufgeschlossen ist, die als solche von Schardt auf der 2. Auflage von Blatt XVI der geolog. Karte der Schweiz verzeichnet ist. Das Material ist durchaus jurassisch, geschrammte Geschiebe sind nicht selten. Sobald der Bach durch eine enge Klus das Gebirge verlassen hat, erscheinen zu beiden Seiten mächtige Ufermoränen, in denen neben dem jurassischen Material, aber immer sehr spärlich, auch einige alpine Geschiebe sich vorfinden. Ich schätze das Verhältnis zu 1 A : 100 J.[1]) Oberhalb des Städtchens Gex, am rechten Bachufer ist die Moräne durch 2 grosse Kiesgruben aufgeschlossen und zeigt typische Deltaschichtung. Wir befinden uns hier offenbar am Zungenende eines kleinen Juragletschers, dessen Moränenmaterial von den Gletscherbächen in einen vor dem sich zurückziehenden Rhônegletscher gebildeten Stausee abgelagert wurde. Zur Zeit des höchsten Standes des alpinen Gletschers drängte dieser den Juragletscher etwas zurück, wodurch sich das Vorkommen vereinzelter alpiner Erratica in der Juramoräne erklärt. In der unterhalb Gex gegen Genf zu sich erstreckenden Ebene fehlen ähnliche Moränengebilde durchaus. Die oberflächliche Decke des Molasseplateaus, die zwischen Gex und Pitegny in mehreren, zum Teil aufgelassenen Kiesgruben aufgeschlossen ist, zeigt eine ganz andere Zusammensetzung. Das Material ist zu ziemlich gleichen Teilen alpin und jurassisch (ca. 1 J : 1,5 A) und zumeist deutlich geschichtet; es sind fluvioglaciale Ablagerungen des Rhônegletschers, deren jurassische Beimengung sich leicht durch Verschleppung des Materials aus dem Gebirge durch die Bäche der Interglacialzeiten erklärt.[2])

[1]) Diese Bezeichnungsweise (A = alpin, J = jurassisch) entnehme ich Baltzers oben erwähnter Arbeit.

[2]) Vgl. Baltzer a. a. O. 382.

Ganz anders stehen die Verhältnisse nach der Darstellung Schardt's. Schardt nimmt an, dass der Journangletscher beim Rückzug des Rhônegletschers, des Seitendruckes entlastet, in die Ebene vorstiess und seine letzten Endmoränen 6—7 km von seinem Austritt aus dem Gebirge entfernt ablagerte. Versucht man, nach den von Schardt gezeichneten Endmoränen diesen Rekurrenzgletscher zu rekonstruieren, so erhält man einen Gletscher mit einem Nährgebiet von ca. 8 km², dem eine Zunge, also ein Zehrgebiet von ca. 23 km² gegenüber stünde, wobei die Firngrenze dieses Gletschers, auf die heutigen Niveauverhältnisse projiziert, in ca. 900 m Höhe, d. i. beim Austritt des Gletschers aus der Combe angenommen ist. Ein solches Verhältnis zwischen Zehr- und Nährgebiet ist auch unter Annahme einer mächtigen Eisanstauung äusserst unwahrscheinlich, ganz abgesehen von der Frage, ob während der Periode der Abschmelzung des alpinen Gletschers der vorher tributäre Juragletscher einen Vorstoss von 6 km Länge ausführen konnte. Diese Zweifel finden ihre Berechtigung in den thatsächlichen Beobachtungen. Die von Schardt bei den Dörfern Chevry, Murit, Ségny, Tutigny gezeichneten Endmoränenwälle des Rekurrenzgletschers sind teils unauffindbar, teils nur unbedeutende Bodenwellen der fluvioglazialen Terrassenlandschaft; das reichliche Vorkommen alpiner Geschiebe ist unvereinbar mit der Annahme jurassischer Grund- und Endmoränen. Zieht man die Grenze des Juragletschers dort, wo die scharfe Änderung in der Zusammensetzung des Moränenmaterials und das Auftreten der Deltaschichtung in demselben sie anzeigen, so erhält man einen Thalgletscher von bescheidenen Dimensionen, dessen Zehrgebiet von 8 km² ein Abschmelzungsgebiet von ca. 3 km² zur Verfügung hatte, ein Verhältnis, wie es sich bei zahlreichen rezenten Gletschern konstatieren lässt. — Mir erscheint demnach Schardt's Annahme eines rekurrenten Journangletschers als unhaltbar; das ebene Gelände südlich von Gex, das Schardt als Endmoränenlandschaft eines Juragletschers ansieht, gehört ebenso wie die Umgebung von Gimel, Aubonne und Lavigny dem alpinen Quartär an.

Ganz ähnliche Verhältnisse finden sich am Rande des Gebirges weiter gegen N. Das Anstehende des Gebirgsfusses ist überall von Jura-Moränen verhüllt; im ebenen Gelände hingegen herrscht das Fluvioglazial des Rhônegletschers. N-W. von Divonne verzeichnet Schardt's Karte mehrere Kiesgruben in den sog. Moränen der Rekurrenzgletscher. Das Material ist kiesig und sandig, durchaus

gerundet und geschichtet und grösstenteils alpin. Nach den Oberflächenformen scheint hier eine von der Divonne und ihren Nebenbächen modellierte Terrassenlandschaft des Rhônegletschers, aber keine jurassische Endmoränenlandschaft vorzuliegen. Nördlich des kleinen Weilers Fleutron treten zu beiden Seiten der am Gebirgsfuss entlang führenden Strasse mehrere elliptisch geformte Hügel auf; ihr Material hat durchaus Moränencharakter, ist zu etwa 80 % jurassisch und zeigt in dem am weitesten gegen die Ebene zu gelegenen Aufschluss Deltaschichtung mit Fallen der Schichtung nach SW. Im Juragehänge öffnet sich hier ein karförmiger Thalzirkus, offenbar das Einzugsgebiet eines Juragletschers; seine Endmoränen sind uns erhalten in den erwähnten Hügeln bei Fleutron, die Deltaschichtung erklärt sich ebenso wie bei Gex durch Stauseen zwischen dem sich zurückziehenden Rhônegletscher und dem Juragletscher. Nun wiederholen sich dieselben Erscheinungen am Rand des Gebirges bis gegen Gingins.

Der Jurakamm gewinnt gegen NE. an Höhe und erreicht in der Dôle (1681 m) seinen höchsten Punkt auf schweizerischem Boden. Ihr breiter Rücken überragt gegen SE. einen prächtigen, glazial ausgestalteten Thalkessel, durch kleine Dolinen und grabförmige Hügel, sichtlich Moränenwälle, gegliedert. Von hier floss die Hauptmasse des angesammelten Firnes über einen kleinen Rücken und durch das Thälchen des Châlet de Vuarne in das Thal von St. Cergues und zur Ebene hinab. Ca. 10 Minuten oberhalb Gingins an dem Wege gegen St. Cergues befindet sich eine auf Schardt's Karte verzeichnete Kiesgrube. Das Material ist rund, geschrammt, verworren geschichtet, mit Spuren von Deltaschichtung, $J : A = 2 : 1$; hier scheint das Ende des Dôle-Gletschers gelegen zu sein. Nach Schardt reichte dieser von St. Cergues herabsteigende Gletscher gelegentlich bis in die Nähe von Nyon und zog sich sodann bis auf die Linie Gingins, Trelex, Coinsins und Begnins zurück.[1]) Der Vorstoss bis Nyon, der eine ca. 8 km lange Gletscherzunge erfordert, steht weder in einem richtigen Verhältnis zur Grösse des Einzugsgebietes, noch lässt er sich durch entsprechende Beobachtungen beweisen. Vielmehr scheint eine Ausdehnung des Dôle-Gletschers bis in die Gegend von Gingins und Trelex bereits der Maximalstand des Gletschers gewesen zu sein, wie die immerhin beträchtliche Beimischung von alpinem Material in der Moräne von Gingins eine Folge kleiner Schwankungen des Rhône- und des Jura-Gletschers, beweist. Weiter gegen das Gebirge zu wird

[1]) Schardt a. a. O. Eclogae V, pag. 512.

das Moränematerial rein jurassisch. Eine Kiesgrube bei Côte 624 m (Dufour-Atlas) an der Einmündung der Strasse von Gingins in die von Trelex nach St. Cergues führende Hauptstrasse schliesst eine typische Juramoräne mit Stauchungen und Fältelungen auf. Im Ort St. Cergues sind anlässlich eines Hausbaues 2 Kiesgruben erschlossen, in denen jurassische Grundmoräne, ca. 3 m mächtig, ausgebeutet wird. Diese kleidet den ganzen Thalboden von St. Cergues aus, denn sie ist oberhalb des Ortes unmittelbar an der Strasse gegen Les Rousses abermals aufgeschlossen. Man findet allenthalben schön gekrizte Geschiebe in einem kalkigen Lehm eingebettet, ohne jede Beimischung alpinen Materiales. Verfolgt man die Strasse gegen Les Rousses weiter, so trifft man ca. 2,5 km von St. Cergues abermals eine grosse Kiesgrube; hier ist jurassische Grundmoräne, ca. 2 m mächtig, von 1 m mächtigen geschichteten Mergelsanden überlagert, letztere wahrscheinlich ein Auswaschungsprodukt der Grundmoräne. Die Gletscher der Dôle flossen also durch das Thälchen von Vuarne gegen den Col de St. Cergues und sperrten dem alpinen Gletscher den Weg über diesen Pass nach Westen. Die bisherige Annahme, dass ein Arm des Rhônegletschers den Col de St. Cergues überschritt,[1]) erscheint mir also auf Grund der oben angeführten, bisher unbekannten Aufschlüsse nicht berechtigt. Denn wenn auch, wie wahrscheinlich, diese Vorkommnisse der letzten Eiszeit angehören, bei welcher der Rhônegletscher den Jura überhaupt nicht überschritt, so muss doch auch zur Zeit der Maximalvereisung ein mindestens ebenso mächtiger Dôle-Gletscher schon vor der Ankunft des alpinen vorhanden gewesen sein und diesem den Zutritt gewehrt haben.

Die Festung Les Rousses liegt auf einer weiten, ca. 1150 m hohen, grösstenteils aus Kreideschichten aufgebauten Hochfläche, die gegen SW steil zum tiefeingeschnittenen Thal der Bienne abfällt und sich nach NO zu dem abflusslosen Thal der Orbe und des Lac de Joux zuspitzt. Sie war zur Eiszeit von einem Plateaugletscher bedeckt, der teils nach NW. ins Thal der Bienne, teils nach NE. abfloss. Seine Moränen fand ich unmittelbar vor Les Rousses am östlichen Fusse des Hügels, der das Fort le Sagy trägt. Auch unterhalb des-

[1]) Vgl. u. a. Vezian, les anciens glaciers du Jura (Annuaire du club alpin français III, 1876, pag. 499 u. 502; Falsan und Chantre Monographie géologique des anciens glaciers et du terrain erratique de la partie moyenne du bassin du Rhône Lyon 1879, 2. Bd., pag. 182. Auch Schardt's Karte verzeichnet längs der Linie St. Cergues und Les Rousses nirgends jurassisches Erraticum.

selben gegen W. zu scheinen mehrere Aufschlüsse auf Moräne zu deuten. Leider macht die Nähe des Forts und das strenge Verbot «de ne pas pénétrer sur le terrain militaire» dem Fremden eine nähere Untersuchung unmöglich.

Die breite, 28 km lange abflusslose Synklinale des Orbethales von Les Rousses bis Le Pont ist teilweise erfüllt vom Lac des Rousses und Lac de Joux, zwischen denen Torfmoore, Alluvialbildungen und Moränen den Thalboden bedecken. Wir haben es hier mit einem typischen Polje, einem bassin fermé der französischen Geologen, zu thun, dessen Entstehung wahrscheinlich mit der horizontalen Transversalverschiebung zusammenhängt, die den ganzen Jura am Nordende des Joux-Sees vorbei durchsetzt. In der Eiszeit war das ganze Becken von einem jurassischen Thalgletscher erfüllt, der aus dem erwähnten Plateaugletscher von Les Rousses abfloss. Seine Moränen finden sich u. a. 1/4 Stunde südlich des Südendes des Lac des Rousses in mehreren aufgelassenen Kiesgruben aufgeschlossen (Schardt's Karte gibt hier nur anstehende Kreide an). Ferner bedecken sie die rechte Seite des Thalbodens zwischen dem Gehänge und der Orbe, von wo sie in der Litteratur öfter erwähnt werden (so z. B. Agassiz a. a. O. 282, Jaccard a. a. O. 143). Die Ebene zwischen Le Brassus und Le Sentier, südlich des Joux-Sees, ist von Moränenhügeln übersäet. Der Seeboden ist gegliedert durch 16 sublacustre Hügel, in denen wir wahrscheinlich Moränenhügel zu sehen haben.[1]) Ca. 4 km südlich von Le Brassus zieht ein Endmoränenwall quer durch das Thal, von dem ungefähr 1/3 durch den Fluss wieder fortgenommen ist. Das Material ist lehmig mit ziemlich grossen gekritzten jurassischen Geschieben. Von Le Brassus bis L'Abbaye ist das rechte Seeufer bis ca. 60 m über dem heutigen Seespiegel von einer Kiesablagerung überdeckt, die als deutliche Terrasse entgegentritt. Ihr Material ist ein Schotter mit unregelmässiger Anordnung der Gerölle und Deltaschichtung gegen den See zu. Besonders mächtig ist diese halb moränenartige, halb fluvio-glaciale Bildung unmittelbar vor den ersten Häusern von L'Abbaye (von S. her) an der Brücke über den Bach Lyonne aufgeschlossen. Hinter dem Dorfe erheben sich einige typische, ca. 20 m hohe Moränenhügel. Schliesslich ist eine ganz analoge Bildung unmittelbar

[1]) So Schardt bei «Forel, Rapport sur une carte hydrographique des Lacs de Joux et de Brenets (Archives des sciences physiques et naturelles de Genève XXVII, 1892, pag 250)» während Forel (ebenda) sie für Wirkungen ubaëriler Erosion vor Ausfüllung des Beckens durch einen See hält.

hinter dem Bahnhof von Le Pont bei den «glacières» zu sehen. Der Gang der Ereignisse war hier offenbar der folgende. In dem Masse, als der Thalgletscher abschmolz, sammelten sich seine Schmelzwasser in dem abflusslosen und durch Verkleisterung mit Grundmoränen undurchlässig gewordenen Poje zu einem See an, und dieser erfüllte, nachdem der Gletscher ganz geschwunden war, das ganze Becken bis ca. 60 m über dem heutigen Seespiegel. Die vom rechten Gehänge herabkommenden Bäche lagerten die Ufermoräne um und erzeugten die Deltaschichtung. Die Kiesablagerung am rechten Gehänge ist also umgelagerte Moräne, vielleicht auch vermehrt durch die Moränen kleiner Seitengletscher. Mit sinkendem Wasserstande verfiel dann die ganze Wasseransammlung in die heutigen Seen, den Lac des Rousses und den Lac de Joux.

Die Synklinale des Val de Joux wird durch einen Jurakalkrücken von 80—90 m Höhe von der parallel streichenden Kreidesynklinale von Le Lieu getrennt. Jaccards Karte (Bl. XI des geolog. Atlas der Schweiz, 2. Auflage), verzeichnet hier unmittelbar westlich des Lac Ter einen kleinen Hügel, Crêt à Badeau, als Moräne; doch ist diese nirgends aufgeschlossen. Vielleicht stellt dieser Hügel wie noch viele ähnliche in der Umgebung Rundhöcker dar. Der Lac Ter ist ein kleines, kreisrundes Wasserbecken, das eher als Karstwanne wie als Moränensee zu deuten ist. Bei der geringen Höhe des trennenden Rückens zwischen dem Val de Joux und dem Thal von Le Lieu ist es sehr wohl möglich, dass der Gletscher des erstern auch das letztere erfüllte. Doch ist diese Frage bei dem Mangel jeglicher Moränenaufschlüsse nicht mit Sicherheit zu beantworten.

Während, wie wir sahen, die lokalen Gletscher des südlichen Jura den Fuss des Gebirges verliessen und ein wenig in die Ebene hinaustraten, ist dies im zentralen Jura nicht mehr der Fall. Denn der Rhônegletscher drang hier auch zur Zeit der letzten Vergletscherung in die Jurathäler ein und häufte in denselben mächtige Stirnmoränen an. Im Nozon-Thal von Vaulion entwickelte sich ein kleiner Juragletscher, dessen Moränen im Hintergrund des Thales mehrfach, z. B. bei dem Gehöft la Mache, sw. von Vaulion, aufgeschlossen sind. Dieser Gletscher reichte thalabwärts bis ca. 2 km unterhalb Vaulion, wo er mit dem Rhônegletscher zusammenstiess. Eine verlassene Kiesgrube unterhalb des Gehöftes les Jorats in 940 m Höhe enthält schon recht starke alpine Beimischung, das Material zeigt Deltaschichtung gegen die Ebene, hat aber sonst durchaus Moränen-

charakter. Wir haben es also hier wieder mit einer Stauungserscheinung am Ende des kleinen Juragletschers gegen den abschmelzenden Rand des Rhônegletschers zu thun.

Durch das untere Orbethal drang ein Arm des alpinen Eises zur Zeit der Maximalvereisung über den Col de Jougne (1050 m) bis über Pontarlier hinaus vor.[1]) aber der Thalkessel von Vallorbes war von einem selbständigen Juragletscher erfüllt, der dem Rhônegletscher den Zugang versperrte. Auch das oberste Doubsthal bis Hôpitaux neufs ist von rein jurassischen Moränen in grosser Mächtigkeit eingenommen. Das Vorkommen der erratischen Bildungen in dieser ganzen Gegend hängt mit der von Rollier[2]) aufgeworfenen Frage nach einem alten Doubs-Lauf von Hôpitaux über den Col de Jougne nach dem untern Orbethal zusammen. Zeitmangel verhinderte mich, das Studium dieser Verhältnisse zu Ende zu führen. Auch die Untersuchung der erratischen Phänomene im Berner Jura, namentlich im Val St. Imier, musste einem späteren Zeitpunkt vorbehalten bleiben. Immerhin glaube ich aus dem Vorstehenden schon jetzt folgende Schlüsse ableiten zu können:

1. Die von Schardt angenommene Rekurrenzphase der Juragletscher lässt sich für die Umgebung von Gex und Gingins ebensowenig als für die von Aubonne und Gimel nachweisen. Die von Baltzer gegen diese Annahme angeführten Gründe, nämlich die total verschiedene Zusammensetzung des Moränenmateriales am Gebirgsfuss und in einiger Entfernung von demselben, das Fehlen von Endmoränen in der Ebene, sowie theoretische Erwägungen gelten ebenso für das hier besprochene Gebiet. Die Gletscher des südlichen Jura reichten nur wenig über den Fuss des Gebirges hinaus; ihre Moränen stossen mit Deltaschichtung an die fluvio-glacialen Bildungen des Rhônegletschers.
2. Der Col de St. Cergues wurde vom alpinen Eise niemals überschritten, da er durch lokale Gletschermassen gesperrt war.
3. Die Höhe der diluvialen Schneegrenze im südlichen und zentralen Jura ist eine ausserordentlich tiefe. Gebiete mit Gipfeln um 1600 m (z. B. die Umgebung des Grand Colombier, der Dôle und des Noirmont) erzeugten auch in der letzten

[1]) Vgl. Bénoit, Sur une expansion des glaciers alpins dans le Jura central (Bull. soc. géol. France 3. série, V, 1876/77, pag. 61 ff.).

[2]) Rollier, II. Supplément à la description géologique de la carte géologique feuille VII. (Beiträge zur geolog. Karte der Schweiz, Neue Folge, 8. Lief. 1897.)

Eiszeit recht beträchtliche Gletscher. Aber auch das obere Doubsthal, dessen Umrahmung selten 1300 m übersteigt, war von selbständigen Eismassen erfüllt. Daraus resultiert für das genannte Gebiet eine diluviale Schneegrenze von 1000—1100 m.

Wien, im Dezember 1900.

Friedrich Antenen.

Die Vereisungen der Emmenthäler.

I. Das Erratikum des obern Emmenthales.

Um einen deutlichen Überblick über die Verbreitung der erratischen Blöcke im Gebiet des obern Emmenthales zu gewinnen, ist es angezeigt, dieses Material zum vornherein nach seiner Herkunft zu gruppieren. Eine solche Sonderung führt uns auf vier verschiedene Gruppen. Wir können unterscheiden:

1. Rhonegletscherblöcke,
2. Aargletschererratikum,
3. lokales Erratikum,
4. Habkerngranite.

Die Habkerngranite, auch rote Granite oder Exoten genannt, sind im obern Emmenthal das allgemein verbreitete Erratikum.[1]) Vorerst finden wir sie auffallend reichlich im Bett der Emme und in den Seitengraben zwischen Hohgant und Brienzergrat ausgestreut. Ich zählte von der Säge hinter Kemmeribad bis zur Einmündung des Tiefengrabens, also auf einer Strecke von 4 km, über 220 grosse Blöcke von 1 bis mehr denn 10 m^3 Inhalt. Die meisten derselben sind abgerundet, oft charakteristisch linsen- oder kuppelförmig. Weniger häufig sind hier die eckigen Exemplare. Die Ausstreuung beschränkt sich aber nicht nur auf das Flussbett. Wir finden rote Granite auch den Gehängen nach verbreitet. Diese sind meist eingesunken und stark verwittert.

Unterhalb Kemmeribad wird ihr Vorkommen seltener. Hin und wieder können wir im Flussbett noch kleinere, stark gewaschene Stücke

[1]) *Mitteilungen* über die Verbreitung dieser interessanten Blöcke verdanken wir:

a. Studer: Mit d. bern. nat. Ges. 1866. Die exot. roten Granite und Geolog. aus dem Emmenthal, und Studer, Index der Petro- und Stratigraphie der Schweiz.

b. Fankhauser: Mit. d. bern. nat. Gesellsch. 1882.

c. Kaufmann: Beiträge zur geolog. Karte der Schweiz. Emmen- und Schlierengegend.

beobachten. Dagegen finden wir grössere Blöcke am Thalgehänge ausgestreut. Solche beobachtete ich bei Untermastweid, am Sattel, bei Vorder-Lindenbodenalp, auf Naters, auf dem Breitmoos und im Rothengraben. Seltener sind die Exoten in der Umgebung von Röthenbach. Ich verzeichnete zwei solche im Fischgraben und einen im Trachselbach. Dagegen finden wir wieder einige dieser Blöcke in der Umgebung von Martisegg, im Finstergraben und in der Nähe von Signau.

Diesen vereinzelt auftretenden Blöcken müssen wir die längstbekannten Blockgruppen im Wald- und Rambach, im Flüebach und im Krümpel gegenüberstellen. Die höchstgelegenen Exoten finden wir aber auf Hinter-Rämisgummen und auf Blapbachalp. Als nördlichst gelegenen Block müssen wir den bei der Entfernung der Kramlaube in Langnau gehobenen bezeichnen. Im Gebiet des Napfes konnte ich keine Habkerngranite auffinden.

Aus vorstehenden Angaben erkennen wir deutlich, dass die roten Granite über das ganze obere Emmenthal und in allen Höhenlagen ausgestreut sind, was wir von keiner anderen durch Gletscher verfrachteten Gesteinsart aussagen könnten.

Die Rhoneblöcke, die durch Euphotide, Valorsine, Arkesine und Gabbros vertreten sind, sind nicht nur eine viel seltenere Erscheinung, sondern beschränken sich in ihrer Verbreitung auch auf ein viel kleineres Gebiet. Schon lange bekannt ist der Smaragditgabbro in einem Einschnitt östlich von Eggiwil. Im Fischgraben bei Röthenbach beobachtete ich einen kleinen roten Walliserquarzit, im Finstergraben je einen Arkesine- und einen Valorsineblock und endlich Valorsinegeschiebe an verschiedenen Stellen in dem Gebiete zwischen Martisegg und Signau. Schöne Valorsineblöcke enthält die Blockgruppe in Langnau, und ein weiteres Exemplar dieser Gesteinsart liegt an der Strasse zwischen Trub und Trubschachen.

Aus diesen Beobachtungen ersehen wir, dass sich das Vorkommen der Rhoneblöcke auf den nördlichen Teil unseres Gebietes beschränkt.

Umfangreicher ist die Verbreitung des Aargletschererratikums. Dieses fehlt nur im obern Teile des Hauptthales. Die südlichsten Aargletscherblöcke beobachtete ich auf dem Breitmoos und im Sorbachgraben, die südöstlichsten auf dem Steinboden in Form grosser Gneisse und Granite. Ungemein reich an Aargletschererratikum sind das Röthenbachthal, das Hauptthal unterhalb Eggiwil und die Umgebung von Martisegg. Unter dem lokalen Erratikum dominiert der

Hohgantsandstein. Er beherrscht das Hauptthal bis zu den Endmoränen auf dem Breitmoos. Besonders reichlich ist er auf der linken Thalseite ausgestreut. Viel seltener beobachten wir ihn auf der Ostseite der Emme. Er ist jene charakteristisch aschgraue bis weisse Gesteinsart, die der Volksmund des Emmenthales als Zuckerstein bezeichnet. Nördlich von Eggiwil tritt der Hohgantsandstein gemeinschaftlich mit dem Aargletschererratikum auf.

Gestützt auf diese Beobachtungen können wir das Erratikum des obern Emmenthales nach seiner horizontalen Verbreitung folgendermassen umschreiben:

1. Die Habkerngranite sind über das ganze Gebiet ausgestreut.
2. Die Rhoneblöcke reichen südwärts bis zu der Linie Röthenbach-Eggiwil-Trubschachen-Napf.
3. Das Aargletschererratikum verbreitet sich südwärts bis zu der Linie Waldbach-Hinterrämisgummen-Trubschachen.
4. Das lokale Erratikum ist im ganzen Hauptthal verbreitet.

Diese horizontale Verbreitung entspricht, wie wir aus den nachstehenden Abschnitten ersehen werden, der horizontalen Entwicklung der verschiedenen Gletscher, die sich an der Vereisung der Emmenthäler beteiligten.

II. Die Eiszeiten in den Emmenthälern.

1. Historisches über die Grenzen des Rhonegletschers im Emmenthal.

Die Favre'sche Gletscherkarte, Ausgabe 1884, Blatt I, verzeichnet Aar- und Rhonegletscher in ihrer maximalen Entwicklung. In Form einer kolossalen Eiszunge schiebt sich ersterer, seine SO-NW-Richtung unverändert beibehaltend, in die Domäne seines Nachbarn. Der unterste Abschnitt des Aargletschers, das Stück Bern-Thun, wird im Westen, Norden und Osten vom Rhonegletscher eingeschlossen, d. h. von diesem in genanntem Sinne umflossen. Auf der Westseite berühren sich die beiden Gletscher längs der Linie Gurnigelbad-Gurten. Es ist jene Linie, die Bachmann anlässlich der Entdeckung der Riesentöpfe am Längenberg und der bei dieser Gelegenheit daselbst gemachten Beobachtung von Rhoneblöcken und Rhoneschutt im Jahre 1874 als Grenzlinie der beiden Gletscher feststellte, und woran er noch 1877 in seiner Mitteilung über den erhaltenen Riesentopf vom Längenberg

festhält [1]). Auf der Ostseite fällt nach der Favre'schen Karte die Grenze zwischen Aar- und Rhonegletscher annähernd mit der heute Aare und Emme trennenden Wasserscheide zusammen. Indess verbreitet sich der Rhonegletscher, zwischen Aar- und Reussgletscher eingekeilt, bis in das Quellgebiet der Emme, sogar die eocäne Mulde zwischen Brienzergrat und Hohgant beherrschend.

Diese Begrenzungsverhältnisse entsprechen der ersten Bachmann'schen Auffassung. Von der Unhaltbarkeit derselben selbst überzeugt, verlegte dieser in einer spätern Mitteilung die Grenze des Rhonegletschers, dessen grösster Ausdehnung entsprechend, vom Gurnigel über den Nordabhang des Kurzenberges nach Eggiwil, Sumiswald, Wasen, Huttwil, gleichzeitig jedoch an der synchronen Entwicklung beider Gletscher und an einer Ueberschiebung des Aaregletschers durch den Rhonegletscher festhaltend [2]). Von dieser den thatsächlichen Verhältnissen besser entsprechenden Grenzverlegung wurde bei der Herausgabe der letzten Auflage der Favre'schen Karte keine Notiz genommen. Doch wenn dies auch geschehen wäre, so bedürfte die Karte heute gleichwohl der Korrektur, da die Bachmann'schen Anschauungen dem heutigen Stande der Glacialforschung nicht mehr genügen, wie dies bereits Baltzer in seiner Arbeit über den diluvialen Aargletscher feststellte [3]).

Gestützt auf seine Beobachtungen unterscheidet Baltzer, im Gegensatz zur Favre'schen Karte, zwei zeitlich verschiedene Vergletscherungen, eine zweite Eiszeit, den höchsten Stand des Rhonegletschers und eine dritte jüngere, die grösste Ausdehnung des diluvialen Aaregletschers kennzeichnende. Gleichzeitig verlegt er die Grenze der grossen Rhonevereisung vom Gurnigel über die hohe Hohnegg nach dem Napf, sie als Gurnigel-Napf-Linie bezeichnend.

Die Unterscheidung zweier zeitlich getrennter Eiszeiten in dem Thalabschnitt Bern-Thun ist für die Erforschung der glacialen Ver-

---

[1]) Bachmann. Mitteilg. d. bern. nat. Gesellsch. 1874. Die neu entdeckten Riesentöpfe am Längenberg. Heft 1, pag. 5. — Bachmann. Mitteilg. der bern. nat. Gesellsch. 1877. Der erhaltene Riesentopf am Längenberg. Heft 3, pag. 17.

[2]) Bachmann. Mitteilg. der bern. nat. Gesellsch. 1882. Ueber die Grenzen des Rhonegl. im Emmenth. Heft 2.

[3]) Baltzer. Mitteilg. der bern. nat. Gesellsch. 1894. Der diluviale Aargletscher. pag. 125.

hältnisse der dem Aarethal benachbarten Emmenthäler von grösster Wichtigkeit.

Wir müssen auch für dieses Gebiet vor allem aus die Frage zu entscheiden suchen, ob die glacialen Schotter und die erratischen Blöcke, die teils vom Aar-, teils vom Rhonegletscher verfrachtet worden sind, in den Emmenthälern gleichzeitig oder zu verschiedenen Zeiten abgelagert wurden.

2. Welche Erscheinungen sprechen für zwei verschiedene Vereisungen der Emmenthäler?

Trotz vielen Suchens ist es mir allerdings nicht gelungen, durch Auffinden interglacialer Bildungen im Gebiet der Emmenthäler den direkten Nachweis verschiedener Eiszeiten zu erbringen.

Vergegenwärtigen wir uns aber die orographischen Verhältnisse dieses Geländes, denen zufolge schon die glacialen Ablagerungen verhältnismässig spärlich vorhanden sind, so können wir uns das Fehlen interglacialer Bildungen, die überdies in einer Zeit allgemeiner Erosion entstanden sein müssten, leicht erklären. Das stark koupierte Terrain, der Mangel an Plateaux, das starke Gefälle der Wasseradern sind alles Faktoren, die schon während einer Interglacialzeit die Erosion in wirksamster Weise unterstützen mussten. Wir können aber auf anderem Wege die Annahme mehrerer Vereisungen wahrscheinlich machen.

Für eine solche spricht schon eine Vergleichung des Emmenthales mit dem Thalabschnitt Bern-Thun und dessen Glacialerscheinungen. Das Thal der Emme wird durch eine verhältnismässig niedrige Wasserscheide vom Aarethal getrennt. Sowohl der Aar- als der Rhonegletscher, deren Niveauverhältnisse zur Zeit ihrer bedeutendsten Entwicklung durch Beobachtungen bekannt sind, vermochte dieselbe zu überfliessen. Es mussten sich daher in demjenigen Gebiet der Emmenthäler, das nicht von einer lokalen Emmenvereisung bedeckt war, die Vereisungsverhältnisse in zeitlicher Beziehung analog denjenigen des Aarethales zwischen Thun und Bern gestalten, wie sie Baltzer in seiner Arbeit über den diluvialen Aargletscher festgestellt hat. Ein gewisser Abschnitt im Thal der grossen Emme musste zur zweiten Eiszeit zum Bereiche des Rhonegletschers und zur dritten zu demjenigen des Aargletschers gehört haben. Ein Eindringen des Reussgletschers, der das Thal der kleinen Emme beherrschte, darf als ausgeschlossen betrachtet werden, da für seine Anwesenheit kein

Erratikum spricht, während Rhone- und Aargletscher ihr einstiges Eindringen in genanntes Gebiet durch zahlreiche Blöcke unanfechtbar dokumentieren.

Für eine mehrmalige Vereisung scheinen mir noch weitere Thatsachen zu sprechen. Es ist bemerkenswert, wie sich die erratischen Blöcke in den sog. Graben zu grösseren Gruppen angesammelt haben. Wer eine Anzahl solcher Graben nach Erratikum untersucht, der wird die Beobachtung machen, dass die Findlinge, in grösserer Zahl versammelt, also abgesehen von einigen vereinzelt auftretenden Gneissen und Graniten, nur bis zu einer gewissen Höhe zu finden sind. So beobachtete ich die höchstgelegenen Blöcke im:

Rambach	bei	990 m
Waldbach	»	1010 »
Flüebachgraben	»	950 »
Trachselbach	»	940 »
Kalkbach	»	980 »
Fambach	»	950 »
Finstergraben	»	950 »

Diesen Angaben können wir noch folgende Beobachtungen beifügen:

Höhe der Terrasse im Kalkgraben 960 m.

Höhe der kurzen Endmoränen bei Moosegg 880 m.

Höhe einer Anzahl hübscher Rundhöcker bei Schindellegi am Südabhang des Kurzenberges, westlich von Röthenbach 900—950 m.

Eine Vergleichung dieser Zahlen lässt eine auffallende Uebereinstimmung erkennen. Die vertikale Verbreitung des Erratikums und die Höhenlage der Terrasse, der Endmoränen und der Rundhöcker sprechen für ein und dasselbe Gletscherniveau, für das wir eine minimale Höhe von rund 1000 m festsetzen dürfen.

Wir werden in dieser Annahme bestärkt, wenn wir das dichtgedrängte Erratikum in den oben erwähnten Graben nach seiner mineralogischen Beschaffenheit prüfen und vergleichen. Abgesehen von den überall verbreiteten roten Habkerngraniten setzt sich dasselbe aus grauen Gneissen und Graniten, aus auffallend zahlreichen schwarzen Alpenkalken und aus vielen eocänen Sandsteinblöcken zusammen. Eine ähnliche Zusammensetzung lassen die am Fambach hübsch aufgeschlossene Grundmoräne und die Terrasse am Kalkgraben erkennen. Während also die vertikale Verbreitung der erwähnten Ablagerungen

auf ein einheitliches Gletscherniveau schliessen lässt, sprechen die mineralogischen Verhältnisse für ein und denselben verfrachtenden Gletscher und zwar für den Aargletscher.

Wenn wir endlich das aus obigen Beobachtungen abgeleitete Niveau des Aargletschers im Emmenthal mit dem sich aus der vertikalen Verbreitung der glacialen Ablagerungen desselben Gletschers ergebenden Niveau im benachbarten Aarethal vergleichen, so erkennen wir eine hübsche Uebereinstimmung; denn nach Baltzer reichen die Bergmoränen und Schutte des diluvialen Aargletschers am Längenberg ebenfalls bis 1000 m [1]).

Es muss daher zur dritten Eiszeit, als der Aargletscher seine Bergmoränen am Längenberg absetzte, von ihm auch ein Teil des Emmenthales beherrscht worden sein.

Wie gestalten sich nun die Verhältnisse über 1000 m?

Ausser den bei erwähnten Angaben berücksichtigten Blöcken können wir im Gebiet der Emmenthäler auch Findlinge beobachten, die sich von den erstern in manchen Beziehungen unterscheiden. Vorerst überschreiten sie in auffälliger Weise die Kurve von 1000 m. Ferner treten sie nicht in dieser reichlichen Vergesellschaftung auf, wie wir dies für das Erratikum unter 1000 m beobachten können. Ihr Vorkommen ist vereinzelt, seltener. Endlich sind viele unter ihnen stark verwittert und tief in ihre Unterlage eingesunken. Ich beobachtete einen dieser Blöcke, einen Habkerngranit, auf Hinter-Natersalp bei Gehöft Schwendi, im obersten Einschnitt des Flüebachgrabens bei 1100 m. Ebendaselbst fand ich einen kopfgrossen Glimmerquarzit bei 1170 m und einen etwas grössern Habkerngranit bei 1180 m. Höhergelegene Blöcke finden wir endlich östlich der Emme auf dem mittleren und hintern Steinboden bei 1050, 1090, 1130 m. Die Blöcke bei 1050 und 1130 m sind grosse plattenartige Gneisse. Der Block bei 1090 m ist ein grauer Granit von auffallend regelmässiger Kugelgestalt mit 1 m Durchmesser. Er wurde vom Besitzer des Gehöftes der Erde enthoben, worin er vollständig eingesunken war. Aehnliche Blöcke befinden sich bei Blapbach, einer nördlich vom Steinboden gelegenen Lokalität. Noch höher, bis Hinter-Rämisgummen steigend, fand ich bei 1280 m zwei kleinere Habkerngranite und einen kopfgrossen grauen Granit, alle in einer trockenen,

[1]) Baltzer, Der diluviale Aargletscher, pag. 40.

lehmig-sandigen Unterlage eingesunken und in stark verwittertem Zustande, so dass sie beim ersten Hammerschlag in Grus zerfielen. Eine bemerkenswerte Erscheinung ist ferner das Fehlen der Grundmoräne, der Alpenkalke und der eocänen Sandsteine in dem über 1000 m gelegenen Gelände, abgesehen von den durch die Lokalvereisung verfrachteten Hohgantsandsteinen und Alpenkalken.

Es giebt somit im Gebiet des Emmenthales glaciale Ablagerungen, die das zu 1000 m festgesetzte Niveau des diluvialen Aargletschers um beinahe 300 m übersteigen. Diese können infolge ihrer Höhenlage nicht von letzterem verfrachtet worden sein. Ihr Niveau entspricht vielmehr demjenigen des Rhonegletschers zur zweiten Eiszeit, das, wie nachgewiesen, zwischen Gurnigel und Chasseral die Höhe von 1300 m erreichte. Indem wir aber die Verfrachtung dieser Blöcke in die zweite Eiszeit verlegen, sprechen wir ihnen ein höheres Alter zu. Dies steht jedoch in bestem Einklang mit dem stark verwitterten Zustand derselben, mit dem Fehlen der Grundmoräne und des Glacialschuttes.

Gestützt auf die erwähnten Beobachtungen können wir die glacialen Ablagerungen im Thal der grossen Emme zwei zeitlich verschiedenen Vereisungen zuschreiben. Die über 1000 m gelegenen sind als Erscheinungen der zweiten ältern Eiszeit, die durch den höchsten Stand des Rhonegletschers charakterisiert wird, zu betrachten, die unter 1000 m gelegenen hauptsächlich als solche der dritten jüngern Eiszeit, der Zeit des diluvialen Aargletschers.

3. Die zweite Eiszeit in den Emmenthälern.

Als Grenze des grossen Rhonegletschers im Emmenthal bezeichnet Baltzer, wie schon erwähnt, die Gurnigel-Napf-Linie. Nach meinen Beobachtungen scheint diese Linie den thatsächlichen Verhältnissen sehr nahe gerückt zu sein. Der Gletscher ist in seiner Bewegung an die orographischen Verhältnisse des Geländes gebunden. Das Niveau des Rhonegletschers wird zwischen Gurnigel und Chasseral auf 1300 m geschätzt. Es muss daher die Hohe-Honegg, deren Kamm zwischen den Signalpunkten Knübeli und Bürkelihubel nirgends unter 1400 m sinkt, für die südliche Ausbreitung des Rhonegletschers begrenzend dagestanden sein. Das südlich der genannten Erhebung gelegene Thal der Zulg weist zwar glaciale Schotter, Gneisse und Granite auf. Allein letztere erreichen in ihrer vertikalen Verbreitung

das Niveau der Wasserscheide zwischen Emme und Zulg nicht, und erstere sind lokaler Natur. Dagegen wurde die Wasserscheide zwischen Röthenbach und Emme, in 1215 m kulminierend, vom Rhonegletscher überflossen, wofür uns das auf den Naters beobachtete Erratikum bürgt. Von hier aus kann aber die weitere Begrenzung des Gletschers nicht mehr durch die Orographie des Geländes bedingt worden sein, sobald wir von einer Ausdehnung desselben bis zur Schrattenfluh absehen, da die Wasserscheide zwischen Emme und Ilfis mit Ausnahme einiger Kulminationspunkte, wie Wachtelhubel 1418 m, Ob Fluh 1409 m, Günhorn 1373 m, Punkt 1316 ob Schreiberschwand, das Niveau von 1300 m nicht erreicht.

Doch nicht nur die orographischen Verhältnisse, sondern auch Grundmoräne und glaciale Schotter bieten in dem Terrainabschnitt zwischen dem Ostende der Hohen-Honegg und dem Napf keine sichern Anhaltspunkte zur Lösung der Grenzfrage.

Wir haben auf das spärliche Vorkommen bis gänzliche Fehlen dieser Bildungen in den Höhenlagen über 1000 m bereits hingewiesen. Die letzten sichern Zeugen jener ältern Eiszeit sind uns in Form der schon erwähnten Blöcke auf Naters, Steinboden und Rämisgummen geblieben. Sie sind unsere südöstlichsten Challons, die uns für die einstige Anwesenheit des Rhonegletschers bürgen.

Nach ihrer mineralogischen Beschaffenheit repräsentieren aber die genannten Blöcke absolut kein charakteristisches Rhoneerratikum. Wir vermissen Euphotide, Valorsine und Gabbros vollständig. Die charakteristischen Rhoneblöcke treten erst nördlich der Linie Röthenbach-Eggiwil-Napf auf. (Vide Abschnitt I.) Der Smaragtidgabbro [1]) bei Eggiwil, und der Valorsineblock unterhalb Trub sind in unserem Gebiete noch immer die am weitesten nach Süden und Osten vorgeschobenen bekannten Rhonefindlinge. Ausser einer Anzahl Habkerngraniten finden wir südlich der genannten Linie in den Lagen über 1000 m nur graue Gneisse und Granite, die aus der Urgesteinszone der Berneralpen stammen und daher für eine Verfrachtung durch den Aargletscher sprechen. Diese Thatsache scheint nun auf den ersten Blick unsere Beweisführung für die Verbreitung des Rhonegletschers südlich der Linie Röthenbach-Eggiwil-Napf zu widerlegen. Allein wie sich nach der Vereinigung zweier recenter Gletscher das Oberflächen-

[1]) *Mitteilungen* d. nat. Ges. in Bern 1882, 2. Heft, pag. 6, Fankhauser.

material nicht ohne weiteres mischt, vielmehr noch auf bedeutende Strecken gesondert bleibt, so müssen sich auch Aar- und Rhoneblöcke nach der Vereinigung der sie transportierenden Eisströme verhalten haben.

Der Aargletscher der zweiten Eiszeit ist als Nebengletscher des Rhonegletschers zu betrachten. Nach Baltzer [1]) erfolgte der Anschluss des erstern in der Gegend von Thun, von wo an, gestützt auf oben erwähnte Verfrachtungserscheinung, der Aargletscher und dessen Oberflächenmaterial die rechte Flanke des Rhonegletschers bis in das Gebiet des Emmenthales beherrscht haben müssen, eine Annahme, die, abgesehen von den mechanischen Gesetzen, auf der sie beruht, zugleich auch durch die nachgewiesene mächtige Entwicklung des Aargletschers zur zweiten Eiszeit gestützt wird. Hieraus ergiebt sich aber die Berechtigung, die Verbreitung des Rhonegletschers im Emmenthal an Hand von Aarblöcken nachzuweisen. Zugleich wird uns auch das Fehlen ausgesprochener Rhoneblöcke südlich der Linie Röthenbach-Eggiwil-Napf begreiflich.

Unter den erratischen Blöcken, auf die sich unser Nachweis für die Ausbreitung des Rhonegletschers stützt, finden wir eine grössere Anzahl von Habkerngraniten. Diese Findlinge sind im Emmenthal allgemein verbreitet. (Vide Abschn. I.) Während sie ihrer vertikalen Verbreitung nach sowohl durch den grossen Rhonegletscher, als durch den Aargletscher der dritten Eiszeit verfrachtet worden sein können, schliesst ihre horizontale Ausstreuung für das oberste Emmenthal eine Verfrachtung durch den Lokalgletscher nicht aus. Die Möglichkeit einer solchen ergiebt sich aus der reichlichen Verbreitung dieser Blöcke im Quellgebiet der Emme und die Wahrscheinlichkeit aus ihrem Vorkommen in und auf der lokalen Seitenmoräne, wie man dies im Aufschluss am Knubelhüttengraben beobachten kann. Bedenken wir ferner, dass im Hauptthal vom Kemmeribad bis Breitmoos neben diesen roten Graniten graue Gneisse und Granite, die für die Anwesenheit anderer Gletscher zeugten, nicht vorkommen, so dürfen wir mit grosser Berechtigung die Verfrachtung der Habkerngranite in dem genannten Thalabschnitte einer Lokalvergletscherung zuschreiben. Die Frage, wann und durch welchen Gletscher die höher gelegenen

[1]) Baltzer. Mitteil. der nat. Ges. in Bern 1896. Der dil. Aargletscher, pag. 125.

exotischen Blöcke auf Naters und bei Rämisgummen verfrachtet wurden, ist durch die früheren Erwägungen bereits beantwortet worden. Wir haben ihre Ausstreuung dem Aargletscher der zweiten Eiszeit resp. dem grossen Rhonegletscher zugeschrieben. Auch hier ist die Möglichkeit einer solchen gegeben, da genannte Blöcke in der Umgebung von Habkern und Sigriswil reichlich vorkommen, wie aus den Arbeiten von Studer [1]), Rütimeyer und Kaufmann [2]) ersichtlich ist. Gegen eine allfällige Verfrachtung dieser hochgelegenen Blöcke auf Naters und bei Rämisgummen durch den Lokalgletscher spricht das Fehlen der Hohgantsandsteine. Diese Blöcke müssen zur zweiten Eiszeit verfrachtet worden sein.

Dagegen liegen die im Waldbach, Flüebach und Krümpelgraben vorkommenden exotischen Blöcke teilweise unter 1000 m. Sie können deshalb sowohl während der zweiten, als zur dritten Eiszeit verfrachtet worden sein. Da nun im obern Krümpel einzelne Habkerngranite eine Höhenlage von 1150 m erreichen, also das Niveau des diluvialen Aargletschers übersteigen, so dürfte überhaupt die ganze dortige Blockgruppe während der zweiten Eiszeit verfrachtet worden sein. Zu einem analogen Schlusse berechtigt der im Flüebach bei 1100 m vorkommende Block.

Indem wir aber, gestützt auf die erwähnten Verhältnisse, die Ausstreuung der Habkerngranite zum Teil in die zweite Eiszeit verlegen dürfen, finden wir in den Beobachtungen von Studer, Fankhauser und Kaufmann wichtige Anhaltspunkte für die Lösung der Grenzfrage des Rhonegletschers im Emmenthal. Bereits Studer bezeichnet das Fehlen der roten Granite in dem östlich vom Krümpel gelegenen Steinbach als eine bemerkenswerte Erscheinung [3]). Fankhauser dagegen beobachtete die Habkerngranite im westlich vom Krümpel gelegenen Orthbach und im Aspigraben, während Kaufmann in seinen Beiträgen zur geolog. Karte der Schweiz im Gebiete östlich vom Krümpel keine Exoten mehr verzeichnet. Habkerngranite und besonders Aarblöcke verschwinden auf der Ostseite der Wasserscheide zwischen Emme und Ilfis. Es liegt daher nahe, letztere als Rhonegletschergrenze zu bezeichnen. Damit hätten uns vorliegende Untersuchungen auf die von

[1]) Studer. Geologie der Schweiz, pag. 130.

[2]) Kaufmann. Beiträge zur geolog. Karte der Schweiz. Emmen- und Schlierengegenden, pag. 180.

[3]) Studer. Mit. d. bern. nat. Ges. Geolog. aus dem Emmenthal. 1865.

Baltzer festgesetzte Gurnigel-Napf-Linie geführt. Allein zuvor müssen wir noch einen Blick auf die glacialen Ablagerungen im Ilfisthal und in der Mulde hinter Schangnau werfen. Dem Fehlen der Habkerngranite und anderer Urgesteine daselbst können wir glaciale Schotter von ganz lokalem Gepräge gegenüberstellen. Solche finden wir, wenn auch nicht reichlich, zwischen Schangnau und Marbach, wo sie vor wirksamer Erosion geschützt blieben, während sie von Marbach an der transportkräftigen Ilfis zum Opfer gefallen sind. Diese Erscheinung lässt auf eine einstige Lokalvergletscherung schliessen. Das Sammelgebiet derselben müssen wir aber im Quellgebiet der grossen Emme suchen, da dasjenige der Ilfis einer solchen Vereisung nicht genügen konnte. Nun können allerdings diese lokalen Glacialschotter jüngern Datums sein, d. h. synchron den Glacialbildungen des diluvialen Aargletschers. Dafür spricht eine mächtige Lokalvergletscherung im Thal der grossen Emme zur dritten Eiszeit, worauf wir im folgenden Abschnitt näher eintreten. Allein eine um so intensivere Lokalvereisung dürfen wir für die zweite Eiszeit voraussetzen. Diese muss sich in der Gegend von Schangnau, ähnlich wie der Aargletscher bei Thun, dem Rhonegletscher angeschlossen, und von hier aus dessen rechte Flanke und damit das Thal der Ilfis beherrscht haben, wodurch uns das Fehlen der Urgesteine östlich der Wasserscheide zwischen grosser Emme und Ilfis verständlich wird.

Aus den für das Eindringen des grossen Rhonegletschers in das Gebiet der Emmenthäler sprechenden Beobachtungen erkennen wir folgendes:

1. Das charakteristische Rhoneerratikum verbreitet sich bis zu der Linie Röthenbach-Eggiwil-Napf. (Vide Abschn. I.)

2. Der Aaregletscher beherrschte die rechte Flanke des Rhonegletschers und verfrachtete Habkerngranite, graue Granite und Gneisse bis zu der Wasserscheide zwischen grosser Emme und Ilfis.

3. Der Rhonegletscher drang nie in das Quellgebiet der grossen Emme vor, wie dies die Gletscherkarte von Favre veranschaulicht. Es muss sich ihm vielmehr bei Schangnau ein Lokalgletscher als Zufluss angeschlossen haben, dessen Eismassen vom Hauptgletscher ins Thal der Ilfis gedrängt wurden.

4. Das Ilfisthal kann noch als Domäne des grossen Rhonegletschers betrachtet werden, und die Rhonegletschergrenze ist vom Gurnigel über die Hohe-Honegg nach Schangnau-Marbach und Wiggen zu ziehen.

4. Die dritte Eiszeit in den Emmenthälern.

A. Glaciale Erscheinungen im Röthenbachthal.

Als der diluviale Aargletscher seine Eiszunge nordwärts über Bern vorschob, verbreitete er sich gleichzeitig ostwärts bis ins Gebiet des Emmenthales. Eine Seitenströmung muss besonders der Einsenkung über Schwarzenegg und dem Röthenbachthal gefolgt sein, um bei Eggiwil ins Thal der grossen Emme einzutreten. Der diluviale Aargletscher hat in diesem Gebiet deutliche Spuren hinterlassen, sowohl in Form erratischer Blöcke, als in Form von Grundmoränen und fluvioglacialen Terrassen. Den Charakter des Erratikums erkennen wir aus nachstehender Zusammenstellung, die sich auf die Zählung der Blöcke in verschiedenen Graben stützt.

	Graue Granite	Graue Gneisse	Schwarze Alpenk.	Helle Kalke	Gasterngranit Pfirsichblütenrot	Roter Flysch	Eoc. Sandstein	Habkern-granit	Arkesin	Valorsine	Rot. Quarzit Wallis	Glimmer-quarzit
Waldbach	6	1	14				Sehr viel	8				
Rambach	3	3	12	4		2		26				
Trachselbach	14	7	10	4			4	1				
Kalkgraben	14	29	60				4					
Fambach Grundm.	5	10	42		1		2					5
Fischbach	4	10	21					2			1	
Finstergraben								3	1	1		
Flüebach 930 m aufwärts		2						15				

Aus dieser Zusammenstellung erkennen wir:

1. Das Röthenbachthal ist reich an erratischen Blöcken. Die meisten derselben stammen aus der Urgesteinszone der Berneralpen und sind durch den Aargletscher verfrachtet worden.

2. Die ersten charakteristischen Rhoneblöcke treten erst nördlich von Röthenbach auf. (Vide Absch. I.)

3. Graue Gneisse und Granite sind im sogenannten Südernkessel, besonders in seinem obern Teile weniger reichlich ausgestreut als in der Umgebung von Röthenbach. Vermutlich hat der sich nach Nordosten bewegende Gletscher diese nach Südosten gelegene Mulde weniger berührt.

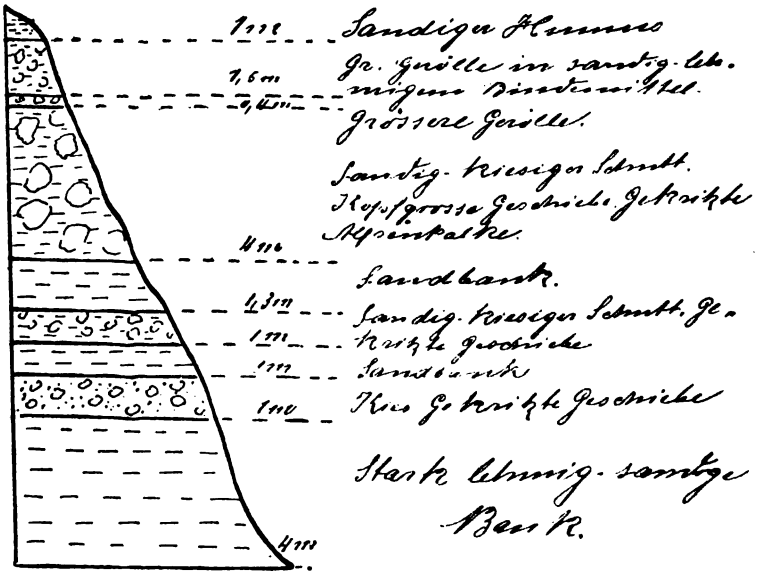
4. Im Wald- und Rambach, beides Seitengraben des Südernkessels, ist ein eoc. Sandstein reichlich abgelagert. Seine Verbreitung nimmt nordwärts auffallend rasch ab.

5. Südlich von Röthenbach, im Ram-, Wald- und Flüebach, erkennen wir unter dem Aareerratikum zahlreiche Habkerngranite. Nördlich der genannten Ortschaft, also im Gebiet, da die ersten Rhoneblöcke auftreten, wird ihr Vorkommen zur vereinzelten Erscheinung.

Das in vorangehender Zusammenstellung verzeichnete Aareerratikum erkennen wir in demselben Verhältnis in der Grundmoräne wieder. Besonders hübsch ist dieselbe im Fambach bei Röthenbach aufgeschlossen. Die mittlere Stufe dieses Einschnittes ist kesselartig erweitert. Die Gehänge des Kessels zeigen eine unruhige Bodengestaltung. Wir bemerken muldenartige Vertiefungen und daneben wallartige Bildungen.

Auf der Ostseite des Kessels hat ein Nebenbach eine tiefe Furche ausgewaschen, wodurch uns ein deutlicher Einblick in die hier aufgeschlossene Grundmoräne gewährt wird. In dem grauen, lehmigen, in einigen Lagen sandig-lehmigen Bindemittel stecken faust- bis kopfgrosse Geschiebe, worunter scharf gekritztes Material reichlich vorhanden ist. Besonders auffallend ist die Menge grosser, eckiger Blöcke, teils im Bachbett gelegen, teils seitlich im Gletscherschutte steckend. (Vide Zusammenst. Fambach. Grundm.) Die Mächtigkeit dieser Glacialablagerung nimmt mit zunehmender Höhe ab. Während dieselbe bei 890 m wenigstens 6 m beträgt, schätzte ich sie bei 940 m noch auf $^1/_2$ m. Das stark lehmige Bindemittel bildet den wasserundurchlassenden Untergrund zahlreicher Sumpfwiesen längs des Gehänges.

Die oberste Stufe des Fambaches trägt die Bezeichnung Kalkgraben. Hier können wir eine weitere Form glacialer Ablagerungen beobachten. Vom Kalkgraben zweigt sich ein östlicher, ungefähr 200 m langer Seiteneinschnitt ab, der in Form eines Kessels endigt. Dieser Einschnitt liegt mitten im Fragment einer fluvioglacialen Terrasse. Die Mächtigkeit derselben beträgt ca. 15 m. Die regelmässige Schichtung des Materials erkennen wir aus nebenstehendem Profil.



Profil der Terrasse im Kalkgraben

Der Aufbau dieser Terrasse entspricht nach der Beschaffenheit des Materials der von Penk an ähnlichen Bildungen in den Ostalpen gemachten Beobachtung, wonach sich dieselben von unten nach oben aus Bänderthon, Sand, Kies und Schotter aufbauen. Wir erkennen deutlich eine Verschiebung des gröbern Materials nach den obern Schichten. Es ist dies jene charakteristische Erscheinung der fluvioglacialen Terrassen, worauf Böhm seine Anschauung, dieselben möchten durch den vorstossenden Gletscher entstanden sein, stützt.[1]) Das Terrassenfragment im Kalkgraben ist hier um so erwähnenswerter, da wir weder im Röthenbachthal noch im Thal der grossen Emme abwärts bis Schüpbach eine weitere ähnliche Glacialbildung beobachten können. Dasselbe verdankt seine Erhaltung seiner gegen Erosion geschützten Lage. Da es aus dem für den Aargletscher charakterischen Material aufgebaut ist, ist es uns ein sicherer Beweis, dass Schmelzwässer des diluvialen Aargletschers nordostwärts durch das

[1]) Böhm. Die alten Gletscher der Enns und Steyr, pag. 492.

Thal des Röthenbaches und dasjenige der grossen Emme abflossen. Diese Schmelzwässer haben zur Bildung fluvioglacialer Terrassen geführt. Das heutige Fehlen derselben erklärt sich aus der Annahme einer spätern intensiven Erosion, die durch die orographischen Verhältnisse des Geländes kräftig unterstützt wurde.

B. Glaciale Erscheinungen im Thal der grossen Emme und Lokalvereisung.

Seltener als im Röthenbachthal sind die glacialen Ablagerungen im Thal der Emme zwischen Eggiwil und Schüpbach zu finden. Grundmoräne und fluvioglaciale Terrassen sind gänzlich oder bis auf zweifelhafte Spuren verschwunden. Die sichersten Anhaltspunkte für den Nachweis einer einstigen Vereisung gewähren uns grössere erratische Blöcke, die wir besonders in den seitlichen Einschnitten des Hauptthales beobachten können. Wir finden graue Granite und Gneisse, schwarze Alpenkalke und eoc. Sandsteine. Es ist dies das charakteristische Aareerratikum, dem wir im Röthenbachthal begegnet sind. Der diluviale Aargletscher muss also bei Eggiwil ins Thal der grossen Emme eingedrungen sein.

Wenn wir aber das soeben erwähnte Erratikum näher untersuchen, so werden wir doch einer Veränderung gewahr. Während die eoc. Sandsteine, die im Südernkessel so reichlich ausgestreut sind, bei Röthenbach nur noch spärlich auftreten (vide zusammenst. Trachselbach, Fambach, Fischbach), finden wir sie nördlich von Eggiwil wieder zahlreicher verbreitet. Doch bemerken wir unter den kleinen bis mittelgrossen, infolge starker Verwitterung gelblich-braunen Blöcken, wie wir sie im Ram- und Waldbach und in der Umgebung von Röthenbach beobachten können, grosse, wenig abgerundete Exemplare von weisser bis aschgrauer Färbung. Dies sind die charakteristischen Hohgantsandsteine, das Leitgestein der Lokalvereisung. Letztere muss sich als Zufluss dem Aargletscher angeschlossen haben, und weil wir das südlichst gelegene Aareerratikum auf dem Breitmoos und im Sorbach nahe bei Gehöft Niederbergalp beobachten können, muss der Anschluss südlich des Dorfes Eggiwil erfolgt sein.

Im Gegensatz zu der im II. Abschnitt erwähnten Lokalvereisung hat sich diejenige der dritten Eiszeit bedeutend weiter nordwärts vorgeschoben. Frei von Aareerratikum finden wir Lokalgesteine und Lokalschutt bis an den Südrand des Breitmooses abgelagert. Der

Hohgantsandstein, der in zahlreichen Blöcken im Hauptthal ausgestreut ist, orientiert uns in vorzüglichster Weise über die Verbreitung der Lokalvereisung. Diese Gesteinsart kommt sowohl am Nordost- als am Südwestschenkel des Hohgantes als anstehender Fels vor. Daher dürfen wir sie nicht überall als Erratikum betrachten. Vom Kemmeribad bis zum Einschnitt des Schwarzbaches, also dem ganzen Nordfusse des Hohgantes nach, ist das Vorkommen dieser Blöcke zum Teil kleinern Felsstürzen zuzuschreiben. Erst nördlich des genannten Einschnittes muss ihre Ausstreuung durch die Lokalvergletscherung erfolgt sein, und erst von hier an können wir aus ihrer Verbreitung sichere Schlüsse auf die Verhältnisse der einstigen Vereisung ziehen. Ich beobachtete die vertikale Verbreitung der Hohgantsandsteine von der Lokalität Sattel an. Hier liegen die höchsten Blöcke bei 1270 m, in welcher Höhe zugleich auch Grundmoräne aufgeschlossen ist. Nordwestlich von Gehöft Sattel hält sich das genannte Gestein an die Wasserscheide zwischen Röthenbach und Emme. Nach Kaufmann[1]) wird diese nicht überschritten. Allerdings bleiben die grossen Blöcke, wie wir sie im Hauptthale so häufig beobachten können, auf der Westseite der Wasserscheide zurück. Dagegen müssen wir des eoc. Sandsteines gedenken, der im Südernkessel so reichlich ausgestreut ist und dessen Verbreitung sich fast nur auf diese Mulde beschränkt. (Vide Zusammenst.) Die eoc. Sandsteine im Ram- und Waldbach unterscheiden sich von den Hohgantsandsteinen des Hauptthales nur durch geringeres Volumen und durch ihre gelblich-braune Färbung, eine Folge starker Verwitterung. Im übrigen haben wir hier wie dort dieselbe Gesteinsart. Eine Verfrachtung der im Südernkessel vorkommenden eoc. Sandsteine durch den diluvialen Aargletscher ist wahrscheinlich, da sich die Zone des Hohgantsandsteines bis an den Thunersee erstreckt. Allein im Bereiche der Möglichkeit liegt auch eine Ausstreuung dieses Erratikums durch den Emmengletscher, da wir am Sattel lokale Grundmoräne bei 1270 m finden, während südöstlich und nordwestlich von diesem Punkt gelegene Einsenkungen im Rücken der Wasserscheide ein Ueberfliessen des Emmengletschers nach der genannten Mulde unserer Vermutung sehr nahe legen.

Bei Gehöft Vorder-Lindenboden liegen Hohgantsandsteine noch bei 1160 m. Von hieraus kann man ein allmähliches Sinken ihrer

[1]) Kaufmann. Beiträge zur geolog. Karte d. Schweiz. Emmen- und Schlierengegenden., pag. 457.

Höhenlage beobachten, so dass sie bei Ober-Breitmoosalp noch 1020 m erreichen, von wo an sie sich an den Kamm des nordwestlich streichenden Rothengrates halten.

Wir haben den Emmengletscher ohne weitere Begründung als Zufluss des Aargletschers und damit als eine Erscheinung der Diluvialzeit bezeichnet. Diese Annahme ergibt sich aber aus den erwähnten Verhältnissen der zweiten Eiszeit und ganz besonders aus der Ueberschüttung des Aareerratikums durch den Lokalschutt, wie wir dies auf dem Breitmoos beobachten können. Aus der vertikalen Ausstreuung der Hohgantsandsteine am linken Thalgehänge können wir auf die Entwicklung des Lokalgletschers schliessen. Die Höhendifferenz zwischen der Thalsohle und dem höchstgelegenen Erratikum am Sattel beträgt 300 m. Auf dem Breitmoos und unterhalb Steinboden finden wir noch Hohgantsandsteine bei 1020 und 1042 m, so dass das Gefälle des Eisstromes zwischen Sattel und Eggiwil gering gewesen sein muss. Beide Erscheinungen sprechen für eine intensive Entwicklung der Lokalvereisung während der Diluvialzeit. Wie gestalteten sich nun die Verhältnisse beim Rückzuge des Aargletschers? Der Rückzug der grossen Gletscher erfolgte etappenweise. Die einzelnen Etappen werden von bogenförmigen End- oder besser Rückzugsmoränen begrenzt. Selbst Seitenarme des Hauptgletschers waren imstande, solche Moränen aufzuwerfen.

Beim Rückzuge des Aargletschers aus dem Emmenthal dürften sich aber die Verhältnisse etwas anders gestaltet haben. Die Ablation führte nicht nur zu einer Verkürzung der Längsachse des Gletschers, sondern gleichzeitig auch zu einer Tieferlegung des Gletscherniveaus. Aber eine verhältnismässig geringe Senkung des letztern genügte, um die Wasserscheide zwischen Aare- und Emmenthal eisfrei zu legen, wodurch der Eisstrom über Schwarzenegg nach den Thälern des Röthenbaches und der Emme vom Hauptgletscher abgeschnitten wurde. Vom Augenblicke an, da sich die Unterbrechung der erwähnten Kommunikation vollzogen hatte, konnte das Aareeis im Emmenthal nur mehr einen beweglosen Eiskörper repräsentiren, dem die Kraft, Rückzugsmoränen aufzuwerfen, abging. Und in der That finden wir weder im Röthenbachthal, noch im Thal der Emme nördlich der Ortschaft Eggiwil Endmoränen, die für einen etappenweisen Rückzug des Aargletschers aus dem Emmenthal sprechen würden, insofern wir von zwei kurzen, bogenförmigen Wallmoränen absehen, die wir nicht

ohne weiteres als das Werk des Aargletschers bezeichnen können. Diese beiden Wälle liegen nördlich von Eggiwil am linken Thalgehänge bei dem Gehöft Moosegg. In dem stark sandig-lehmigen Bindemittel stecken hauptsächlich Nagelfluhgerölle und Geschiebe aus der Molasse. Ausserdem finden wir darin auch Hohgantsandsteine, Alpenkalke und vereinzelte Granit- und Gneisgeschiebe. Auf dem einen dieser Wälle aber liegen grössere Blöcke aus Hohgantsandstein, eine Erscheinung, die die Bildung der beiden Moränen durch den Lokalgletscher nahe legt. Wir dürften hieraus auf einen Vorstoss oder auf eine Stagnation des Emmengletschers schliessen, die zu jener Zeit erfolgt sein müsste, da die Kommunikation zwischen dem Aargletscher und seinen ins Emmenthal vorgeschobenen Eismassen bereits unterbrochen war. Doch infolge des ungenügenden Beweismaterials müssen wir dieser Schlussfolgerung noch den Charakter der Hypothese lassen, so dass wir als die nördlichsten Spuren ei selbständigen Emmengletschers erst die Endmoränen auf dem Br moos betrachten dürfen.

C. Der eigentliche Emmengletscher.

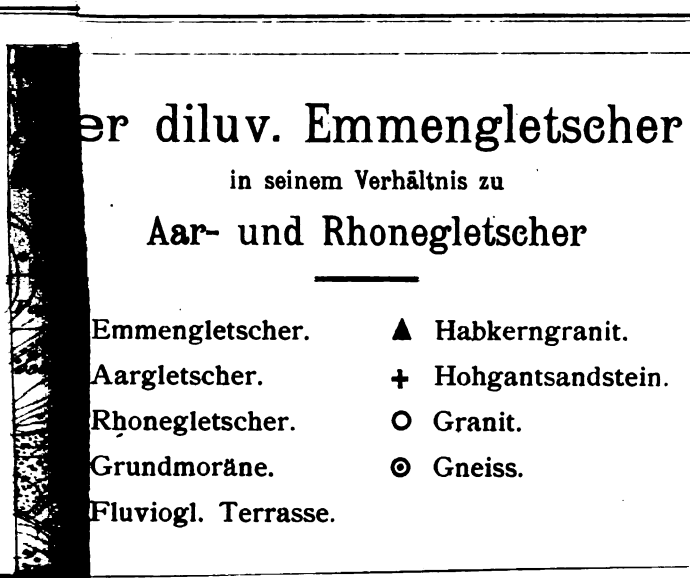
Wir bezeichnen hiemit die zur Zeit des sich zurückziehen Aargletschers noch fortdauernde, dem letztern aber nicht mehr tr täre Lokalvereisung, die ihre Endmoränen auf dem Breitmoos warf. Letzteres war in jener Zeit bereits vom Aargletscher verlass denn sein Erratikum wird, wie wir uns im Bacheinschnitt bei Breitmoosalp überzeugen können, von dem jüngern Lokalschutt ü lagert. Das Breitmoos ist ein Nagelfluh-Plateau südlich der Ortsc Eggiwil. Das Niveau desselben liegt in der Höhe von 940 m. Se Ränder nach Nord und Nordost sind sehr steil bis senkrecht. liegt in der Achse des Hauptthales und bot sowohl für die Ablageru als auch für die Erhaltung der glacialen Bildungen die günstigst Bedingungen. Die Endmoränen auf dem Breitmoos bilden drei boge förmige, nach Süden geöffnete Wälle. Ihre Lage entspricht der Achs des Emmengletschers.

Der äusserste dieser drei Wälle ist in einem Hauptstück von c. 400 m Länge erhalten. Die Höhe desselben beträgt 25 m. Es legt sich hart an den nordöstlichen Absturz des Plateaus. Als natürliche Fortsetzung dieses Walles müssen wir zwei allerdings stark

er diluv. Emmengletscher

in seinem Verhältnis zu

Aar- und Rhonegletscher



verflachte Bildungen bezeichnen. Die eine derselben liegt am Nordrande des Plateaus, die andere schliesst sich dem Rothengrat an.

Der mittlere Wall ist ebenfalls in drei Bruchstücken erhalten. Sie sind nicht so entschieden wallartig wie das am Nordostrande gelegene Hauptfragment des äussersten Walles. Dagegen ist ihre Zusammengehörigkeit leicht zu erkennen. Das östliche Bruchstück ist stark eingebogen und schliesst sich dem dritten oder innersten Walle an; das westliche lehnt sich an den Rothengrat und wird vom mittleren Stück durch den Einschnitt des Rothbaches getrennt, der da, wo er den Wall durchschneidet, eine Anzahl grosser Hohgantblöcke blossgelegt hat. Hinter dem mittleren Walle breitet sich eine sumpfige Depression aus, das eigentliche Breitmoos.

Am vollkommensten erhalten ist die innerste Endmoräne. Sie beginnt westlich vom Siechenhölzli, einige Meter über der neuen Strasse und tritt uns zuerst in Form eines Doppelwalles entgegen, welchen Charakter sie bis zu Gehöft Unter-Breitmoosalp beibehält. Die beiden Wälle erreichen eine Höhe von 20 m. Von genanntem Gehöft an zeigt der äussere Wall eine starke Verflachung, verläuft aber im Abstand von einigen Metern streng parallel dem innern, selbst dessen Ausbuchtungen, die auf eine Lappenbildung des Gletschers schliessen lassen, nachahmend. Der innere Wall ist im Wäldchen ob Siechenhölzli, sowie bei Punkt 964 an der Strasseneinbiegung aufgeschlossen. Das Material, aus dem er sich aufbaut, besteht zum grössten Teil aus grossen, eckigen Hohgantsandsteinen und einigen, ebenfalls eckigen Alpenkalken, die in einem braungelben, lehmigen Schutt eingelagert sind. Dieses Material bürgt vollkommen für den Charakter der Lokalmoräne.

Schon seiner Lage entsprechend, muss der innerste Wall die jüngste Moräne des Breitmooses repräsentieren. Die ungestörte Erhaltung desselben schliesst eine spätere Überschiebung durch den Gletscher infolge eines nachträglichen Vorstosses aus. Damit stimmt zudem auch die starke Verflachung und Abtragung der nur mehr in Bruchstücken vorhandenen äussern Wälle überein. Nun finden wir aber im nahe gelegenen Bacheinschnitt bei Ob. Breitmoosalp von Lokalschutt überlagertes Aareerratikum. Ersterer liegt zudem höher als die innere Endmoräne und ist dieser auch vorgelagert. Er muss daher zeitlich vor derselben, infolge seines Verhaltens zum Aareerratikum dagegen nach der Anwesenheit des Aargletschers abgelagert

worden sein. Um so mehr dürfen wir die Entstehung des jüngsten Walles in eine enddiluviale Zeit verlegen. Das Zeitintervall zwischen der Entstehung der beiden äussern Wälle und derjenigen des innern Walles dürfte ein ganz bedeutendes sein und einen Zeitabschnitt mit anfänglich starker Ablation und darauffolgendem letzten, kräftigen Vorstoss des Emmengletschers umfassen.

Innerhalb der jüngsten Endmoräne erkennen wir in der Thalsohle den einstigen Gletscherboden. Er erstreckt sich als sumpfige Depression vom Siechenhölzli bis zum Steinmösli in einer Länge von 4½ km und ist von Hohgantsandsteinen in Form grosser Blöcke reichlich übersäet.

Bei Siechen bemerken wir auch verflachte Geröll- und Schuttablagerungen, die im Sommer einer spärlichen Vegetation ein kümmerliches Dasein gewähren. Der grösste Teil der Depression wird aber von Sumpfwiesen und Torfmooren beansprucht, welch letztere bei Siechenhölzli und im Steinmösli ausgebeutet werden. Der wasserundurchlassende Untergrund dieses Gletscherbodens wird durch eine lehmige Grundmoräne gebildet. Diese ist an verschiedenen Stellen, besonders aber am Strasseneinschnitt unterhalb Hinter-Junkern hübsch aufgeschlossen. Das sich längs der Strasse hinziehende Thalgehänge ist mit Gletscherschutt belegt, wovon wir uns in den Einschnitten mehrerer der Emme zufliessender Bäche überzeugen können. Ebenso können wir verschiedene, wenn auch nicht gerade gut erhaltene Fragmente einstiger Lateralmoränen beobachten.

Eine bemerkenswerte Glacialbildung, von der wir zwischen Breitmoos und Hinter-Junkern keine Spuren entdecken können, ist uns unweit der letzterwähnten Lokalität am Knubelhüttengraben aufgeschlossen. Es ist eine mächtige Seitenmoräne, die sich vom Büttlerschwandgraben bis in die Nähe von Hinter-Junkern dem Thalgehänge nachzieht. Durch eine Anzahl kleiner Bäche ist dieselbe an mehreren Stellen stark eingeschnitten worden. Die steilen Abstürze des lockern Materials sind von der Hauptstrasse aus leicht erkennbar. Das Niveau dieses Schuttwalles liegt am Büttlerschwandgraben bei 1180 m, am Knubelhüttengraben bei 1130 m. Es zeigt also ein verhältnismässig geringes Gefälle im Sinne der einstigen Gletscherbewegung. Ebenso nimmt die Mächtigkeit dieser Moräne von Süden nach Norden ab. Sie beträgt am Büttlerschwandgraben ca. 40 m, am Knubelhüttengraben nur noch 15 m. Das Material hat

vollständig lokalen Charakter. Es setzt sich hauptsächlich aus Hohgantsandstein, aus Molasse und aus auffallend viel Alpenkalk zusammen. Form und Grösse des Materials sind sehr verschieden. Wir bemerken vorerst grosse, eckige Blöcke aus schwarzem Alpenkalk, die ungeordnet mitten in dem Schuttwalle stecken. Neben diesen erblicken wir einzelne Habkerngranite, Flyschblöcke und helle Alpenkalke. Grössere Blöcke aus Hohgantsandstein sind seltener und meist stark abgerundet. Ein grosser Teil des Materials ist faust- bis kopfgross. Scharf gekritzte Alpenkalke sind darunter reichlich vorhanden. Dieses mittelgrosse Material ist aber mit geringer Ausnahme stark gewaschen, abgerundet und öfters in einem stark sandig-lehmigen Bindemittel eingelegt. Liesse diese Ablagerung irgend welche Schichtung erkennen, so müssten wir sie als fluvioglaciale Terrasse bezeichnen.

Die Höhenlage der Seitenmoräne bleibt am Sattel ca. 140 m hinter derjenigen der höher gelegenen Grundmoräne daselbst zurück. Letztere scheint sich überdies unter der Seitenmoräne durchzuziehen. Der Nachweis ist allerdings schwierig, da diese selbst viel gekritztes Material enthält. Er ergibt sich aber doch mit einiger Sicherheit aus dem Fehlen der lehmigen Grundmoräne auf der Seitenmoräne, während dieselbe ober- und unterhalb der letztern beobachtet werden kann. Hätte sich zudem diese Lateralmoräne beim ersten Vorstoss des Lokalgletschers gebildet, so könnte sie nicht so viel gekritzte Geschiebe enthalten und das lockere Material müsste bei einer nachfolgenden Überschiebung durch den Gletscher eine intensive Verfrachtung erfahren haben. Die Seitenmoräne ist jünger als die Grundmoräne. Sie hat ihre Entstehung einem später erfolgten Vordringen des Gletschers zu verdanken. Nun entspricht aber das nach Norden fallende Niveau des Schuttwalles der jüngsten Endmoräne auf dem Breitmoos. Diese Übereinstimmung ist uns ein weiterer Beweis für einen letzten zu Ende der Diluvialzeit erfolgten Vorstoss des Emmengletschers, eine Erscheinung, die ihr Analogon in dem nachgewiesenen enddiluvialen Vordringen des Sarinegletschers findet. Zwei Eigentümlichkeiten der Seitenmoräne scheinen mir noch von besonderer Bedeutung zu sein.

1. Das reichliche Vorhandensein von gewaschenem Material,
2. der hohe Prozentsatz an schwarzem Alpenkalk.

Beide Erscheinungen stehen aber in bestem Einklang mit unserer die zeitliche Entstehung betreffenden Annahme. Das gewaschene

Material setzt eine intensive Bearbeitung durch fliessendes Wasser voraus, woran es in der dem letzten Gletschervorstosse vorangehenden Periode starker Ablation nicht fehlen konnte. Bedenken wir ferner, dass eine Zeit des Gletscherrückzuges eine Steigerung der Jahreswärme voraussetzt und diese wiederum einer Verschiebung der O.-Isotherme oder der Zone der stärksten Verwitterung nach höhern Lagen ruft, so wird uns auch das reichliche Auftreten des schwarzen Alpenkalkes begreiflich, da dieser als anstehende Gesteinsart im Nordschenkel des Brienzergrates, also im einstigen Akkumulationsgebiet des Emmengletschers beobachtet werden kann.

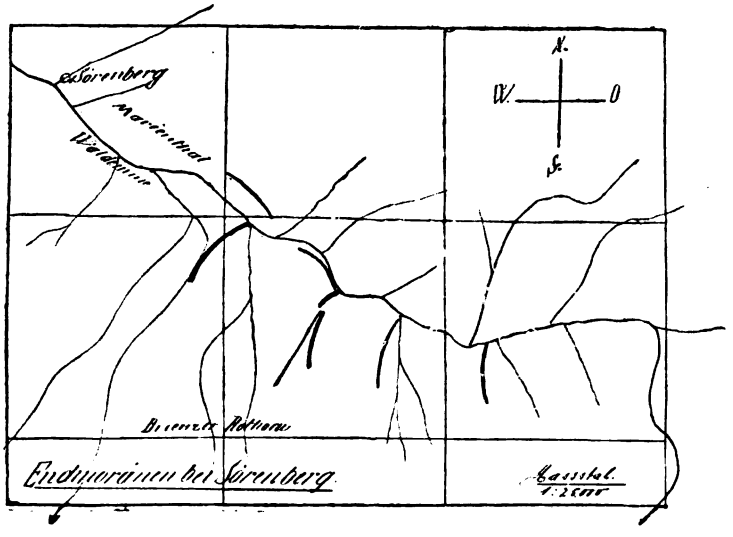
Der endgültige Rückzug des Emmengletschers erfolgte nicht ohne weitere Unterbrechung. Bei der Lokalität Knubelhütte ist eine hübsche, hufeisenförmige Endmoräne aufgeworfen, die uns wohl das letzte stationäre Verhalten des Gletschers erkennen lässt. Sie lehnt sich an das rechte Thalgehänge und erreicht eine Höhe von 30 m. Hinter diesem Schuttwall, der nicht die ganze Thalsohle absperrt, breitet sich das sog. Steinmösli aus, eine Fortsetzung des schon früher erwähnten grossen Gletscherbodens. Eine weitere Untersuchung der Glacialbildungen oberhalb Knubelhütte führt auf keine jüngern Endmoränen, so dass sich der letzte Rückzug des Gletschers ohne weitere Unterbrechung vollzogen haben mag.

D. Die Vereisung des Marienthales.

Eine zu der Lokalvergletscherung des Emmenthales analoge Erscheinung bietet uns das Marienthal, die oberste Stufe des Entlebuches. Auch dieses hatte einen Lokalgletscher. Zwischen Hirseggbrügg und Sörenberg können wir nicht sehr hohe, sich in der Nähe des Flussufers hinziehende Schuttwälle beobachten, deren Nordende eine schwache, hufeisenförmige Einbiegung erkennen lässt. Die Waldemme fliesst hier in einem tiefen Einschnitt, und einer dieser Wälle endigt in einem steilen Absturz nach dem Flussbette, wodurch er uns vorzüglich erschlossen wird. Das Material hat vollständig lokalen Charakter. In einem stark lehmigen Bindemittel stecken neben mittelgrossen abgerundeten eocänen Sandsteinen obenso grosse bis mächtige schwarze Alpenkalke. Diese sind teils abgerundet und stark gekritzt, teils eckig. Dem Schuttwalle fehlt jegliche Schichtung. Form, Material und Aufbau lassen in demselben die Endmoräne eines einstigen Lokalgletschers erkennen. Unterhalb Hirseggbrügg gelang es mir

nicht, eine weitere ähnliche Bildung zu beobachten. Dagegen finden wir südlich von Sörenberg ein ganzes System hübscher, kurzer Endmoränen, die uns eine letzte Rückzugsetappe des Lokalgletschers markieren.

Diese Wälle sind da aufgeschüttet, wo sich mit dem Hauptthal eine seitliche, allerdings nicht scharf ausgeprägte Mulde vereinigt, die sich dem Fusse des Brienzergrates nachzieht. Die Erwähnung dieser Mulde kann hier nicht übergangen werden, da gewisse Schuttwälle für die Thätigkeit eines aus derselben vordringenden Gletschers sprechen. (Vide Karte.)



Der äusserste bogenförmige Wall erreicht eine Länge von ca. 400 m. Er lehnt sich mit seinen beiden Enden an die gegenüberliegenden Thalabhänge. Dadurch wird die Waldemme an den nordöstlichen, ein vom Brienzergrat her fliessender Bach an den südwestlichen Abhang gedrängt. Der Wall ist gut erhalten. Seine Höhe beträgt 25 m. In der Mitte des Bogens bemerken wir einen hübschen Einschnitt, das Werk abfliessender Schmelzwässer. Hinter dem Walle breitet sich der alte Gletscherboden aus, eine sumpfige Depression von 1 km Durchmesser. Im Südosten wird dieselbe durch zwei Wälle eingeschlossen: vorerst durch eine kurze, gebogene, nach Südwesten geöffnete Moräne, die in unmittelbarer Nähe des Flusses aufgeschüttet

ist, sodann durch einen geraden, langgestreckten, von Südwesten nach Nordosten verlaufenden Wall. Die Lage dieser beiden Moränen entspricht nicht einem Gletscher des Hauptthales, sondern einem von Südwesten her durch die erwähnte Mulde vordringenden Seitengletscher. Das erstgenannte Stück scheint eine Endmoräne, der gerade verlaufende Wall eine Seitenmoräne desselben zu sein. Unmittelbar an die letztere lehnt sich nun eine nach Südosten geöffnete bogenförmige Moräne, die unzweideutig dem Gletscher des Hauptthales entspricht. In ihrer östlichen Hälfte bemerken wir einen Einschnitt, die Abflusstelle der einstigen Schmelzwässer, und hinter ihr erkennen wir wieder den alten Gletscherboden. Die Höhe dieser Wälle erreicht 25—30 m. Etwas niedriger sind zwei noch folgende innere Endmoränen, die uns den weitern Rückzug des Gletschers markieren. Es wäre interessant, auch im Marienthal aus dem Verhalten der erwähnten Endmoränen zu dem Erratikum des Reussgletschers auf einen enddiluvialen Vorstoss des Lokalgletschers schliessen zu können. Meine Beobachtungen führten nicht zu diesem Ergebnis. In der Umgebung von Sörenberg konnte ich überhaupt kein Reussgletschererratikum beobachten. Die auf der Favre'schen Karte verzeichneten Blöcke unterhalb der genannten Ortschaft sind Halbkerngranite. Dagegen spricht der ungestörte Aufbau der beschriebenen Moränen unzweifelhaft für eine Diluvialerscheinung, so dass eine kräftige enddiluviale Oscillation des Lokalgletschers auch im Marienthal nicht ausgeschlossen ist.

III. Schlussfolgerungen.

Gestützt auf unsere Kartenaufnahme in 1 : 25,000 führen die Glacialerscheinungen der Emmenthäler zur Annahme zweier Eiszeiten. Spuren der sogenannten ersten Eiszeit sind nicht gefunden worden. Die Verfrachtung der höchstgelegenen Findlinge, deren Lage sich nicht mit dem Niveau des diluvialen Aargletschers vereinigen lässt, verlegen wir in die mittlere Eiszeit, die sich durch die höchste Entwicklung des Rhonegletschers charakterisiert. Dieser verfrachtete echte Rhoneblöcke südwärts bis zu der Linie Gurnigelbad-Eggiwil-Napf. Er hatte aber im Aargletscher einen mächtigen und in einer lokalen Vereisung des obersten Emmenthales einen schwächern Zufluss, so dass die Rhonegletschergrenze vom Gurnigel über die Hohe Honegg nach Wiggen gezogen werden kann. Nie kann dagegen der Rhone-

gletscher in das oberste Quellgebiet der Emme vorgedrungen sein, wir dies die Favre'sche Gletscherkarte verzeichnet.

Die Verfrachtung der tiefer gelegenen glacialen Bildungen, die uns in Form erratischer Blöcke, Terrassen und Grundmoränen erhalten sind, verlegen wir in die dritte Eiszeit. Der verfrachtende Gletscher ist der diluviale Aargletscher, der ins Thal der grossen Emme eindrang. Er hatte einen bedeutenden Zufluss im Emmengletscher, dessen Anschluss bei Eggiwil erfolgte. Eine hübsche Endmoräne auf dem Breitmoos, die sich aus den Lokalgesteinen des Emmenthales aufbaut und zugleich Aarblöcke im Liegenden aufweist, spricht für einen zu Ende der Diluvialzeit erfolgten selbständigen Vorstoss des Emmenthalgletschers. Derselbe ist hier zum ersten Mal als selbständiger Lokalgletscher erwiesen worden. In den Endmoränen des Saanen- und Marienthales findet diese Erscheinung ihr Analogon. Wir können hieraus auf selbständige diluviale Vereisungen der grössern Voralpenthäler schliessen, deren Gletscher zu Ende der Diluvialzeit, nachdem die grossen Eisströme bereits den Rückzug angetreten hatten, noch hübsche Endmoränen aufwarfen.

Bruno Moebus.

Der diluviale Oglioglетscher.

I. Einleitung mit Litteratur.

Schon seit längerer Zeit erfreut sich das früher vernachlässigte Diluvium grösseren Interesses und somit intensiveren Studiums. Auch die Vergletscherung der Alpen, und davon wieder hauptsächlich die der Nordseite, hat ihre Bearbeiter in reichem Masse gefunden.

Anders liegt es auf der Südseite der Alpen. Die grossen Gletscher wurden zwar auch hier mehr oder weniger umfassend beschrieben, aber die kleineren mussten dabei ziemlich in den Hintergrund treten. Speziell ist dies beim Oglioglетscher der Fall, bei dessen Untersuchung die neueren Erfahrungen über Gletscher bisher nicht genügend berücksichtigt sind.

Deshalb dürfte es wohl nicht unangebracht sein, eine auf genauen Untersuchungen und den Gesichtspunkten der neueren Glacialgeologie beruhende, umfassendere Bearbeitung des Oglioglетschers zu geben.

An Litteratur über den Oglioglетscher ist in erster Linie zu nennen Stoppani [1]) mit seiner Era neozoica, worin er eine zwar umfassende Beschreibung des Oglioglетschers giebt, die aber in Anbetracht des grossen Stoffes keineswegs ins Detail gehen konnte, auf die sich aber alle, die nach Stoppani über den Oglioglетscher geschrieben, berufen. Stoppani nimmt nur eine Eiszeit an.

Ganz auf Stoppani fusst Saccos Arbeit: «Apparato morenico del Lago d'Iseo» [2]), der zwar ins Detail geht, aber seine Bezeichnungen sehr allgemein hält. Sein «Morenico» bezeichnet innere und äussere Moränenzone, sein «Terrazziano» verschwemmte innere und äussere Moräne, Fluvioglacial und Kies. Was er am Oglio «Ceppo» nennt, ist einfach durch Sickerwasser lokal mehr oder weniger verfertigtes Fluvioglacial oder sogar verkitteter Moränenschutt, wie z. B. im Adrarathal. Sein *Diluvium* ist *Alluvium*, sein Villafranchiano sind interglaciale Bänderthone.

[1]) Stoppani: L'Era neozoica in Italia. Milano 1878.

[2]) Sacco, F.: L'Apparato Morenico del Lago d'Iseo. (Tip. e Lit. Camilla Bartolero. Torino 1894.)

Dann ist zu nennen Salmojraghi [1]), der die Erosionspyramiden des Moränenlappens bei Zone und die Seitenmoräne oberhalb Sale-Marasino beschreibt.

Amighetti [2]) giebt eine populär gehaltene Beschreibung des Glacialterrains am Lago d'Iseo, speziell oberhalb Lovere. Ebenso Salmojraghi über das Interglacial im Borlezzathal.

Zum erstenmal hat A. Baltzer [3]) die Existenz mehrerer Glacialperioden auch auf der Südseite der Alpen, und speziell am Iseosee, nachgewiesen, indem er in einer Einlage zwischen zwei Grundmoränen in der Borlezzaschlucht bei Sellere durch Rhododendron Ponticum und andere von Prof. F. Fischer beschriebene Formen ein milderes Klima nachwies. [4])

Auch der Ingenieur Stella [5]) steht auf dem neuesten Standpunkte der Glacialforschung, kritisiert Saccos zu allgemein gehaltene Bezeichnungen, wie «Terrazziano» und «Diluvium», spricht sich für die Existenz mehrerer Glacialperioden, auch am Lago d'Iseo, aus, und fordert zur Forschung und Kritik auf. Seine Vermutungen haben sich am Iseosee teilweise bestätigt.

II. Areal des Gletschers.

Der Oglioglетscher erfüllte seiner Zeit das Camonicathal, welches im Norden an der österreichisch- (süd-tyrolisch) italienischen Grenze beginnt und in direkt südlicher Richtung bis an den Iseosee reicht.

Der Haupt-Gletscher setzte sich linkerseits aus den von den Höhen des Monte Gavia, Monte Tonale und dem Adamellomassiv herabfliessenden Eismassen zusammen; von rechts speisten ihn hauptsächlich die Höhen des M. Sarotti, Pizzo Trivigno, M. Venero-

[1]) Salmojraghi F.: Le piramidi di erosione ed i terreni glaciali di Zone. (Boll. Soc. Geol. ital. vol. IV, 1885.)

Giacimenti ed origine della terra follonica di Marone e Sale Marasino sul Lago d'Iseo (Atti Soc. it. Science nat. vol. XXXIV, 1893.)

[2]) Amighetti, A: Nuove ricerche sui terreni glaciali dei dintorni del Lago d'Iseo (Lovere 1889.) Osservazioni geologiche sul terreno glaciale dei dintorni di Lovere. (Atti Soc. it. Sc. nat. vol. XXXI, 1889.)

[3]) A. Baltzer: Spezialgeologisches von der Südseite der Alpen. Mitteil. der naturforschenden Gesellschaft in Bern. 1892.

[4]) Salmojraghi: Formazioni interglaciali allo sbocco di Val Borlezza nel lago d'Iseo.

[5]) Stella, A.: Sui terreni quaternari della Valle del Po, in Rapporto alla Carta geologica d'Italia. (Roma, Tip. Nazionale, 1895.)

colo und M. Mignone durch ihre Gletscher, die links durch das V. Grande, V. Mortirolo, V. di Costeno, V. di Alione, V. di Lanico und V. di Scalve, rechts durch V. Mazza, V. Paghera, V. di Malgha, V. di Brate, V. di Dois, V. Grigna und V. Inferno ins Camonicathal herabkamen.

Der Gletscher umfasste in seiner Hauptausdehnung ein Areal von ca. 100 km Länge und ca. 10—15 km Breite und erstreckte sich bis zum Monte Orfano, südlich des Iseosees, an dem er bis ca. 40 m in die Höhe ging.

III. Moränen.

A. Moränen südlich des Iseosees (Amphitheater). Endmoränen (vergl. Karte).

Das eigentliche Moränenamphitheater, d. h. die Endmoränen der beiden Glacialperioden des Oglioglетschers, liegt im östlichen Teil der Südseite des Iseosees, zwischen dem am Ufer des Sees gelegenen Städtchen Iseo und der 12 km südlich an der Linie Mailand-Venedig gelegenen Station Rovato, in der sogenannten Francia-Corta.

Die Moränenwälle, bisher auf keiner Karte eingetragen, sind selten schön erhalten, da, zum Unterschied von den meisten diluvialen Gletschern der Südseite der Alpen, beim Oglioglетscher Moränenbildung und Gletscherabfluss im wesentlichen getrennt sind: der Oglioglетscher hatte seinen Hauptabfluss im Westen des Iseosees, ungefähr dem jetzigen Ogliolauf entsprechend.

Das Amphitheater umfasst einen Flächenraum von ca. 12 km Länge und 10 km Breite, der im Norden vom Iseosee, im Osten und Westen von den Jurabergen der Francia-Corta und im Süden von der aus (eocæner) Nagelfluh bestehenden Monte Orfano-Kette und der lombardischen Tiefebene begrenzt wird.

Es lassen sich sieben Moränenzüge unterscheiden, wovon fünf auf die jüngere, zwei auf die ältere Eiszeit entfallen.

a) Aeltere Eiszeit.

1. Endmoränencharakterisierung.

Ausser der von A. Baltzer[1]) schon beschriebenen unteren Grundmoräne im Becken von Pianico, sind im Norden des Iseosees keinerlei Beweise für eine ältere Eiszeit vorhanden.

[1]) A. Baltzer: Glacialgeologisches von der Südseite der Alpen. (Pianico Sellere.). Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Palæontologie. Jahrgang 1896. I. Band.

Um so mehr finden sich solche südlich des Iseosees im eigentlichen Moränenamphitheater, wo sich jüngere und ältere Eiszeit von einander trennen lassen.

Der innere von den beiden der älteren Vergletscherung angehörigen Ringe beginnt im Osten bei C. Dso. Badino, südlich von Monticello Brusati, in einem kleinen, ziemlich direkt von Norden nach Süden sich erstreckenden Wall, setzt dann südwestlich in kleineren, vielfach verschwemmten und oft nur noch schildförmig verlaufenden Wällen fort: (vide Karte) bei Bettole, Camignone, Passirano, La Costa, Cazzago bis Villa und endigt im Westen in dem kleinen Wall Zocco di sopra.

Der äussere Ring, ca. 2,5 km gegen Süden vom innern entfernt, ist sehr unvollständig und hat nur noch einige wenige flach bis schildförmig verlaufende Wälle auf dem westlichen Flügel als Zeugen seiner ehemaligen Existenz; der Hügel von S. Donato bei Rovato, der von Pal-zo, Cocchetti, von Cna Caretti, La Tesa, die Höhen 206, 202, S-Vito, 201, bilden den äusseren Ring und verlieren sich, schildförmig verlaufend, nach Westen in der Ebene; von San Donato östlich ist alles flach und von einer Wallbildung nichts zu bemerken.

2. *Ablagerungen innerhalb und ausserhalb der Wälle. Beweise für die ältere Glacialzeit.*

Wie schon oben bemerkt, sind die Moränen der älteren Vergletscherung stark verschwemmt und fällt deshalb der Unterschied von der schönen charakteristischen, äussersten Endmoräne der jüngeren Vergletscherung um so deutlicher ins Auge, so dass der Gedanke an eine zweite Eiszeit sehr nahe liegt; sieht man nun noch das, zum Unterschied von der jüngeren Vergletscherung, weit stärker verwitterte Material (wobei man allerdings von dem in allen Ablagerungen des Oglioglетschers mehr oder weniger häufig vorkommenden Adamellogranit sich nicht leiten lassen darf) und die zwar nicht überall gleichmässige, aber doch immer angedeutete, an manchen Orten sehr typische bis zu 1½ m tiefe Ferettobildung, so scheint eine ältere Vergletscherung bewiesen.

Die Ferettisierung tritt ganz besonders schön zu Tage bei S. Donato an der Strasse Rovato-Iseo, ferner bei der Kiesgrube an der Wegkreuzung Iseo-Rovato und Cazzago-Villa, hier ist die Ferettisierung 1½ m tief, darunter noch ca. 6 m tief schön sortiertes

typisches Fluvioglacial; in Valle Pizzarotta legt der Bach einen Aufschluss von ca. 6 m Höhe bloss, an der Oberfläche ca. 1 m ferettisiert, darunter typische lehmige Grundmoräne; darauf ein massiver Block von rotem Porphyr ca. 8 cbm umfassend, auf dem ein Maulbeerbaum wächst. Oestlich M. Martinello, bei C. Nulli, typische Ferettobildung, darunter Fluvioglacial.

Nach Süden zu geht der Moränenschutt allmählich in Fluvioglacial, und dieses dann in Kies über; das Material ordnet sich und nimmt immer mehr Schichtung an. Noch ca. 7 km von der äussersten Endmoräne der jüngsten Vergletscherung entfernt, in den zur Gewinnung von Strassenschotter angelegten Kiesgruben, längs der Strasse Rovato-Ospitaletto, finden sich noch viele gekritzte Geschiebe, so dass eigentliches Kies erst südlich der Linie Rovato-Ospitaletto beginnt.

Weit bedeutender noch ist das Fluvioglacial entwickelt im Westen des Iseogebietes, wo es, da der Gletscher hier seine Abflüsse hatte, viel weiter nördlich, schon bei Paratico beginnt, aber wohl der jüngeren Vergletscherung entsprechende Niederterrassenschotter sind. Auch hier ist alles mit einer typischen Ferettodecke überzogen, oft 1—2 m mächtig. Schöne Aufschlüsse, die mehr oder weniger kiesigen bis fluvioglacialen Charakter haben, zeigen die oft mehr als 30 m Mächtigkeit des Schotters samt der Ferettodecke (Capriolo, Quintano, Palazzolo, Palosco). Mächtige Ablagerungen von grossen (1—4 m^3) erratischen Blöcken sind westlich Castell Paratico, weiter südlich bei Cne Biaghe und bei dem Bahnwärterhäuschen in der Nähe der Quote 186.

Hier im Westen kann die Kiesbildung auch erst südlich der Linie Pontoglio-Chiari beginnen, da dort noch verschiedentlich geschrammte Geschiebe gefunden wurden, $7^1/_2$ km von der äusseren Moräne entfernt.

Im Westen liegt die Grenze des Fluvioglaciales ca. auf der Linie Mornico-Cividate, dort sind zwar noch krystallinische Geschiebe, aber keine Schrammen mehr.

Was im Osten bei Sergnana, Provezze ect. Sacco als Diluvio bezeichnet, ist nur Verwitterungsprodukt der lokalen jurassischen Gesteine mit von den benachbarten Bergen herabgeschwemmter Terra rossa, eckiges Gestein, nichts krystallinisches, also *Allurium.*

3. Terrassen der älteren Eiszeit.

Auf beiden Seiten des Oglio befindet sich ein System von Terrassen, teils Akkumulations-, teils Erosionsterrassen. Drei übereinander leniegde Terrassen, die mit ihren Rändern gegen den Ogliolauf abfallen und sich von Paratico bis Palosco und zum Teil weiter bis Cividate hinunterziehen.

Jede der zwei oberen Terrassen (die unterste ist eine Erosionsterrasse) entspricht einer Eiszeit, und zwar liegt die ältere oben, die jüngere darunter. Alle Terrassen sind fluvioglacial, lassen sich aber, abgesehen von der Höhendifferenz, auch nach dem Grade der Verwitterung und Ferettisierung von einander unterscheiden.

Am Hügel von Montecchio, südwestlich Sarnico, ist (sowohl nach Höhenlage als Verwitterung) noch eine oberste Terrasse, auf der das Schloss selbst liegt, zu konstatieren: die Terrasse der dritten, ältesten Eiszeit. (?) Und es liegen hier am Hügel von Montecchio Decken-, Hoch- und Niederterrassen-Schotter schön übereinander.

Die oberste Terrasse, ca. 10 m höher gelegen als die mittlere, gehört der älteren Vergletscherung an. Das Material ist stark verwittert und die Ferettisierung weit vorgeschritten und sehr typisch.

Auf dem rechten Oglioufer ist sie bei Cerche angedeutet, auf dem linken in zwei Stufen nachgewiesen, die einander parallel sich von Capriolo gegen Zocco und Spina hinziehen.

b) Jüngere Eiszeit.

1. Endmoränen. Charakterisierung.

Von den fünf der jüngeren Eiszeit angehörigen Moränen-Ringen ist der äusserste der schönste und charakteristischste, er zieht sich von Adro, wo er am Ammonitico rosso aufsetzt, über Erbusco, S. Stefano, Bornato bis Sergnana, um auch hier wieder an die Juraberge sich anzulehnen. Von Erbusco bis Pedergnano ist er doppelt.

Diese hufeisenförmige Endmoräne hat einen Radius von 6 km, eine ungefähre Länge von 12 km und ist ca. 800 m von der äusseren Moränenzone entfernt. Die Moräne, wenig unterbrochen, ist eine der schönsten Wallmoränen der Südseite der Alpen mit einer Breite von ca. 1000 m, fällt nach innen steiler ab als nach aussen, grossblockig (mehrere m^3). Auf der Ostseite mehr Oberflächenmaterial, Bindemittel sandig. Ungeschichtet, bildet beim Durchbruch des Fosso Longherone (bei S. Stefano und Bornato) steile

Blockhalden mit stark gekritztem und geschrammtem meist gerundetem Material.

Nordwestlich von Monte-Rotondo ist die Moräne terrassiert (drei Terrassen), mit zahlreichen grossen Blöcken übersät und kleinem 50 m langem Moränenteiche, der mit Blöcken angefüllt ist.

Die zweite Endmoräne, die Borgonatomoräne, beginnt im Westen bei Nigoline und erstreckt sich über Borgonato bis nahe südwestlich Fontane. Sie liegt im Westen dem Lias der Monte-Alto-Kette an und bildet eine niedrige, aus ca. 30 m hohen Wällen zusammengesetzte, zum Teil doppelte ca. 8 km lange Hügelkette. Das Castell von Borgonato liegt auf einem solchen Moränenhügel. Westlich von Borgonato sind die Wälle flacher und breiter und meistens bebaut. Viel geschrammtes Grundmoränenmaterial, speziell auf der Ostseite, grosse Blöcke seltener.

Die dritte Endmoräne erstreckt sich ca. 1 km südlich Colombaro vom Hang des Monte-Alto über Grumi bis la Chiusa, ca. 6 km lang, in der westlichen Hälfte nur noch durch erratische Blockanhäufungen angedeutet. Wälle sind schildförmig, das Material verschwemmt und meist kleiner, Bindemittel sandig-lehmig.

Die vierte Endmoräne nach der äussersten, die schönste des Amphitheaters, die Timolinemoräne, zieht sich von Colombaro im Westen über Timoline nach Osten bis Provaglio. Ca. 6 km lange typische Wallmoräne, Grundmoränenmaterial, bis Kbfuss Grösse, ungeschichtet, sandiges Bindemittel.

Von Provaglio bis Timoline ist die Moräne häufig unterbrochen, hat eine Breite von ca. 200 m und erhebt sich ca. 30 m über die Ebene. Von Timoline bis Colombaro laufen die Wälle ziemlich ununterbrochen an Breite zunehmend; Steilabfall wie gewöhnlich nach Nord.

Die fünfte, letzte und kleinste ist die Moräne Iseo-Clusane. Von Iseo ca. 2 km westlich nur durch einzelne Erratica bezeichnet, setzt sie sich bis Clusane in einzelnen kleineren Wällen fort. Wenig Grundmoränenmaterial bis zu $^1/_2$ m^3 Grösse. Ungeschichtet, sandig-kalkiges Bindemittel.

2. Mittel- und Seitenmoränen.

Das Amphitheater vervollständigen noch eine Mittelmoräne und zwei Seitenmoränen.

Die Mittelmoräne von Borgonato, die sich direkt südlich ca. $1^1/_2$ km weit erstreckt, bildet einen schönen Wall von ca. 30 m

Höhe und 700 m Breite. Material meist gerundet und geschrammt, mit einzelnen Blöcken bis m^3 Grösse, lehmiges Bindemittel, ungeschichtet.

Die Ufermoränen liegen östlich und westlich des Amphitheaters auf dem anstehenden Lias.

Die östliche, eine jüngere Rückzugsmoräne, geht von Iseo längs der Strasse nach Brescia über Provaglio bis nahe westlich Sergnana, meist nur durch erratische Blöcke bezeichnet. Die westliche auf der Monte-Alto-Kette von süd-westlich Clusane in einer Höhe von ca. 400 m bis Adro, bildet oberhalb Clusane bei Belvedere eine schöne Wallmoräne[1]), die aber weiter nach Süden ihren Charakter verliert und nur noch Blockhalden bildet mit hauptsächlich sandigen Einlagen. Material meist eckig, Kopf bis m^3 gross.

3. Terrassen.

Am besten entwickelt ist die der jüngeren Eiszeit am Iseosee entsprechende Terrasse, die mittlere, 35 m über dem Oglio gelegene Terrasse (vide Karte), die oft eine bedeutende Breite annimmt. Es liegen z. B. auf dieser Terrasse rechts des Oglio: Tagliuno, Cividino Palazzolo (wenigstens der obere Teil), S. Fermo, nördlich von Palosco.

Die untersten Terrassen am Oglio hinunter, ca. 20 m über Oglio und ca. 12 m tiefer als die mittlere, die der jüngeren Eiszeit entspricht, sind Erosionsterrassen, aber bei weitem nicht so schön entwickelt als die mittleren und bilden manchmal nur den Absturz gegen den Oglio (vide Karte). Die mittlere Terrasse ist schön entwickelt bei Credaro, unterhalb Tagliuno, bei der Eisenbahnbrücke von Palazzolo und doppelt von Palazzolo bis hinunter nach Palosco. Ebenso auf dem linken Ufer von Pontoglio bis gegen Palazzolo, von Cna Poffada bis Cna Stefano, bei Moltore und C. Masnadura.

4. Ablagerungen zwischen den Wällen.

Zwischen den Wällen herrscht sandige Grundmoräne vor. An manchen Stellen, wie nordwestlich und südlich von Borgonato, sind fluvioglaciale Kiesbänke abgelagert, mit etwas Schichtung und Fallen nach aussen. Ferner sind fluvioglaciale Kiesbänke südwestlich Provaglio mit meist sandig-thonigem Bindemittel. Auf der Ostseite ist

[1]) Nach Sacco rührt diese Moräne von einem kleinen Arm des Hauptgletschers her, der über Belvedere in einer Höhe von ca. 400 m, Corno Pendita freilassend, durch die Thaleinsenkung sich hinunter gegen Paratico zog.

(Apparato morenico del Lago d'Iseo pag. 25.)

die Facies mehr sandig, auf der Westseite mehr thonig. Erratische Blöcke vereinzelt und quartierweise nicht selten.

Auch Lehmlager finden sich zwischen den Wällen, die zum Teil ausgebeutet werden. Auf der Ostseite nur eines, östlich Fontecolo, auf der Westseite dagegen vier: hart südlich Cremignane und Colombaro, östlich Grumi und südöstlich Torbiato. Auf der Westseite befinden sich im ganzen mehr Verschwemmungsprodukte und sind die Wälle im Westen des Amphitheaters lange nicht so schön erhalten wie auf der Ostseite.

5. Anstehendes innerhalb der Endmoränen.

Östlich Cremignane ein Drum aus glacialer Nagelfluh einer älteren Gletscherzeit; kräftige Schrammen direkt südlich verlaufend, beweisen auf dem ca. 1 km langen und 100 m breiten Felsrücken die Berührung mit dem Gletscher.

Bei Casina Badrio, südlich Colombaro, Rund-Höcker mit Kern von grauem Liaskalk.

Ferner in Borgonato im Hofe des dem Herrn Berlucchi gehörigen Anwesens anstehender Liaskalk, der wohl auch den Kern zu der mit einer kleinen Villa gekrönten Anhöhe nebenan bildet.

B. Moränen am Iseosee.

Moränenlappen mit Bergmoränen.

Auf der Ostseite des Sees, oberhalb Iseo, bis zu einer Höhe von ca. 700 m ist das Terrain mit Moränenschutt bedeckt, auf dem sich in einer Höhe von ca. 600 m eine mächtige Wallmoräne lagert, die Moräne Pianissi-Palazzina; fällt nach Süden $2^1/_2$—$3^1/_2{}^0$ entsprechend der äusseren Endmoräne der jüngeren Vergletscherung. Sie ist terrassiert, enthält schöne Aufschlüsse, eckiges Material, Kopf bis cbm Grösse vorherrschend, lokal zu festem Conglomerat verkittet, Bindemittel lehmig. Bei Palazzina stösst auf diese Moräne eine zweite Wallmoräne, die mehr südwestlich verläuft, Moräne Invino — S. Teresa und wohl der älteren Vergletscherung angehört.

In seiner grössten Ausdehnung war der Gletscher so hoch, dass auch einiges von ihm transportiertes Material ins Val Foina hinunterfiel.[1])

[1]) Sacco. Apparato Morenico del Lago d'Iseo. p. 23.

Notizi che nel momento di massima espansione glaciale il ramo glaciale insinuato di Invino-S. Teresa potè raggiungere la Forcella e quindi fluitare, di rei qualche ciottoto erratico nella Valle di Foina.

Etwas weiter nördlich, zwischen Sulsano und Marone, wieder glaciale Ablagerungen bedeutenden Umfangs, die ihren Höhepunkt in einer ca. 700 m über Meer gelegenen Seitenmoräne erreicht, die schönste und charakteristischste, in Einschnitten gut aufgeschlossene mit Blöcken bedeckte, durch Erosionsschluchten zerstückelte Bergwallmoräne. Rundes und vorwiegend eckiges, zum Teil grossblockiges Material, Bindemittel lehmig. Sie ist ebenfalls terrassiert.

Sacco sagt darüber:

Apparato morenico del Lago d'Iseo. p. 22. Quivi infatti si è depositata e si è ben conservata una delle più belle e pie tipiche morene insinuate, formazione che spingendosi in alto fin verso e 700 m s. l. m. vien più più degradando in una diccina di terrazze, fra sui quattro principali ampie, nettissime, profondamente incise de vari torrentelli che ne mettono a undo la caotica costituzione e ne indicano la notevole potenza.

Erdpyramiden von Cisiano.

Stoppani, der sie eine der schönsten Bergmoränen nennt, sagt darüber:

Stoppani Era neozoica pag. 51: Trattasi qui evidentemente di morena laterale composta e insinuata, formata di dodici cordoni, ossia di dodici morene fuse in una alla base, in corrispondenza a dodici periodi di regresso e di sosta del antico ghiacciajo del lago d'Iseo.

Auch die Isola inmitten des Sees gelegen ist, wie schon Sacco[1]) angiebt, von Glacial überzogen, mit Ausnahme der steilen Felsabstürze im Osten und Süden der Insel. Zwei schöne Wallmoränen bei Senzano (vide Karte). Wälle 80 m breit, 15 m hoch. Material meist eckig, zum Teil etwas verfestigt. Bindemittel sandig-kiesig.

Zwischen Siviano und Cure grosse erratische Blöcke abgesetzt, hauptsächlich grauer und roter Triassandstein, grüner Porphyr (4 cbm), Adamellogranit, Gneiss und Glimmerquarzit.

Auch auf dem Gipfel des Monte-Isola, ca. 600 m über Meer, sind Erratica abgelagert, und ist die Kapelle der Madonna della Seriola aus erratischen Geschieben erbaut. Auf der Insel lassen sich fünf ungeschichtete Glacialterrassen erkennen.

Monte-Isola und speziell die beiden kleinen Inselchen S. Paolo im Süden und Loreto im Norden werden von Salmojraghi und Sacco als glänzende Beweise gegen die Seebildung durch Gletschererosion angeführt.

Bei Cislano, oberhalb Marone ca. 600 m über Meer, mächtige Grundmoräne mit ausgezeichneten von Salmojraghi beschriebenen Erdpyramiden. Die Basis der Moräne liegt ca. 400 m über dem See. ca. 80 m mächtig, 150 m lang, 250 m breit, Bindemittel sandig-kiesig.

Das Becken von Zone und die davon ausstrahlenden Thäler sind mit erratischen Geschieben angefüllt, speziell das Erosionsthal Cislano-Marone. Das Glacial zieht sich nordwärts am Monte Aguina vorbei (1200 m) bis hinunter nach Toline am Seeufer (vergl. Karte). Zwischen Corno Trenta Passi und Corni Capreni, ca 1150 m, liegen einige erratische Blöcke.

Bei Pisogne von Govine bis S. Maria und das Val del Torbiolo hinauf bis ca. 700 m ebenfalls Moränenlappen, bei C. Minico kleine Wallmoräne, von Norden nach Süden.

Auf der Westseite des Sees bei Lovere kleiner Moränenlappen, dann von Castro westwärts Pianico-Lovere das Porlezzathal hinauf, mächtige Anhäufungen von Glacialschutt, in den die Porlezza ca. 30 m tief erodiert. Hier liegen zwischen zwei Grundmoränen die Ablage-

[1]) Sacco: Apparato Morenico del Lago d'Iseo pag. 23: Il Monte Isola fu certamente del tutto coperto da ghiaciaio sebinese durante il periodo del suo massimo sviluppo, giacchè vi disersai ciottoli erratici persino nelle anfrattuosità della roccia su cui è fondato il Santuario di Madonna della Seriola a circa 600 m s. l. m.

rungen des von Professor A. Baltzer[1]) beschriebenen interglacialen Seebeckens Pianico-Sellere mit den Resten einer Flora von pontischem Charakter.

Etwas weiter nach Süden oberhalb Riva di Solto ca. zwei qkm ist das Gelände mit Glacialschutt überzogen, auf dem ein ganzes Amphitheater von typischen Wallmoränen liegt. Die schönste und grösste Wallmoräne ist die von Esmate, ca. 40 m hoch und 1 km lang, dann etwas tiefer zwei Wallmoränen bei Solto, ca. 30 m hoch und zu unterst bei Sconico eine Moräne, die aus vier Strängen besteht. Rundes, geschrammtes Gestein vorherrschend, meist faust- bis kopfgrosse Geschiebe, einzelne kbm-grosse Blöcke, Bindemittel lehmig. Die Moränen verlaufen ziemlich direkt von Ost nach West und wurden vom Gletscher abgelagert, als er sich aus dem Cavallinathal zurückzog, in das er durch die Enge bei Castro und über den Rücken von Solto (den Gipfel des Monte Clenio freilassend) eingedrungen war.

Von S. Defendende nördlich gegen S. Rocco liegen grosse erratische Blöcke (Kalk, Porphyr, Gneiss, roter Sandstein) von fünf und mehr Meter Kubikinhalt.

Auch das Thal von Fonteno ist mit Glacialschutt ausgefüllt, der bis gegen Colletto (1200 m) das Terrain bedeckt. Bei Fonteno selbst grössere Massen von erratischen Blöcken, ferner bei der Santella, wo sich auch eine Conglomeratbank befindet und oben an der Grenze des Glacials bei Colletto.

Weiter südlich bei Parzanica mächtige Ablagerungen von Moränenschutt, von Bachläufen bis auf ehemalige Thalsohle erodiert, Aufschlüsse bis 30 m hoch, meist kleineres, rundes, gekritztes Material, ungeschichtet, Bindemittel lehmig. Nördlich Parzanica erratische Blöcke, die bis zur Glacialgrenze gegen S. S. Trinità, einer Höhe von ca. 800 m reichen. Bei Parzanica tritt viel Conglomerat zu Tage, besteht aus eckigem und rundem Material, fest verkittet, trägt hier den Stempel lokalen Ursprungs.

Der Moränenlappen von Parzanica hängt mit dem des Val Vigolo zusammen. Das Val Vigolo ist von Tavernola bis Marseno ca. 4 km westlich, bis zum Bronzone und Cle. del Giogo mit Glacial angefüllt,

---

[1]) Baltzer, A.: Glacialgeologisches von der Südseite der Alpen (Pianico-Sellere). Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie, Palaeontologie, Jahrgang 1896, I. Band.

das speziell bei Vigolo selbst von grosser Mächtigkeit ist. Der Bach hat schöne (bis zu 30 m) Aufschlüsse blossgelegt, teils Grundmoränen, teils Oberflächenmaterial, darunter wenig Adamellogranit.

Das Glacial dehnt sich am Bronzone und C. Giogo bis zu einer Höhe von ca. 700 m aus, wo vereinzelte erratische Blöcke die Glacialgrenze bezeichnen, auch hier einzelne Conglomeratbänke.

Von Predore nordwestlich gegen C. del Giogo, bis zu einer Höhe von ca. 650 m Terrain mit Glacial bedeckt. Bei Cimacarta kleine Wallmoräne, kleines, rundes, geschwemmtes Material, Bindemittel lehmig-kalkig. Hauptbestandteil Kalk, einzelne Conglomeratbänke.

Zwischen Predore und Tevernola, ungefähr in der Mitte, 8 m oberhalb der Strasse, die sich am See hinzieht, ist der vielbesprochene und umstrittene[1]) «Pozzo glaciale», ein schöner Trockentopf, der erst in neuester Zeit von Professor Sina in Tavernola ausgeräumt und dem Besucher zugänglich gemacht wurde. Der Topf hat eine Tiefe von ca. 14 m und eine Breite von ca. 5 m; es lassen sich 6 schöne, schraubenförmige Windungen erkennen. Der glaciale Ursprung des Topfes steht ausser allem Zweifel.

Ein weiterer Moränenlappen bedeckt das Val Adrara und Foresto. Von der Forcella bei Sarnico im Ost, wo die Höhengrenze des Glacials bis auf ca. 600 m festgestellt wurde, bis Capra und Adrara S. Rocco im Norden und bis nördlich Villongo, im Westen ist alles mit Glacial überzogen. Bei Villongo, rechts und links der Strasse, gegen Foresto, schöne Wallmoränen, ca. 30 m hoch, 200 m lang, sandige Grundmoräne, kleines Material mit Blockeinlagen, etwas Schichtung, fällt gegen Süd-West. Material meist Rhaet, roter und grauer Sandstein, Syenit, Amphibolgneiss und einige Adamellogranite, wohl Lokalmoräne.

Erratische Blöcke (Kalke, Gneisse, Sandsteine, Porphyre, Majolica) und einige Adamellogranite liegen in grösserer Anzahl bei Villongo, Castione, nördlich und östlich Paratico, bei Montecchio, ebenso in der Forcella bei Sarnico.

Drums mit anstehendem Kern bilden die Anhöhen von C. Masnadura, C. Portona, C. Zuane, Castello di Paratico, meist mit sandiger Grundmoräne überzogen.

Auf Anhöhe S. Onofrio, südöstlich von Paratico, in Höhe von ca. 300 m, Ritzen und Schrammen fausttief auf anstehendem Fels,

[1]) Salmojraghi. «Limnologia del Sebino» führt die Meinung einzelner an.

die sich auch kreuzen, lassen sich 2—300 m weit verfolgen in der Richtung des Gletschers Nord-Süd.

b) Moränen im Camonicathal.

1. Moränenlappen mit Bergmoränen.

Nach Sacco[1]) befinden sich im Camonicathal keine Moränen; was Endmoränen anbelangt, verhält es sich so, dagegen sind Seitenmoränen vorhanden.

Nördlich Pisogne bei Dosello kleine Wallmoräne von Nord nach Süd, bei Sonvico, ein kleinerer, bei Fraine ein grösserer Glaciallappen. Der Wildbach von Artogne mit grossen erratischen Blöcken angefüllt, die auch den Dosso dei Ghelfi und Corno Torrosella bis zu der Höhe von 1400 m bedecken. Bei Fucine, südöstlich Darfo, ebenfalls kleiner Moränenlappen mit Fortsetzung nach Osten durch erratische Blöcke.

Rechts des Oglio, nördlich Sovere, glaciale Ablagerung ca. 1 km lang und bis zu einer Höhe von 300 m sich ausdehnend. Weiter nördlich bei Volpino weitere Ablagerung, die sich über Castel franco bis S. Vigilio, oberhalb Rogno erstreckt. Nördlich davon bei Bessino und Lago Moro zwei kleine Nord-Süd verlaufende Wallmoränen. Von Angone bis Piazzola, 50 m über der Strasse, ca. 2 km lang, fest verkittetes Glacial.

Links des Oglio, von Darfo nordwärts, bis über Breno hinaus, lagert sich eine Seitenmoräne in einer Höhe von ca. 500 m, die von Wildbächen häufig unterbrochen, bei Darfo kaum erkenntlich, weiter oben als glacialer Ueberzug auftritt und von Esine über Bienno-Breno-Breone zu einem ca. 50 m mächtigen Wall anwächst. Viel eckiges Gestein mit lehmigem Bindemittel. Ebenso liegt zwischen Breno und Prestine eine schöne Wallmoräne von derselben Struktur.

Der Bosso Cerete, der zwischen den beiden Wällen liegt, ist mit Glacialschutt überzogen, seinen Gipfel krönt ein ca. 6 m^3 fassender Adamellogranitblock.

Von Losine, etwas aufwärts, rechts und links des Oglio, viel Grundmoränenmaterial, das oft von Bergschutt überschüttet ist. In der Nähe von Edolo, bei den Boscavegno-Sennhütten, 300 m über dem Oglio, alles mit Grundmoräne überzogen, feinster, lehmiger Sand, angefüllt von Geschieben aller Grössen.

---

[1]) Sacco: Apparato Morenico del Lago d'Iseo, p. 29. In Val Camonica non travandosi notevoli resti morenici.

2. Drumlandschaften.

Das Camonicathal, rechte wie linke Seite, ist häufig von Rundhöckern bedeckt, die oft in Masse vorkommend, eine sogenannte Rundhöckerlandschaft bilden; auch sind die Seitenwände, die den Gletscher einschliessen, häufig glatt poliert.

Auf der linken Oglioseite sind Rundhöcker oberhalb Pisogne, Rovina, Minolfa, Artogne, Darfo, Esine bis Breno vielfach mit Vegetation überzogen. Bei Bienno südlich Breno sieht man eine Perlenschnur von 10 Drums, jedes ca. 100 m über der Thalsohle, in einem Abstand von 100—150 m voneinander, mit sandiger Grundmoräne bedeckt und bewachsen.

Auf der rechten Seite des Oglio, bei Rogno faustiefe Gletscherschrammen im anstehenden Gestein, 1 m oberhalb der Strasse. Bei Capo die Lago typische Rundhöckerlandschaft mit kleinem See (Lago Moro), in einem Felsbecken. Gletscherschrammen zeigen nach Süd-West. Von Erbano bis Breno, überall diese typischen Rundungen. Die Felswände sind bis zu einer Höhe von ca. 1500 m glatt poliert. Ferner sind die Erhebungen inmitten des Camonicathales, z. B. nördlich Darfo, schöne Rundhöcker, auf der Seeseite steiler als auf der Stosseite und dort oft noch kantig, was gegen Gletschererosion spricht.

Weiter oben im Camonicathal, bei Capo di Ponte, wo der Gletscher sich durch die Thalenge durcharbeiten musste, ist alles Anstehende auf beiden Thalseiten mit Rundungen, Gletscherschliffen und oft fusstiefen Schrammen bedeckt. Ebenso finden sich bei Edolo noch viele Rundhöcker und Drums, speziell längs des Apricapasses, der vom Camonicathal ins Veltlin hinüberführt, woraus schon Stoppani und Amighetti schlossen, dass der Oglioglетscher hier mit dem Addagletscher zusammenhing.

3. Obere Grenze des Glacials.

Die obere Blockgrenze entspricht sich auf beiden Seiten ziemlich genau (vergl. Profile). Die oberste, die der älteren Eiszeit entsprechende Grenze konnte nicht scharf fixiert und von der unteren getrennt werden, sie zieht sich ca. 80—100 m über der angegebenen Linie hin. Nachdem der Gletscher das Niveau. 1200 m, erreicht, fällt er etwas rascher als bis zu diesem Punkt, leider ist es auf den Profilen des kleinen Massstabes wegen nicht zu erkennen.

Der Gletscher erreichte bei Breno eine Höhe von ca. 1700 m über Meer und 1400 m über der Thalsohle, hatte also eine Dicke von 1400 m, wie am Monte Mesullo, auf der linken und am Monte Mignore, auf der rechten Thalseite konstatiert wurde.

Die obersten Erratica, ein Adamellogranitblock (8 m^3) am Monte Mesullo und ein weisser Marmorblock (1 m^3) am Monte Mignone liegen auf einer Höhe von 1700 m.

Weiter werden Glacialgrenzen von Breno südlich konstatiert auf der linken Thalseite:

Am Monte Torrosella oberhalb Artogne mit letztem Block Adamellogranit (4 m^3) bei 1400 m.

Am Monte Pesona oberhalb Pisogne mit rotem Sandstein, Gneiss- und Adamellogranitblöcken 1250 m hoch.

An der Punta del Orto, oberhalb Iseo, mit erratischen Geschieben, Sandstein, Porphyr, Gneiss, Kalk, in einer Höhe von 650 m.

Auf der rechten Thalseite:

Am Monte Pora, oberhalb des Lago Moro, mit Sericitgneissblock (5 m^3) auf 1400 m.

Am Monte Valtero, oberhalb Lovere, roter Sandstein- und Porphyrblock (je 4 m^3).

Am Collettopass, oberhalb Fonteno, Gneissblock 1 m^3 auf 1200 m.

An S. S. Trinità oberhalb Parzanica auf 300 m: schwarzer Kalk und Gneiss.

Am Bronzone auf 750 m schwarzer Kalk und roter Sandstein.

An der Forzella bei Sarnico auf 650 m Gneiss und roter Sandstein.

Am Col Croce (Cavallina-Forestothal) auf 650 m Majolica und Sericitgneiss.

Wenn der Gletscher vom Monte Mignone, von 1700 m, bis zur Ponta del Orto auf 650 m fällt, die Thalsohle unter Ponta del Orto um 100 m tiefer ist, als unter Monte Mignone und der Weg, den der Gletscher zwischen diesen beiden Punkten durchlief, ca. 40 km beträgt, so fiel der Gletscher ca. 40 m pro km.

4. Material und Verteilung des Gesteins.

Das glaciale Material setzt sich zusammen:

a) aus krystallinen Gesteinen:

Adamellogranit, anstehend am Monte Adamello, bildet einen wichtigen und charakteristischen Bestandteil der Moränen, wird gegen

das obere Camonicathal immer häufiger und kommt, entsprechend seinem Ursprung vom Adamellomassiv her, hauptsächlich auf der linken Seite vor, rechts ganz vereinzelt. (Rogno, Fonteno, Palazzolo.)

Gneiss, Sericitgneiss, sehr häufig.

Glimmerquarzit, mit Gneiss zusammen vorkommend, ziemlich häufig, mehr links.

Quarzporphyre sind häufige und charakteristische Moränenbestandteile, kommen auf beiden Seiten vor, aber links wohl vorwaltend, entsprechend den anstehenden Vorkommnissen (Minolfa Gratacasola).

Diorit, sehr vereinzelt, auf beiden Seiten.

Amphibolit, sehr vereinzelt, auf beiden Seiten.

Felsit, grünlich, dicht, sehr vereinzelt, mehr auf der rechten Seite.

b) Sedimentgesteine:

Liaskalk, Hauptbestandteil aller Moränen im Seegebiet, sehr häufig auch in erratischen Blöcken auf beiden Seiten.

Sandsteine und Conglomerate der Trias und des Perm, sehr häufig auf beiden Seiten von Darfo abwärts.

Kieselschiefer (Dogger u. Malm), rot, dunkelgrau und grünlich, auf beiden Seiten.

Quarzit, weiss, oft bräunlich oxydiert, vereinzelt, auf beiden Seiten.

Schwarze Kalke und dolomitische Kalke (Muschelkalk), häufig auf beiden Seiten.

Rauhwacke, ziemlich häufig, stark verwittert, mehr links.

Majolica, vereinzelt, mehr rechts.

Marmor, weiss, feinkörnig (Krystallin), vereinzelt, mehr links, entsprechend seinem Vorkommen am Adamellomassiv.

Dunkle Kalke des Rhaet, sehr häufig, mehr rechts. Rhaetschiefer waren wohl weniger transportfähig?

Eisenspath anstehend, z. B. in Val Trobiolo, sehr vereinzelt, links z. B. unterhalb Zoncone.

IV. Abzweigung des Hauptgletschers.

Pianico und Cavallinathal.

Zwischen Lovere und Castro zweigte sich vom Hauptgletscher ein Arm ab, der zuerst direkt nach Westen sich wendend, von Pianico

nach Süd-Westen umbog und das Val Cavallina ausfüllte. Dieser Arm setzte das Glacial von Pianico-Sellere und Bossico ab und hing durch das das Borlezzathal herabkommende Seitengletscherchen mit dem Gletscher des Val Gandino zusammen.

Von Pianico südwestlich bis zum Lago d'Endine bezeichnen Rundhöcker, Drums, erratische Blöcke und ein kleiner Moränensee, der Lago Gajano, den Weg, den der Gletscher genommen. Hier stösst mit diesem Arm auch noch ein anderer zusammen, der etwas südlich Castro um den Monte Clenio herumging und über den Bergrücken von Riva di Solto ins Cavallinathal hinabfloss. Dieser setzte auch bei seinem Rückzug das Amphitheater von Sconico-Solto-Esmate ab.

Von Endine, südwestlich auf dem Westufer des Lago d'Endine befinden sich zwei Moränenlappen, die das Gelände bis zu einer Höhe von ca. 600 m bedecken, deren südlicher, der von Spinone, sich mit dem des Süd-Ost-Ufers vereinigt und bis hinunter nach Grone reicht.

Auf dem Glacial Endine-Grone sind schöne Wallmoränen, so auf dem Lappen bei Endine, etwas südlich S. Fermo, eine Seitenmoräne in Höhe von ca. 500 m, hübsche Wallmoräne 30 m hoch und 400 m lang, kleineres, eckiges Material, hauptsächlich helle und dunkle Kalke mit etwas rotem Sandstein, Bindemittel sandig. Die Seitenmoränenwälle von Spinone und Molini di Colognola sind von derselben Struktur.

Besonders hervorzuheben sind die zwei schönen, hufeisenförmigen Endmoränen, die auch schon öfter[1]) beschrieben wurden, die von Spinone und von Grone: ca. 60 m hoch und 700 m lang, mit viel sandigem Grundmoränenmaterial bis m^3 Grösse.

Der See hatte seiner Zeit sein südliches Ende bei Grone, abgedämmt durch die dortige Endmoräne, der Cherio frass sich durch und brachte den See zum Auslaufen, später schob der Gletscher seine Zunge nur noch bis gegen Spinone vor und dämmte durch die dortige Endmoräne den See wieder auf. Auch hing wohl der Lago d'Endine mit dem weiter nördlich gelegenen Lago Gajano zusammen.

V. Alte Flussläufe.

Wie schon oben bemerkt, sind beim Oglioglетscher Endmoränen und Gletscherabflüsse in der Hauptsache getrennt; während der

[1]) Sacco, Apparato Morenico del Lago d'Iseo, p. 19. . . . a Grone, dove depositò una bellissima ed affato tipica morena terminate. p. 20. . . . depositando allora quel bellissimo arco morenico terminale su cui siede la Cna Castello e che chiude a valle l'attuale Lago d'Endine o Lago de Spinone.

Gletscher auf der Ostseite seine Endmoränen absetzte, sandte er seine Schmelzwasser auf der Westseite hinaus in die Po-Ebene. Die Hauptabflussrinne entspricht wohl dem heutigen Ogliobett, etwas weiter östlich verläuft ebenfalls eine Rinne, die durch die Anhöhe von Paratico und Castell in drei Arme geteilt, kurz vor ihrer Mündung in das heutige Ogliobett sich wieder vereinigte und, nachdem der Oglio tiefer erodiert hatte, trocken gelegt wurde.

Auf der Ostseite im Amphitheater der Endmoränen ist ebenfalls ein alter Glacialabfluss, der sogenannte Fosso Longherone. Von Nigoline-Borgonato bis Cazzago sich erstreckend, verliert er sich gegen Süden in der Ebene; der kleine Bach, der ihn jetzt durchfliesst, mündet in einen Stausee. Die Gletscherwässer, die bedeutend gewesen sein müssen, bildeten wohl eine 300 m breite, bis auf die Sohle der Moränen einschneidende Rinne, indem sie, schon während die Moräne sich absetzte, das Material wegräumten und nicht, nachdem die Moräne schon bestand, erst diese durchbrachen.

Von Bornato zieht sich bis gegen Villa eine fest verkittete Conglomeratbank hin, Uferbildung der ehemaligen Glacialrinne.

Von Sergnana, Riva und Nigoline über Adro ziehen sich ebenfalls kleinere ehemalige glaciale Wasserläufe gegen Süden (vide Karte).

VI. Interglaciale Bildungen.

1. Pianico.

Das schönste Interglacial am Iseosee und wohl überhaupt auf der Südseite der Alpen ist das von Pianico-Sellere, das schon von vielen[1]) besprochen, speziell aber von A. Baltzer[2]), der durch Rhododendron ponticum ein milderes Klima nachwies, beschrieben wurde: Zwischen zwei typischen Grundmoränen Ablagerung des durch die Versperrung der Enge von Castro wahrscheinlich durch den Gletscher und seine Ablagerungen gebildeten Stausees, bestehend in weissen, feinen Mergeln mit den schon beschriebenen Einlagen aus der Flora mit pontischem Charakter und Fauna des Diluviums.

[1]) Stoppani, A.: L'Era neozoica in Italia.
Issel, A.: Compendio di Geologia II. Band.
Amighetti: Nuove ricerche sui terreni glaciali dei dintorni del Lago d'Iseo.
Sacco, A.: L'Apparato Morenico del Lago d'Iseo.

[2]) Baltzer, A.: Glacialgeologisches auf der Südseite der Alpen und Nachtrag. (vide oben).

So schön wie bei Pianico sind die Ablagerungen im Adrara-, Foresto- und Cavallinathal nicht als interglaciale nachzuweisen. Auch diese, lakustren Ursprungs, sind Produkte der durch Moränendämme in Stauseen verwandelten keinen Thäler.

2. Adrara.

Im Adrarathale, etwas westlich Sarnico, an der Mündung des Nembrathals bei Fornaci befindet sich ein Lager von Bänderthonen; gelbe und braune Schichten wechseln mit graublauen. Hier wurden Reste von Bos und Cervus gefunden[1]), sowie Reste von Mollusken, die nicht näher zu bestimmen sind, ebenso Einlagen von Torfschichten.

Etwas weiter südlich an der Ausmündung des Adrarathals bei Villa Rochetta liegen ebenfalls diese Bänderthone, in die die Guerna erodiert; ca. 100 m mächtiger Aufschluss von derselben Struktur wie bei Fornaci. Die Thone lassen sich abblättern und haben oft Einlagen von feinem Quarzsand. Darüber liegt typische, lehmige Grundmoräne, oft fest verkittet. Auch hier dieselben Reste von Süsswassermollusken, in perlmutterartigen Schalenresten und dieselben Torfeinlagen. Auch hier Reste von Bos.[2])

3. Foresto.

Westlich davon bei Vidongo am Ausgang des Forestothales legt die Odria fünf schöne Aufschlüsse in die dortigen Bänderthone frei: 20—30 m Höhe, von derselben Struktur wie die von Val Adrara, mit Torfeinlagen, unbestimmten Resten von Süsswassermollusken und andern Resten.[3])

4. Cavallinathal.

Im Cavallinathal, nördlich Grone, im ehemaligen erweiterten Seebecken des Lago d'Endine, ebenfalls ein Lager von Bänderthonen, von derselben Struktur, aber ohne Einlagen, sandige Grundmoräne darüber.

---

[1]) Sacco: Apparato morenico del Lago d'Iseo. p. 11. Vi si vinvennero resti di Bos e di Cervus.

[2]) Sacco: Apparato morenico del Lago d' Iseo. p. 12. . . . verteboe ed arti di Bos che furono attribuiti al B. primigenius, ma sulla cui determinazione specifica credo debbensi ancora mantenere dubbi.

[3]) Amighetti: Nuove ricerche. p. 70. . . . nelle marne di Val Foresto is trovano denti di Squali ed altre ossa di Mammiferi!

VII. Geschichte des Iseogletschers.

Wie alle unsere Gletscher entstand auch der Ogliogletscher Diluvialzeit infolge jener grösseren Klimaschwankungen, die wir Eisze nennen. In dem Masse, als die Firnmassen in den Nährgebieten lombardischen Alpen sich infolge vermehrter Niederschläge bei e geringerer Temperatur wie heute anhäuften, bewegte sich der Gletsc mit seinen Zuflüssen durch das Camonicathal hinaus in die Ebene gelangte zuletzt bis in die Gegend von Palazzolo und Rovato, wo ihm zwischen beiden Orten gelegene Monte Orfano-Kette Halt gebot.

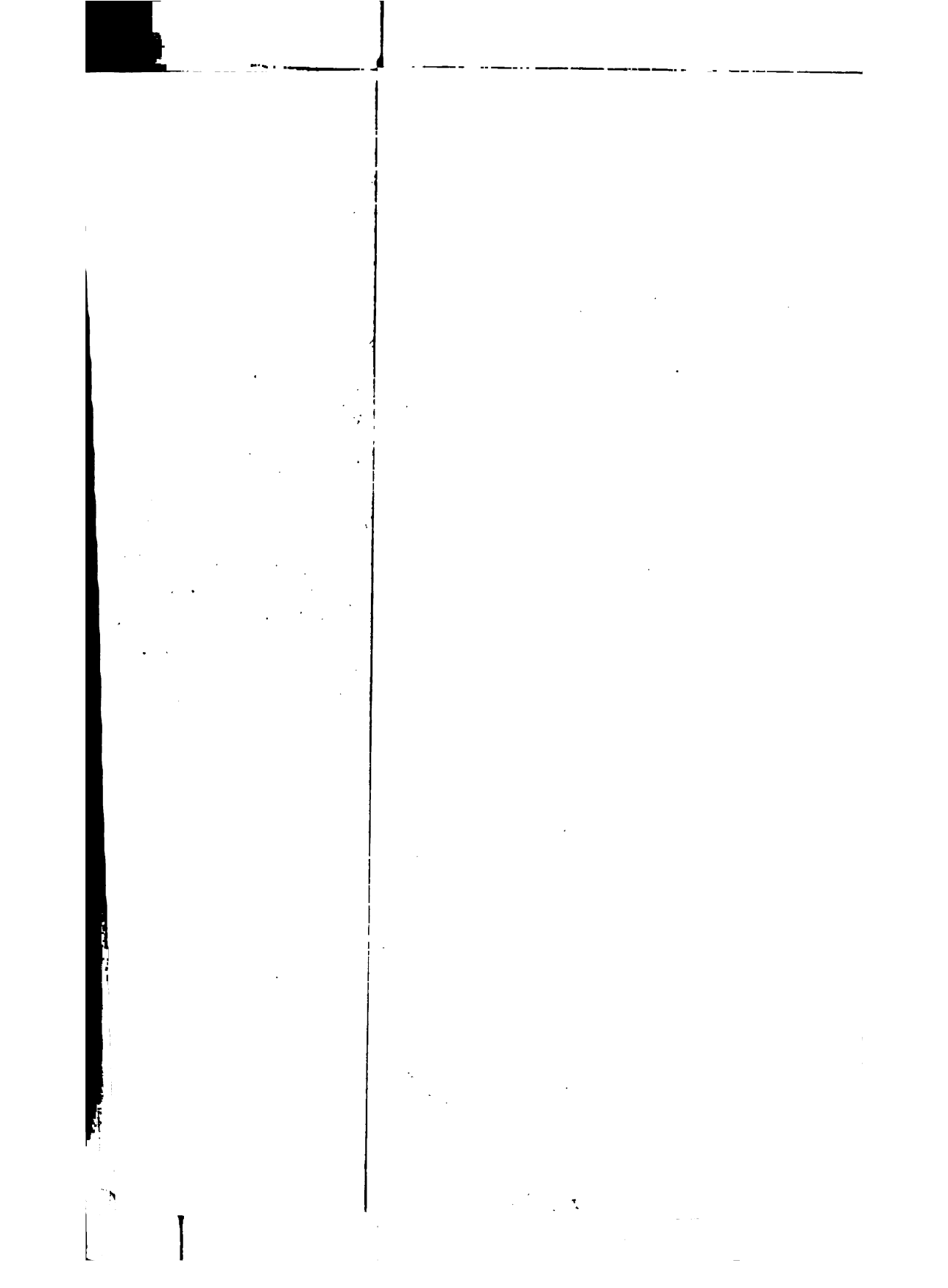
Hauptsächlich vom Adamellomassiv ausgehend füllte er das ga Camonicathal aus, hing bei Edolo durch den Apricapass mit dem Ad gletscher zusammen, empfing alle im Areal des Gletschers schon angeführ Seitengletscher und setzte draussen in der lombardischen Ebene se Moränen ab.

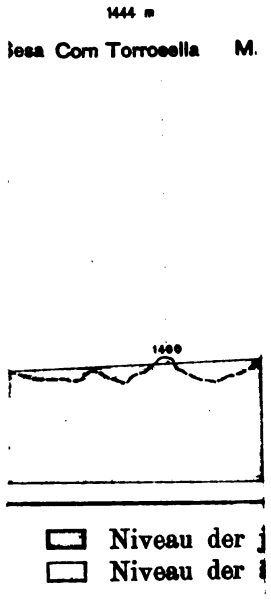
Beim Iseogletscher sind zwei Eiszeiten zu unterscheiden: die Hö von Montecchio als oberste Terrasse (Deckenschotter?) gehört vielleicht d ältesten Vergletscherung an (?). Der Schutt der ältesten Eiszeit wurde v dem der folgenden Eiszeit grösstenteils zugedeckt und nur der angeführ Punkt ragt noch aus dem Schutt der beiden jüngeren Eiszeiten herv

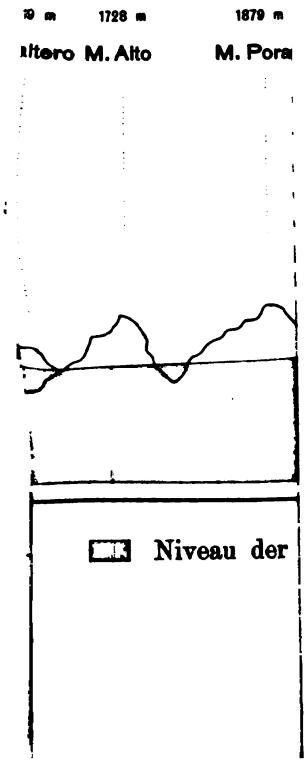
Ein Interglacial zwischen der dritten und zweiten Eiszeit w nicht nachzuweisen.

Hierauf folgte die zweite (grosse) Eiszeit:

Ein Arm des Gletschers setzte bei Pianico die untere Grundmoräne ab, versperrte durch seine Ablagerungen die Enge von Castro, das Cavallinathal durch die Wallmoräne von Grone, ebenso das Adrara- und Forestothal; die gesperrten Thäler wurden Stauseen, in deren Schlamm sich die schon beschriebenen Einlagen finden; später frassen sich die Bäche durch und brachten die Seen zum Auslaufen. Der zweiten Eiszeit gehören auch die oberste von den beiden Seitenmoränen oberhalb Sale-Marasino, sowie die Seitenmoräne Invino S. Teresa oberhalb Iseo und die beiden im Amphitheater schon beschriebenen äussersten Moränenringe an. Bei seinem Rückzug verschwemmten die Gletscherwasser die abgesetzten Endmoränen und blieben auf der Ostseite nur noch die beiden äussersten Ringe. Auf der Westseite wurden sie vollständig verschwemmt und bildeten die am Oglio sich hinunterziehende obere Akkumulationsterrasse (vide Karte). Als Verschwemmungsprodukte der zweiten Eiszeit wären wohl noch zu nennen das Conglomerat von Cremignane, Sergnana und Pianico-Sellere.




1444 m
Sesa Corn Torrosella M.
1460
Niveau der
Niveau der


1728 m
1879 m
altero M. Alto
M. Pora
Niveau der

Nun ereigneten sich eine oder mehrere langanhaltende Trockenperioden, bzw. Klimaschwankungen, infolge deren der Gletscher sich bis in seine Stammthäler zurückzog. Flora und Fauna drangen in das bis jetzt vereist gewesene Gebiet ein, wo sich mit der Zeit ein milderes Klima entwickelt haben musste, denn wir finden in den Ablagerungen der Stauseen neben Resten von Bos und Cervus auch solche von Elefas meridionalis und Rhinoceros Merckii und neben Eichen- und Ahornblättern auch Rhododendron ponticum L.

Hierauf erfolgte wieder eine grössere Klimaschwankung, und der Gletscher drang wieder bis in die Ebene hinaus. Er legte all das viele Moränenmaterial ab, das rechts und links des Oglio und Iseosees als Moränenlappen bezeichnet ist (vide Karte), und drang nicht weiter vor als bis in die Gegend der hufeisenförmigen Endmoräne Adro-Bornato-Cazzago, die er absetzte. Der Mächtigkeit dieser Moräne nach zu schliessen, blieb der Gletscher lange Zeit auf diesem Niveau; dann zog er sich in vier Abstufungen bis zum Iseosee zurück, wo er noch eine kleine Endmoräne absetzte, um sich dann sehr rasch, wie dies bei den andern Gletschern auch der Fall war, in seine Stammthäler zurückzuziehen, im Camonicathal keine Endmoräne hinterlassend. Der Arm, der durch das Cavallinathal hinabging, setzte das dortige Glacial ab und dämmte den See bei Spinone durch die dortige Endmoräne ab. Dieser Arm zog sich früher zurück als der Hauptgletscher von der Ebene südlich, verweilte aber dafür längere Zeit auf dem Rücken von Riva di Solto-Esmate und setzte das dortige Moränen-Amphitheater ab. Diesmal verschwemmten die Schmelzwasser des sich zurückziehenden Gletschers, vorwiegend die Moränen auf der Westseite, die untere Akkumulationsterrasse, am Oglio hinunter bildend (vide Karte).[1])

Das Amphitheater am Iseosee ist so schön wie das des Gardasees, aber auf kleinerem Raum zusammengedrängt.

[1]) Die bekannte Bedeutung der Gletscher für die Landwirtschaft, indem sie einerseits als mechanische Zerkleinerungsapparate wirken, anderseits natürlichen Mineraldünger (Phosphorsäure, Alkalien) zuführen, ergiebt sich hier in ganz ungewöhnlichem Grade aus der Fruchtbarkeit der Moränenlandschaft.

Die ehemalige Existenz des Oglio-gletschers ist für die heutigen Bewohner des Iseosees von direkt materiellem Wert, indem der Gletscher durch Anhäufung seiner lehmigen Grundmoräne den Boden undurchlässig machte und so die mächtigen Torflager, die grössten in Oberitalien, am Iseosee zur Entstehung brachte. Wie anderwärts.

Eine chemische Untersuchung*) des Ferretto ergab folgende Resultate:

Kieselsäureanhydrid	75,8 %
Eisenoxyd	3,7 %
Aluminiumoxyd	15,6 %
Calciumoxyd	1,4 %
Hygroskopisches Wasser	0,8 %
Chemisch gebundenes Wasser (Kohlensäure und org. Substanz) . . .	2,6 %
	99,9 %

Magnesia, Kali, Natron, Chlor ist nur in Spuren, Phosphorsäure in etwas grösserer aber immerhin geringer Menge auf Grund der qualitativen Prüfung in dem Boden vorhanden.

---

*) Die Analyse wurde von Herrn Dr. Hanke an der K. Württ. landwirtsch. Versuchsstation Hohenheim ausgeführt, dem ich hiefür bestens danke.

Der Verf.

A. Baltzer.

Nachlese zur Geologie des Aarmassivs.

(Eingereicht Anfang September 1901.)

1. Ueber die mechanische Umwandlung des Kalksteins in Marmor.

Seitdem ich 1873 die Beschaffenheit des Lochseitenkalks auf mechanische Metamorphose zurückführte und 1877[1]) die Berneroberländer Marmore entsprechend erklärte, ist diese Anschauungsweise vielfach acceptirt worden; nur wurde zum Theil die chemische Mitwirkung des Wassers als nothwendig angesehen.

So haben Zaccagna und Lotti dieses Prinzip auf den Marmor von Carrara angewandt; Heim führte Fälle solcher Umwandlung aus der Tödigruppe auf. Die Marmore des Urserenthales (weisse Marmore und Cipolline) wurden dann von mir hierher gerechnet; desgl. von Heim die umgewandelten Lias-Kalke in Bündten. Wohl gehören auch viele Marmore des Rhonethales (z. B. der Cipollin von Seillon), ferner wahrscheinlich der Marmor der Mailänder Dombrüche bei Ornavasso, endlich die vorzüglich feinkörnigen, pentelischen und andere griechische Marmorarten hierher.

Vom Marmor-Eruptiv-Contakt unterscheidet sich der mechanische Contakt durch folgende Punkte:

1. Letzterer steht in anderer räumlicher Beziehung zu den Eruptionsgesteinen, d. h. tritt nicht an der Grenze derselben auf, sondern an denjenigen Stellen, wo seitliche Pressung und Belastung am stärksten waren. Daher ist solche Marmorbildung von ungestörten Gebieten bisher nicht bekannt geworden.

[1]) Ueber die Marmorlager am Nordrand des Finsteraarhornmassivs. Neues Jahrbuch, pag. 673.

2. Contaktmineralien fehlen nicht ganz, aber sie treten sehr zurück. Granat und Vesuvian (Predazzo, Adamello u. s. w.) sah ich in solchen Marmoren nicht, dagegen Glimmer und besonders sind rothe und grüne Thonerdesilikate in Form von Lappen oder Häuten sehr gewöhnlich. Höhere Temperatur hat also nicht mitgewirkt.

3. Während die mir bekannten Marmor-Eruptivcontaktbildungen scharf abgesetzt und begrenzt sind (Predazzo), ist es der mechanische Contakt nicht, hier sind die Grenzen der Umwandlung verflossen. (Grindelwald etc.)

In der Sammlung des geologischen Instituts von Bern habe ich 3 Reihen der Umwandlung aufgestellt, wobei jedes folgende Handstück die fortschreitende Marmorisirung zeigt.

Erste Reihe: Marmorbreccie. Gewöhnlicher, schwarzer Malmkalk wird an einer für die Umbildung empfänglichen Gebirgsstelle in loco zerdrückt (Primärbreccie) und umgewandelt. Die Bruchstücke werden in Folge der Oxydation der schwarzen, kohligen Substanzen, grau oder röthlich und feinkrystallinisch. Zwischen den Bruchstücken erscheint nun eine intensiv braunrothe oder grünliche, oft schimmernde Thonerdesilikatflaser mit den Merkmalen starken Drucks (Frictionsstreifen, Quetschung). Schliesslich resultirt die bekannte intensiv gefärbte Breccie (Typus Grindelwald, Seitenwängen, Schwarzwaldgletscher etc.)

Zweite Reihe: Marmorschiefer. Ausgangspunkt ist der schiefrige Malm, besonders die Birmensdorferschichten; auch schiefriger oberer Malm (Tithon), d. h. Gesteine, die einen primären Thongehalt und hellere Farbe haben. Es treten, successiv stärker gefärbt, gelbliche und röthliche Lagen auf; sodann, was besonders charakteristisch ist, reichlicher, häufiger, jene Lagen tapezierender Sericit. Schliesslich bildet sich ein lebhaft bunt gefärbter Marmorschiefer heraus. (Urbachthal.)

Meine zahlreichen Dünnschliffe zeigen häufige Zwillingsbildung, was nach Link allerdings auch schon beim Druck des Dünnschleifens entstehen kann. Letzterer erklärt jedoch nicht die gebogenen Zwillings-Lamellen. Die Fältelung dieser Marmore gehört zum zierlichsten, was man sehen kann, ist übrigens ja auch macroscopisch bekannt genug. Die beobachteten Risse (geheilte und ungeheilte) genügen keinesfalls, um die Faltung durch blosse Verschiebung zu erklären, was ich schon an der Salzburger Naturforscherversammlung vor ca. 20 Jahren demonstrirt habe.

Dritte Reihe: Weisser und röthlicher Marmor. Derselbe entsteht aus den reineren, compakten Kalken, welche die bei der ersten Art vorkommende Zertrümmerung nicht erlitten haben. Die Farbe wird durch grau oder röthlich allmählig weiss, das Korn verwandelt sich vom dicht- in fein- und mittelkörnig. (Eigerabstürze bei der kleinen Scheidegg, Dossenhorn, obere Kalkkeile des Laubstock und Pfaffenkopf.)

Es versteht sich von selbst, dass neben metamorphem Marmor in unserem Gebiet auch ausserordentlich viel gewöhnlicher, grauer und weisser Marmor in Adern, Nestern, Klüften, Lagern vorkommt, der durch Sekretion entstanden ist.

Um diese Vorkommnisse handelt es sich hier nicht, sondern um die Marmorbildung durch molekulare Umgruppirung auf mechanischem Wege, wie ich sie seit 28 Jahren vertrete. Auf Grund der in Zirkels Petrographie angegebenen Zahlen mag hierbei die Korngrösse um ca. mindestens das dreissigfache zunehmen, bei unseren weissen Marmoren noch mehr, da sie an Feinheit des Korns dem pentelischen Marmor nicht gleichkommen.

Dass die Grindelwalder Breccie auf nassem Wege durch Umwandlung entstanden sei, erscheint mir wenig wahrscheinlich. Gebildet wurde sie doch unter einer compakten Gesteinsdecke, als das Gletscherthal noch nicht bestand. Wie soll ein solcher massiver Kalkklotz in loco sich durch Wasserlösung durch und durch krystallinisch umwandeln? Dazu genügt die blosse Bergfeuchtigkeit nicht, zudem ist die Ubiquität des Wassers nur ein Glaubenssatz; es gibt viele durchaus bergtrockene Stellen. Bei solcher Entstehungsweise müsste doch auch reichlich krystallinischer Kalkspath in Drusen auftreten, ferner grobkörnige und blättrige Partien; hier sieht man nur Feinkörnigkeit, und es sind die einzelnen Bruchstücke nicht durch Kalkspath verbunden.

Die molekulare Umgruppirung durch Pression ohne Lösung hat Analogien in der Paramorphose (Schwefel), in den Druck-Zwillingsbildungen des Kalkspaths, der Feldspathe u. s. w.

Zur Erklärung der bunten, häutigen Thonerdesilikate werden Viele an Infiltration eisenhaltiger Lösungen denken; vielleicht sogar an Thermalwirkungen von unten, die aber hier ausgeschlossen sind. Die Zufuhr von Eisen aus dem braunrothen Eisenoolith des oberen Doggers ist wegen dessen Entfernung wenig wahrscheinlich. Ich glaube

aber auch hier, dass dass Substrat dieser Substanzen[1]) als Thon schon vorher im Kalk vorhanden war. Bei den Marmorschiefern ist dies einleuchtend, da sie ja aus thonigen Kalken entstehen. Ueber den Thon- und Eisengehalt von Kalken des oberen Malm und anderen Kalken machte ich früher Angaben.[2]) Aber auch die reinen Kalke können solche Substanzen enthalten, wie bekanntlich die aus Majolica, Liaskalken und Aptychenschiefern entstehende Terra rossa beweist. Auch sind die ausgewalzten Häute der Thonsilikate in viel geringerer Menge vorhanden, als es den Anschein hat. Sie gingen vielleicht erst durch chemischen Umsatz aus dem mechanisch beigemengten Thon hervor.

In neuerer Zeit ist in Grindelwald die schon im 18. Jahrhundert zu Gruners Zeiten geübte Marmorgewinnung, zur Herstellung von Grabsteinen, Tisch- und Kaminplatten, Consolen etc., im kleinen Maasstab wieder aufgenommen worden.

Der Marmor wird am unteren Gletscher auf dem sogenannten unteren Schopf oberirdisch abgebaut; auch wurde ein ca. 30 m tiefer horizontaler Stollen getrieben. Dabei kann man nun besser wie früher die mannigfaltigen Uebergänge von Kalkstein in Marmorbreccie beobachten.[3])

Das gewonnene Material hat bei der inneren Ausstattung des Bundeshaus-Mittelbaues in Bern Verwendung gefunden.

2. Ueber die aplitische randliche Facies des Protogins an der Mieselen (Lauteraargletscher).

Wie früher von mir[4]) beschrieben, nimmt der Protogin gegen die angrenzenden Sericitgneisse zu makroscopisch eine feinkörnige Structur und hellere Farbe an. Die Feinkörnigkeit ist über grosse Strecken gleichförmig verbreitet; die hellere Farbe rührt vom Zurücktreten des nur noch punktförmig erscheinenden Biotits her.

Die mikroscopische Untersuchung ergab ein allotriomorphes Gemeng von vorwaltend Orthoklas und Quarz, wenig Microclin, sehr wenig z. Th. sericitisirtem Biotit, wenig Plagioklas.

[1]) Ich nenne sie vorläufig, bis ich genügendes Material zu einer Analyse habe, Thonerdesilikate.

[2]) Glärnisch etc. p. 50.

[3]) Wer eine solche Suite beziehen will, kann dies durch Lehrer Beck in Grindelwald bewerkstelligen.

[4]) Liefg. XXIV 4. Th. d. Beitr. z. geol. Karte d. Schweiz, pag. 57.

Quarz und Feldspathindividuen z. Th. ineinander verzahnt. Kataklase der Gemengtheile beträchtlich.

Somit ist das Gestein vom Aarmassiv-Protogin mit Ausnahme der Feinkörnigkeit nicht wesentlich verschieden, wie der mikroskopische Vergleich mit Granit von gegenüberliegendem «Abschwung» ergibt, der die Kataklase mindestens ebenso stark zeigt. Es ist demnach als eine primär schon feinkörnig ausgebildete, saure Granitfacies, über die dann später die Dynamometamorphose hinwegging, zu betrachten. Nun ist allerdings dieser Aplit weder panidiomorph noch zeigt er Muscovit in Blättchen[1]), allein es rührt dies wohl nur her von seiner Abstammung vom Protoginmagma und den ähnlichen Bedingungen der Enstehung und Umwandlung. Man kann für ihn die Bezeichnung Protoginaplit gebrauchen.

Wo er an den sogenannten Sericitgneiss stösst, tritt die eigenthümliche, schon von Studer und Escher beschriebene, als Siebengang bezeichnete Gangbildung auf, so benannt, weil sie, hoch oben an der Wand vom dunklen Gneiss sich lebhaft abhebend, eine 65 m hohe und 14 m breite Ziffer Sieben darstellt.

Das Gestein derselben ist wieder mehr protoginähnlich d. h. grobkörniger als der Aplit; Rutschflächen, Zerklüftung, deuten auf starke Pressung. Mikroskopisch hat es im Ganzen mit dem Protogin grosse Aehnlichkeit, nur ist Microclin reichlicher vorhanden. Der Orthoklas ist ferner oft stark verbogen und zeigt Drucklamellen, Kataklase, wie bei Aplit. Wiewohl hübsche Mörtelstructur auftritt, ist das Gestein doch noch weit von einer Breccie entfernt, auch zeigt sich dieselbe Mörtelstructur beim Abschwunggranit. Der Biotit ist deutlicher in Lappen und Strähnen entwickelt.

Diesen Gang habe ich früher[2]) als eine durch unter hohem Druck erzeugte mechanische Ausstülpung, also als pseudoeruptiv bezeichnet; ich bin indessen schon seit längerer Zeit von diesem Irrthum zurückgekommen, was auch für die ähnlichen Gänge[3]) am Lauteraargrat gilt. Die echt eruptive Natur ergibt sich, abgesehen von den intrusiven Formen, aus dem mikroskopischen, nicht dem einer Breccie entsprechenden Bild. Davon wird indessen der Typus der mechanischen,

---

[1]) Rosenbusch: Mass'ge-Gesteine.

[2]) loc. cit. pag. 68 und Neues Jahrbuch 1885, II. p. 25.

[3]) Lfg. XXIV der Beiträge, Tafel V, Fig. 11.

pseudoeruptiven, gangartigen Bildungen, wie er im Aarmassiv auftritt, nicht berührt.

Merkwürdig und unerklärt bleibt am Siebengang das gröbere Korn, nachdem doch aller Aplit ringsherum gleichmässig feinkörnig ist.

Das Nebengestein des Ganges, bisher als Sericitgneiss bezeichnet, zeigt Spuren der eruptiven Einwirkung, die schon Escher anführt. Mikroskopisch besteht es aus Orthoklas, Quarz, Biotit, wenig Epidot. Der vorwiegende Orthoklas ist grossentheils sericitisirt. Die Kataklase ist stärker wie beim Aplit entwickelt.

G. Huber.

Der Astronom Tycho Brahe.

(Vorgetragen in der Sitzung vom 9. November 1901.)

Am 24. Oktober dieses Jahres (1901) waren 300 Jahre verflossen seit dem Tode des dänischen Astronomen Tycho Brahe, des grössten beobachtenden Astronomen seiner und der nächstfolgenden Zeit, welcher als der Begründer der neueren messenden Astronomie und als Reformator der Beobachtungskunst in der Geschichte der Himmelskunde eine hervorragende Stellung einnimmt.

Tycho Brahe wurde als Sohn einer alt adeligen Familie am 14. Dezember 1546 zu Knudstrup in Schonen geboren. Kurz vorher, im Jahre 1543, war das unsterbliche Werk des Nikolaus Copernikus «De revolutionibus orbium cœlestium», — «von den Umwälzungen des himmlischen Weltalls», — welches ein neues Weltsystem lehrte, erschienen und in die Jugendzeit Tychos fällt der Beginn der Kämpfe, welche diese neue Kopernikanische Weltanschauung mit der alten Ptolemäischen zu bestehen hatte. Schon 1400 Jahre lang hatte das Weltsystem des alexandrinischen Astronomen Claudius Ptolemäus (circa 130 n. Chr. Geb.), trotz seiner gänzlichen Unrichtigkeit, unangefochten bestanden. Nach demselben steht die Erde vollkommen ruhend im Mittelpunkt des Weltalls; eine Alles umfassende Sphäre, das sog. primum mobile, führt Fixsterne, Sonne, Mond, Planeten und Kometen in 24 Stunden um die Erde herum. Daneben bestehen noch einzelne Sphären, in denen die besondern Bewegungen von Sonne, Mond und Planeten stattfinden. Sonne nud Mond laufen direkt in excentrischen Kreisen um die Erde, die Planeten dagegen in Epicykloiden. Man dachte sich nämlich den Planeten mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf einem kleinen Kreise, dem sog. Epicykel laufend; der Mittelpunkt desselben bewegte sich hinwiederum mit gleichförmiger Geschwindigkeit und in gleicher Richtung wie der Planet selbst auf der Peripherie eines zweiten Kreises, des Deferenten, dessen Zentrum im Mittelpunkt der Erde lag. Auf diese Weise erhielt die Bahn des Planeten soviele Schleifen und

Tycho Brahe

(1546—1601)

Aus Tychonis Brahe Astronomiae Instauratae Mechanica. Nürnberg 1602.

Durchschlingungen, als die Umlaufszeit desselben Erdjahre umfasste, wie die scheinbare Bahn des Planeten am Himmel sie wirklich aufwies. Allein in diesem Ptolemäischen System liessen sich die Bewegungen der Planeten nur annähernd erklären. Um mit den Erscheinungen am Himmel in Übereinstimmung zu bleiben, mussten im Laufe der Zeit viele Änderungen angebracht werden, wodurch dasselbe immer verwickelter und unbrauchbarer wurde. König Alfons X. von Castilien, ein eifriger Anhänger der Astronomie, der von 1252 bis 1282 regierte, rief daher verzweifelt aus: »Wenn ich von Gott bei der Erschaffung der Welt um Rat gefragt worden wäre, so hätte ich die Sache einfacher eingerichtet,« welcher Ausspruch ihn später die Krone kostete. Alfons war der gelehrteste Fürst seines Jahrhunderts. Im Jahr 1248 liess er über 50 der besten Astronomen nach Toledo kommen, welche an Stelle der unbrauchbar gewordenen Ptolemäischen Planetentafeln neue herstellen mussten. Diese im Jahr 1252 vollendeten Tafeln sind unter dem Namen der Alfonsinischen Tafeln bekannt; sie dienten dazu, den Lauf eines Planeten zu einer beliebigen Zeit zu berechnen.

Kopernikus gieng von der Ansicht aus, dass selbst die verwickeltsten Epicykloiden nicht imstande sein würden, alle Planetenbewegungen zu erklären, und dass allgemeine Naturgesetze notwendig viel einfacher sein müssten. An die Stelle der Erde setzte er in den Mittelpunkt des Weltalls, als ruhend die Sonne, um sie bewegen sich alle Planeten, die Erde inbegriffen, in excentrischen Kreisen, in der Reihenfolge Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter und Saturn und zwar Merkur und Venus innerhalb der Erdbahn; der Mond allein umkreist die Erde.

Die Epicyklen behielt Kopernikus noch teilweise bei. An die Stelle des unerklärlichen primum mobile setzte er die 24stündige Rotation der Erde um ihre Achse, durch welche die tägliche scheinbare Bewegung des Himmels hervorgebracht wird.

Mit diesem neuen System der Weltanschauung liessen sich, trotz der demselben noch anhaftenden Irrtümer, alle Bewegungserscheinungen der damals bekannten Planeten auf die einfachste Weise erklären; aber direkt begründen konnte Kopernikus sein System nicht. Aus diesem Grunde konnte dasselbe nicht sofort Fuss fassen und seine Widersacher, zu denen auch, wie wir später sehen werden, Tycho Brahe gehörte, hatten insofern leichtes Spiel.

Tycho Brahe studierte auf Wunsch seiner Familie, doch gegen seine eigene Neigung, in Kopenhagen und Leipzig Jurisprudenz; heimlich beschäftigte er sich aber daneben mit Astronomie. Als 14jähriger Knabe erblickte er am 31. Aug. 1560 zu Kopenhagen eine Sonnenfinsternis und der Umstand, dass sie genau zur vorher bestimmten Zeit eintrat, erregte so sehr seine Bewunderung, dass er von da an eifrig Astronomie studierte. Heimlich, während sein Hauslehrer schlief, beobachtete er in Leipzig während seiner Studienzeit mit einem unvollkommenen Instrument den Himmel und verglich ihn mit den alfonsinischen und kopernikanischen Planetentafeln, wobei er starke Abweichungen des wirklichen Planetenortes vom berechneten fand. Da er keine Mittel hatte, um sich ein besseres Instrument anzuschaffen, so untersuchte er die Fehler des seinigen und stellte Tabellen über dieselben auf. Es ist dies das erste Beispiel eines Verfahrens, das noch heutzutage alle sorgfältigen Astronomen auch mit ihren viel bessern Instrumenten befolgen.

Tychos Lieblingsbeschäftigung zog ihm von Seite seiner Verwandten nur Verachtung zu, einzig ein Oheim mütterlicherseits unterstützte ihn. Aber Tycho überwand alle Schwierigkeiten, und diese grosse Energie hat er in allen Lebenslagen bewiesen. Nach Beendigung seiner juristischen Studien begab sich Tycho mehrere Jahre auf Reisen, auf denen er auch seine astronomischen Kenntnisse bereicherte. Bei seiner Rückkehr nach Dänemark, im Jahre 1565, nach dem Tode seines Onkels, Georg Brahe, der ihn an Kindesstatt angenommen hatte, kam er durch Erbschaft in den Besitz eines grossen Vermögens, und nun konnte er sich ungestört der Astronomie widmen. Auf einer neuen Studienreise, die ihn weit in Europa herumführte, hielt er sich 1568 vorübergehend in Basel auf, wo er sich in die Universitätsmatrikel eintragen liess und von wo er nach Augsburg, Nürnberg und Rostock ging. Als er 1570 nach Dänemark zurückkehrte, war er schon ein in ganz Europa berühmter Astronome. Nach dem im Jahre 1571 erfolgten Tode seines Vaters wohnte Tycho in seiner Heimat zu Knudstrup, dann auf Herrevads-Kloster, wo er am 15. Nov. 1572 einen neuen Stern im Sternbild der Kassiopeia entdeckte. Dieser plötzlich sehr hell aufleuchtende Stern hatte an jenem Abend einen Zusammenlauf des erstaunten Volkes verursacht, und durch diesen ward Tycho auf den Stern aufmerksam gemacht. Derselbe übertraf in der ersten Zeit seiner Sichtbarkeit alle Sterne, selbst Venus, an Glanz und ward

sogar am Tage gesehen. Allmählich nahm aber seine Helligkeit ab und im Jahre 1574 verschwand er vollständig. Tycho beobachtete den neuen Stern sorgfältig, und aus dem Fehlen einer Parallaxe schloss er, dass derselbe weiter als alle Planeten von der Erde entfernt sei. Den zum grössten Teil lächerlichen Meinungen der damaligen Zeit, z. B. dass dieser Stern eine im Feuer untergehende Welt sei, trat Tycho mit Schärfe entgegen; er zog es vor, seine Beobachtungen desselben genau aufzuzeichnen und die Erklärung des Phänomens der Zukunft zu überlassen.

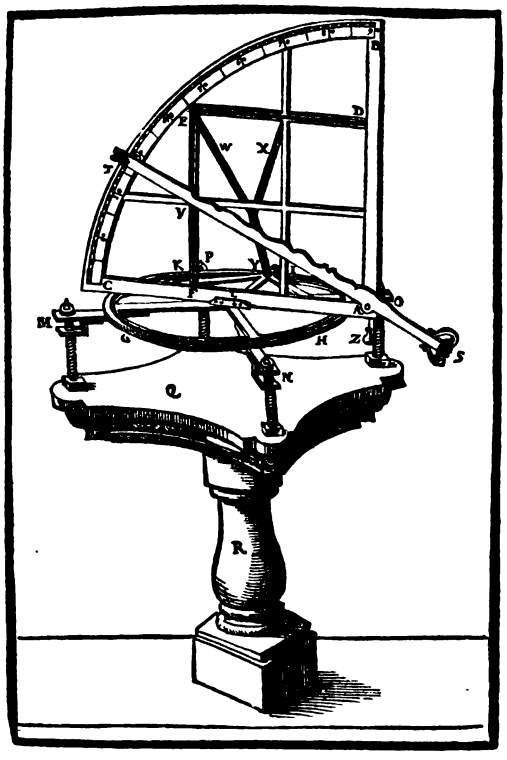


Fig. 2. Beweglicher Quadrant.

In diese Zeit fällt Tychos Heirat mit einem bürgerlichen Mädchen, welche Ehe aber, trotz der vorzüglichen Eigenschaften seiner Frau, von seiner adelsstolzen Familie nie anerkannt wurde. Tycho fasste daher den Entschluss, mit seiner Familie nach Deutschland überzu-

siedeln, welcher Plan aber nicht sogleich ausgeführt wurde, da er sich bestimmen liess, auf Wunsch des dänischen Königs Friedrich II. im Jahre 1574 einige Zeit Vorlesungen über Mathematik und Astronomie in Kopenhagen zu halten. Seine Antrittsvorlesung, die er vorher in lateinischer Sprache halten musste, ist uns erhalten geblieben und befindet sich in dem Buche: «De optimo genere disputandi et colloquendi.» Ex bibliotheca Josephi Langii, Friburgi Brisgoiae 1608.

Aber schon im Jahre 1575 kam er, infolge der fortgesetzten Anfeindungen, auf seinen Entschluss, ins Ausland zu gehen, zurück. Er machte eine Reise nach Deutschland und der Schweiz und gedachte sich im folgenden Jahre in Basel niederzulassen und dort eine Sternwarte zu bauen.

Im Anfang dieser Reise hielt sich Tycho einige Zeit bei dem Landgrafen Wilhelm IV. von Hessen-Cassel auf, einem eifrigen Förderer der Astronomie, der in Cassel eine Sternwarte errichtet hatte und der sich um die Aufstellung besserer Instrumente und Methoden zur Ortsbestimmung der Gestirne grosse Verdienste erwarb. Dieser hochherzige Fürst schrieb an den König Friedrich II. von Dänemark und machte diesen auf die grosse astronomische Befähigung Tychos aufmerksam, so dass Friedrich von da an dessen eifrigster Beschützer wurde. Der König belehnte Tycho im Jahre 1576 mit der damals dänischen, jetzt schwedischen Insel Hven im Sund, setzte ihm einen Jahresgehalt aus und erbaute ihm dort eine prächtige, im Jahre 1580 vollendete Sternwarte, die Uranienburg, ein Wunder ihrer Zeit, und rüstete sie mit den besten astronomischen, mathematischen und chemischen Instrumenten aus. Tycho selbst verwendete aus eigenen Mitteln grosse Summen für deren Ausbau, zugleich wurde eine eigene Papiermühle und Buchdruckerei eingerichtet, um die Resultate der Beobachtung und Rechnung möglichst richtig und schnell der Welt mitzuteilen.

Zur Messung der Höhen und Azimute der Sterne sowie zur genaueren Zeitbestimmung bediente sich Tycho der von ihm selbst erfundenen Quadranten und Sextanten. Es sind dies Viertel- und Sechstelkreise aus Messing, mit einer für die damalige Zeit sehr genauen Kreisteilung. (Fig. 2 u. 3.) Zwei seiner grossen Sextanten sind der Nachwelt erhalten geblieben und befinden sich als kostbare Reliquien im astronomischen Museum der k. k. Sternwarte in Prag.

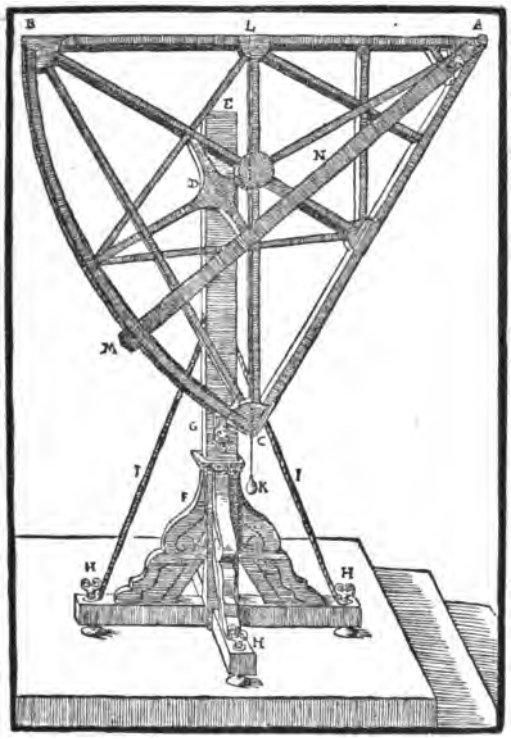


Fig. 3. Astronomischer Sextant.

Tychos bestes und genauestes Instrument war der von ihm selbst eingeführte Mauerquadrant. Dieser bestand aus einem grossen Viertelkreisbogen aus Messing, mit einer genauen Winkelteilung, welcher an einer Mauer, die genau im Meridian der Uraniaburg, also in der Nord-Südrichtung stand, befestigt war. Um den Kreismittelpunkt drehbar und längs der Kreisteilung verschiebbar, war eine Visiervorrichtung angebracht; ein Lot diente zur Feststellung der Vertikallinie. (Fig. 4.)

Eine einfache Beschreibung seiner Instrumente, die durch einen seiner Gehilfen ausgeführt worden war, schickte Tycho Brahe im Jahre 1591 an seinen Gönner, den Astronomen Wilhelm IV., Landgrafen von Hessen, mit welchem er bis zu dessen Tode im Jahre 1596 in regem Briefwechsel stand, sowie auch mit dessen Mathematiker Christoph Rotmann.

Um den Inhalt dieser Briefe zu retten, liess Brahe dieselben im Jahre 1596 in seiner eigenen Druckerei auf eigenem Papier drucken. Alle in deutscher Sprache geschriebenen Briefe wurden von ihm ins Lateinische übersetzt und in beiden Sprachen in den Band aufgenommen. Eingeleitet wird derselbe durch eine Reihe, von verschiedenen Dichtern verfasster, lateinischer Lobgedichte auf Tycho Brahe und gewidmet ist er dem Landgrafen Wilhelm. Dieser Band (auch in der Berner Stadtbibliothek befindlich) erschien unter dem Titel:

Tychonis Brahi Dani

Epistolarum astronomicarum Libri. Uraniburgi anno 1596.

Im Postscriptum eines dieser an den Landgrafen Wilhelm gerichteten Briefe vom 16. Sept. 1591 kündet Tycho diesem die oben erwähnte Beschreibung folgenderweise an:

Poſtſcripta. Nach dem ich vermercke auß Ew. F. G. Brieff / daß der Rothmannus noch nicht in ſo lange Zeit angekommen iſt / gedencke ich wol / daß er auch die Descriptionem meorum Instrumentorum (Beschreibung meiner Instrumente) / welche er hie verzeichnet hat / kaum wird Ew. F. G. zugeſchickt haben. Darumb hab ich nicht wollen unterlaſſen / meinem deutſchen Amanuensi (Gehülfen) zu befehlen / daß er von new (neuem) ein Deſcription davon / ſoviel jm in der eyl müglich were / zuſammen ſchriebe / welche Ew. F. G. hierbei mit vorgemeldten Knaben bekommen wird. Wann ich ſelbſt einmal beſſer weyl habe, bin ich willens alle meine Inſtrumenta Aſtronomica deutlicher und fleißiger / beyde mit jre Fabricâ und uſu (Gebrauch) zu beſchreiben. Ew. F. G. wolle dieſe geringe Conſignation in gnedigem Willen annemen. Datum Uraniburg, den 26. Septembris, Anno 1591.

Ewer. F. G. Dienſtwilliger

Tycho Brahe.

Tychos eigene, in diesem Briefe angekündigte Beschreibung und Gebrauchsanweisung seiner Instrumente erschien erst 1598, nachdem er die Uranienburg schon verlassen hatte, in seinem Prachtwerk: «Astronomiae instauratae mechanica.» (Wandsbeck 1598, Nürnberg 1602.) — Die Mechanik der erneuerten Astronomie. — In demselben befindet sich auch ein Plan, eine Abbildung und ausführliche Beschreibung seiner Sternwarte Uraniaburg.

In dem erwähnten Verzeichnis giebt Tychos Gehülfe unter Nr. XV. folgende Beschreibung des Mauerquadranten (Fig. 4) der Uraniaburg:

„Noch ist ein anderer von Messing gantz gegossener Quadrant / in einer anderen Kammer deß Hauses / gegen Südwest / an die Mawer mit starken Eysern Schrauben fest gemacht / gerade in plano Meridei (in die Meridianebene) gestellet / und hat in einem Loche, welches gegen Süden durch die anstoßende Mawer gehet, im Centro*) einen Cylinder von vergoldeter Bronze, vermittelst dessen der Schatten der Sonne oder die Strahlen der Sterne aufgenommen werden. Auf je 2 Brettlein, die auf der Peripherie und im Innern des Quadranten drehbar sind, werden die Höhen der Gestirne an demselben Umkreis sehr fein unterschieden. Es hat nämlich jeder Grad der Kreisteilung nicht nur einzelne Minuten, die durch Transversalpunkte genau eingeteilt sind, sondern auch jede Minute wird wieder in 6 Teile geteilt, oder in je 10 Sekunden, auf diese gleiche Weise. Denn der Quadrant ist an sich selbst gar groß / und hat à centro ad circumferentiam (vom Centrum bis zum Umfang) fünffthalbe cubitos (Ellen). Innerhalb diesem Quadrant in spacio vacuo (im leeren Raum) ist deß Tychonis Effigies (Bild) an eine Taffel abgemalet / so groß alß er ist / sitzet und lehnet sich an einen Tisch / und weiset mit die eine Handt zu dem Loche in die Mawer hinauff / da die Observationes (Beobachtungen) durch diesen Quadranten geschehen. Sonst ist auch daselbst ein architectonisch Gemäl angezeigt / darin in diversis contignationibus (verschiedenen Abteilungen) viel von den andern seinen Instrumentis abgezeichnet / und die Studenten darbey / wie sie damit zu observiren (beobachten) pflegen. Daneben auch ein Studiorum / da etliche beym Tische sitzen / alß wan sie studirten und calculirten. Es ist auch sein Laboratorium Pyronomicum (chemisches) darunter / doch mit etlichen Fornacibus (Oefen) / und diejenigen / die darauf warten / verzeichnet. Diß alles ist also arte pictoria in minori forma repräsentirt (so kunstgerecht in verkleinerter Form gemalt), alß wan es von obgedachtem großen Effigie (Bild) weit abstünde / wiewol es alles in einem plano (Ebene) ist. Zu underst ligt einer von seinen Schießhunden bey seinen Füssen auch abgemalet / so groß alß er war / non tam nobilitatis, quam Sagacis ingenij Symbolum. (Ein Gleichniss, nicht sowohl edler Abkunft als scharfsinnigen Geistes.) Und ist beyde die Effigies und alles andere Gemäl in area huius Quadrantis (im Innern dieses Quadranten) nur ornatus causa (als Schmuck), und daß das Spacium (Raum) nicht ledig stünde / gemacht."

*) Einige folgende Sätze, die im Original in latein. Sprache geschrieben sind, folgen hier in der Uebersetzung.

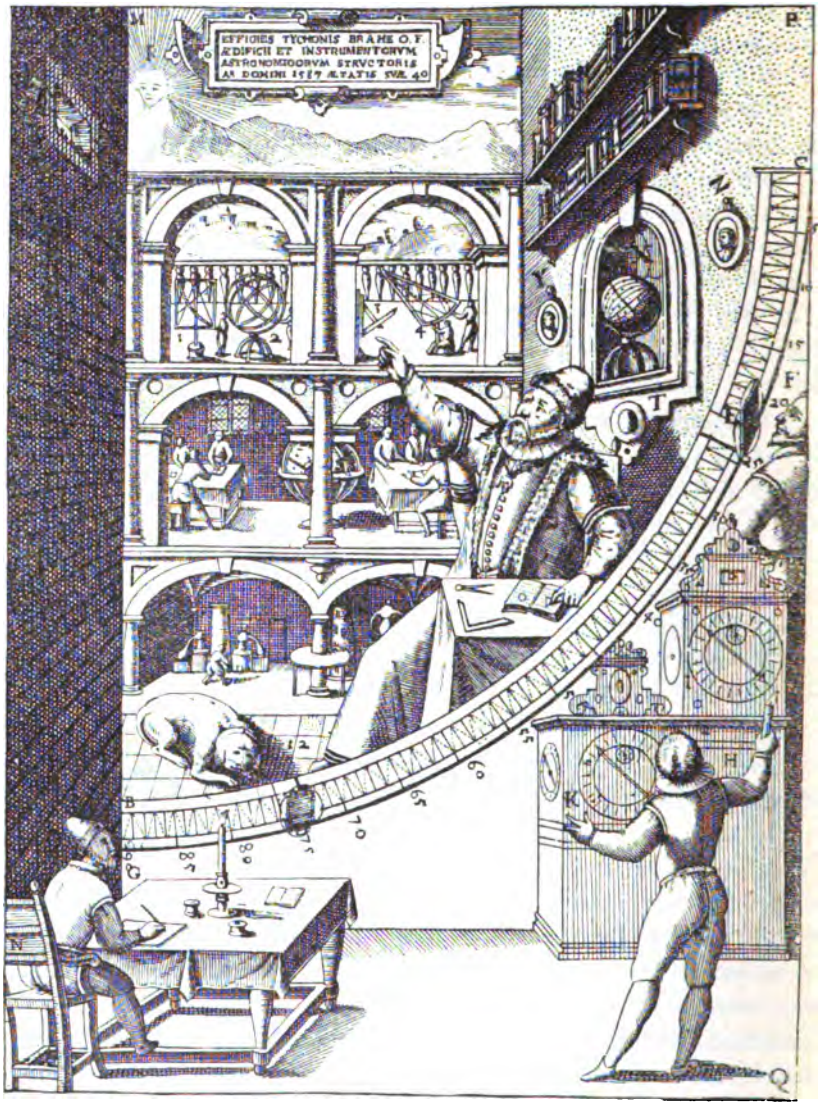


Fig. 4. Tycho Brahe's Mauerquadrant.

Dieser Mauerquadrant diente zur genauen Bestimmung der Kulminationshöhe der Sonne und der Gestirne. Noch in den letzten Decennien des 18. Jahrhunderts gehörte der Mauerquadrant — allerdings mit Fernrohr versehen — zu den besten und brauchbarsten Instrumenten der beobachtenden Astronomie, jetzt ist er längst durch bessere Instrumente, den Meridiankreis und das Aequatoreal verdrängt.

Mit seinen Instrumenten konnte Tycho Brahe die Höhe der Gestirne bis auf eine Bogenminute genau messen, was für jene Zeit eine grosse Präzision bedeutete. Allerdings ist die astronomische Winkelmessung heutzutage 60 mal genauer, die Winkel werden bis auf eine Bogensekunde genau gemessen. Von der Kleinheit einer solchen Grösse macht man sich einen Begriff, wenn man sich vorstellt, dass ein Winkel von einer Sekunde der 60. Teil desjenigen Winkels ist, unter dem ein gewöhnliches Menschenhaar in deutlicher Seeweite dem Auge erscheint. Es ist aber nicht zu vergessen, dass Tycho die grosse Genauigkeit seiner Beobachtungen ohne Fernrohr, ohne Mikroskop und ohne Pendeluhr, die damals noch nicht erfunden waren, erreicht hat, und dieses Verdienst wird auch auf seinem Grabstein angeführt.

Erst auf der Uranienburg betrachtete Tycho Brahe seine Arbeiten als stichhaltig. Es wurden Mitarbeiter angestellt, teils zum Beobachten, teils zum Rechnen, was damals, wo noch keine Logarithmentafeln existierten, viel mühsamer war als jetzt. Die Uranienburg erlangte bald Weltruf. Gelehrte und Fürsten, unter andern König Jakob I. von England, besuchten Tycho auf seiner Sternwarte, und viele Studenten erhielten bei ihm Unterricht.

Von den hier ausgeführten Arbeiten und Beobachtungen sind namentlich wichtig die Anfertigung eines Fixsternkataloges und die fortgesetzte Beobachtung der Planeten, namentlich des Mars. Tycho war der Erste, der die geographische Breite seines Beobachtungsortes durch *Circumpolarsterne* bestimmte, und der Erste, der die atmosphärische Strahlenbrechung berücksichtigte und als *Refraktion* an seinen Beobachtungen anbrachte. Bisher hatten alle Astronomen, auch Tycho selbst, sie für zu unbedeutend gehalten, aber bei der Genauigkeit seiner neuen Beobachtungen, konnte er sie nicht mehr vernachlässigen. Tycho entdeckte die *Variation* der Mondbahn, die Ungleichheit der Knotenbewegung und die Veränderlichkeit der Neigung derselben. Aus seinen Kometenbeobachtungen, namentlich denen des Kometen von 1577, zeigte er, dass diese Körper unmöglich in den

obern Luftregionen der Erde sich aufhalten könnten, wie die damalige Ansicht war, sondern weit jenseits der Mondbahn liefen. Die Schiefe der Ekliptik bestimmte er zu 23° 30′. In mehreren dieser Arbeiten half ihm seine Schwester Sophia.

Auffallenderweise anerkannte Tycho Brahe das Kopernikanische Weltsystem nicht. Einem so ausgezeichneten Beobachter, wie ihm, konnte die vollständige Unhaltbarkeit des Ptolemäischen Systems nicht verborgen bleiben, und er führte sogar neue Gründe gegen dasselbe auf, die weder Kopernikus, noch seine Vorgänger bemerkt hatten. Tycho giebt zu, dass das System des Kopernikus besser sei als das des Ptolemäus und nicht gegen die Grundsätze der Mathematik verstosse, so lange man nur den Lauf des Mondes und der Planeten betrachte; allein einerseits machten ihn die Kometen, die auf ihrer Bahn nie rückläufig wurden, anderseits physische Gründe daran irre. Einige dieser Gründe mögen hier erwähnt werden.

«Die Erde, sagte Tycho, ist eine grobe, schwere und zur Bewegung ungeschickte Masse, wie kann nur Kopernikus einen Stern aus ihr machen und ihn in den Lüften herumführen?» [1]) Tycho bedachte dabei nicht, dass die Sonne und ein Teil der Planeten, wie er selbst zugestand, viel grösser als die Erde sind, und trotzdem sollten sie sich, nach seiner Ansicht, um die Erde bewegen.

Tycho sagt ferner: «Wenn man von der Höhe eines Turmes einen Stein herabfallen lässt, so könnte derselbe nicht am Fusse desselben niederfallen, wenn die Erde sich inzwischen bewegt hat, sondern er müsste um soviel Fuss westlich davon niederfallen, als die Erde sich inzwischen von Westen nach Osten um ihre Achse bewegt hat.» Dieser Einwand wäre allerdings richtig, wenn die Erde erst in dem Augenblick, wo der Stein losgelassen wurde, angefangen hätte, sich um ihre Achse zu drehen. Allein, da sie fortwährend in dieser Bewegung begriffen ist, so macht auch die Hand, welche den Stein hält, und der Stein selbst die Bewegung mit und behält diese während des Falles bei, so dass er am Fusse des Turmes niederfällt. Einen ähnlichen Versuch mit einem Stein kann jeder auf einem fahrenden Wagen machen. Weil aber die Spitze des Turmes samt dem Stein eine grössere Umdrehungsgeschwindigkeit hat, als sein Fuss, weil sie weiter vom Erdmittelpunkt entfernt ist, so muss gerade das Gegenteil von dem statt-

[1]) Mädler. Populäre Astronomie.

finden, was Tycho erwartete, der Stein wird nicht westlich, sondern östlich vom Fuss des Turmes niederfallen, was durch sorgfältige Versuche auch bestätigt worden ist.

Der schwerwiegendste Einwurf, den man dem Kopernikanischen System machen konnte, und den sich Kopernikus auch selbst machte, war das Fehlen einer Fixsternparallaxe, woraus eine ungeheure Entfernung der Fixsterne folgte. Aus diesem Grunde machte Tycho den Einwurf, wie es denn überhaupt möglich sei, die Fixsterne zu sehen? Sie müssten ja dann viele Millionen mal grösser sein als die Sonne. Hätte er die Teleskope und die Eigenschaften des Lichtes gekannt, so würde er diesen Einwand nicht gemacht haben.

Alle diese und noch viele andere Einwürfe, die man anfangs dem Kopernikanischen System machte, sind längst dahin gefallen oder sind im Gegenteil zur Stütze desselben geworden. Auch der wichtigste Einwurf gegen dasselbe, das Fehlen einer Fixsternparallaxe ist seit dem Jahre 1836 gehoben.

Weil Tycho sowohl das Ptolemäische als auch das Kopernikanische System verwarf, so stellte er ein eigenes System auf, das in der Geschichte der Himmelskunde als das Tychonische System eingeführt ist, das aber ohne alle Bedeutung geblieben ist. In diesem System steht die Erde ebenfalls ruhend im Mittelpunkt des Weltalls und um sie kreist der Mond. Alle Planeten laufen in Kreisbahnen um die Sonne und die Sonne selbst mit ihrem ganzen Planetengefolge bewegt sich in Schraubenlinien von ungleicher Weite um die Erde. Die Fixsterne liess Tycho, ebenso wie Ptolemäus, in 24 Stunden um die Erde laufen.

Mit diesem System liessen sich allerdings die damals bekannten Erscheinungen ebenfalls mit einiger Annäherung erklären, aber es war noch komplizierter und praktisch noch unbrauchbarer als das Ptolemäische und Tycho selbst hat davon nie praktischen Gebrauch gemacht, sowenig als irgend ein anderer gleichzeitiger oder späterer Astronome. Dieses System lässt sich nach keiner Richtung in Einklang bringen mit den hervorragenden Arbeiten des grossen Astronomen und man ist versucht, diese Verirrung den Charaktereigenschaften Tychos, nämlich Eitelkeit, Ehrgeiz und Unduldsamkeit zuzuschreiben; vielleicht hatte an der Verwerfung des Kopernikanischen Systems der Neid, es nicht selbst erfunden zu haben, einigen Anteil. Welche Gefühle mögen Tycho wohl bewegt haben, als ein Jahr vor seinem Tode, am

17. Februar 1600, der geistvolle Philosophe Giordano Bruno, der für die Kopernikanische Lehre eingetreten war, auf dem Campo die Fiore in Rom den Scheiterhaufen besteigen musste? Das endgiltige Urteil der römischen Curie über Kopernikus erlebte Tycho freilich nicht, denn erst im Jahre 1616 wurde seine Lehre als eine ketzerische erklärt und das Verdammungsurteil über dieselbe abgegeben. Die unmittelbare Veranlassung hiezu gab Galilei.

Tycho hat übrigens, namentlich in spätern Jahren, die Verdienste des Kopernikus anerkannt. Es zeigt sich dies darin, dass er ein von Kopernikus herrührendes Instrument, die Parallatica Regula (eine parallel zur Erdachse gestellte, geteilte Schiene), sorgfältig aufbewahrte und hoch in Ehren hielt, sowie in dem begeisterten Lobgedicht, in welchem er ausdrücklich des Kopernikanischen Weltsystems mit grossem Ruhme gedenkt, wenn er von der kühnen That des Kopernikus spricht, dem es

«gelang, dem Himmel die Sonn' zu entreissen
Und sie festzustellen.»

In dem früher erwähnten Verzeichnis der Instrumente der Uranienburg, welches ein Gehülfe Tychos im Jahre 1591 für den Landgrafen Wilhelm IV. von Hessen verfertigte, wird diese Thatsache in Nr. XIII. des Verzeichnisses folgenderweise erwähnt:

«Dess hochberümbten Nicolai Copernici Parallaticæ Regulæ von Holtze / woran die teilung mit Ritzen durch Dinten schwartz gemacht / verzeichnet stehet / welches Copernicus mit seiner Handt selber gemacht und gebraucht hat. Sunt Tychoni Varmiâ ex Prussiâ dono missæ. (Sie sind dem Tycho aus Preussen zum Geschenk geschickt.) Latera huius Instrumenti æqualia (die gleichen Seiten des Instrumentes) seyndt ein jedes 4 Ellen lang. Dieses Instrument hat Tycho mehr umb dess hochlöblichen Copernici willen / memoriæ tanti artificis causâ (zum Andenken eines so hervorragenden Künstlers willen), in Ehren / alss dass es nützlich sei / oder in einige Observation rechtmessig zu gebrauchen. Und wie gross er das halte / zeiget das Carmen (Gedicht), das er darbey gestellt hat / welches in der Lateinischen Explication folgen soll.»

Der Anfang dieses von Tycho Brahe am 23. Juli 1584 in Hexametern geschriebenen, lateinischen Gedichtes lautet folgenderweise:

Is, qualem non Terra Virum, per secula multa
Procreat, Inuidiâ tardansquaeque Optima, qualem
Ipsa sibi vix Astra ferunt, per mille recursus,
Tot Centrisque Polisque licet, totque Orbibus Orbem
Tam rapido inuoluant cursu, nec lassa fatiscant:
Ille Is, qui Coelo genitus, Coelestia Terris
Progenuit, sed partu alio, quàm prisca Parentum
Fert veterumsoboles, . . . etc.

Im Folgenden ist eine freie Uebersetzung dieses Gedichtes (von Dr. G. Finsler, Rector am Gymnasium Bern) wiedergegeben:

»Er, ein Mann, wie die Erde in vielen Jahrhunderten keinen
Zeugt, weil immer ihr Neid, was gut und edel, zurückhält;
Wie ihn kaum die Gestirne gebären, die doch in ew'gem
Umschwung, in zahllosen Kreisen, vom Pol bis zur Mitte, den Himmel
Rastlosen Laufes umfangen und nie erlahmend ermatten;
Er entstammte dem Himmel und schenkte himmlische Kinder
Unserer Welt, nicht so, wie sonst man von Kindern
Oder von Eltern spricht; dem ebenbürtigen Sohne
Lieh der Himmel im Bilde der Heimat, die eigenen Augen
Mehr und mehr ihm weisend, was uns das Bild des gesamten
Firmaments bezeugt; mag immer der törichte Haufe
Seine Augen verschliessen des Umschwungs ew'gen Gesetzen.
Er vermochte, vom Himmel herab die Sonne zu führen
Ihr ihre Bahn zu verbieten; er hat in die Sterne die Erde
Eingefügt, gekettet den Mond an die Erde, des Weltalls
Bild verwandelt; jedoch schuf keine Lücke der Wandel.
Nein, harmonischer nur und leichter dem Geist zu erfassen
Weist er unserem Auge der Himmelserscheinungen Schauspiel.
Ja, Copernicus, der sich solches Wagens vermessen,
That es mit leichten Stäben, mit kunstlos einfachen Mitteln,
Wies mit gewöhnlichem Holze dem Himmelsraum die Gesetze,
Zwang in sein Instrument die Bahn der hohen Gestirne,
Trat in des Himmels Palast, was seit dem Ursprung der Welten
Kaum noch jemals einem der sterblichen Menschen vergönnt war.
Alles besiegt das Genie! einst wurden auf Berge vergeblich
Berge getürmt; es bezeugt es der Polion, Ossa, der Aetna;
Es bezeugt's der Olymp, auf den sie die wuchtigen Massen
Häuften, und zahllose andere, dass auch der Riesen Geschlechter,
Mächtig in Körperkraft, doch arm am Lichte des Geistes,
Nicht vermochten das Haus des ewigen Gottes zu stürmen.

Er, der Erhabene, bezwang, vertrauend den Kräften des Geistes,
Ohne Gewalt, den hohen Olymp durch Messen und Rechnen.
Du, sein Instrument, sein Denkmal! würde das Gold nicht,
Kennt' es dich, mit Recht das Holz, das schlichte, beneiden?«

Nur kann man aus diesen Gründen allein nicht den Schluss ziehen, dass Tycho an seinem eigenen System irre geworden sei; dass dies nicht der Fall war, zeigt der Umstand, dass er im Jahre 1591 im Postscriptum eines an den Landgrafen Wilhelm IV. von Hessen gerichteten Briefes hervorhebt, dass der Ort des Planeten Mars zu einer bestimmten Zeit mit seinem eigenen System allein habe zur Uebereinstimmung gebracht werden können, und dass daneben weder das Ptolemäische noch das Kopernikanische System habe bestehen können.

Es möge hier ein Brief des Landgrafen Wilhelm an Tycho Brahe aus der erwähnten Sammlung eingeschaltet werden, nebst dem Antwortbrief Tychos, in dessen Postscriptum die oben genannte Stelle vorkommt. Diese Briefe, mit eingeklammerter Uebersetzung der lateinischen Bezeichnungen, lauten:

Dem Vesten / unserm lieben Besondern / Tychoni Brahi, Herrn zu Knudstrup.

Wilhelm von Gottes Gnaden / Landgraue zu Hessen / Graue zu Katzenelnbogen / etc.

Vester lieber Besonder / Daß jhr uns underm dato Uraniburg am 2. Aprilis zu verstehen geben / daß ihr jetzo den ersten Tomum de Recentioribus Coeli Phaenomenis (1. Band der neuen Himmelserscheinungen) in Druck zu verfertigen fürhabt / und uns denselben zu communiciren (überreichen) erbotten / das ist uns umb soviel desto lieber gewesen zu vernehmen / dieweyl jhr in gedachtem Tomo quasi ex professo de rectificatione Stellarum Fixarum (gewissermassen vorsätzlich von der Berichtigung der Fixsterne) / darnach wir so lange Zeit besonders verlangen gehabt / nicht allein tractiret (behandelt), sondert auch etliche hundert Stern auß ewern Observationibus emendiret (verbesserten Beobachtungen) erzehlen thut. Wollen demnach desselben Operis gewertig sein / mit Gnaden zu verschulden. Anlangende unsern Mathematicum / hat er sich zwar vor etlichen Monaten bey uns seiner Leibs Krankheit halben beklagt / Ist aber / unangesehen er uns schrifftlich zu verstehen geben / und wir jhm solchs gnediglichen befohlen

haben / gleichwohl nicht angelangt. u. ſ. w. (Folgt eine Besprechung von seltenen Tieren, die für des Landgrafen Tiergarten bestimmt sind.) Was denn anlangt die begehrte Papiermacher / mögen wir euch gnediglich nicht verhalten / daß wir under uns einen eintzigen haben / derſelb richtets allererſt an / und macht ſehr ſchön Werk / wie auß gegenwertigem Papier / und euch zugefertigtem Brieff zu ſehen / Wir wollen uns aber zu Franckfurt umhören laſſen / ob wir nicht ein oder zween darzu bewegen köndten / daß ſie ſich zu euch begeben wolten / Doch müſſen wir zuvor wiſſen / welcher geſtalt jhr ſie halten und underhalten wollet: Wollen wir alßdann jhre Abfertigung auffs eheſt befördern helffen. Wolten wir euch / dem wir mit Gnaden ſonders wohl gewogen / alſo gnediglich nicht verhalten. Datum in unſer Stadt und Veſtung Caſſel / am 22. Maij. Anno 1591.

Wilhelm Landtgraff zu Hessen.

Tychos Antwort erfolgte im September desselben Jahres und lautet, mit Auslassung einer Zwischenstelle:

Dem Durchleuchtigsten / Hochgebornen Fürsten und Herrn / Herrn Wilhelm, Landtgrauen zu Heſſen / Grauen zu Katzenelnbogen / Dietz / Ziegenhain und Nidda: Meinem gnedigen Herrn.

Durchleuchtigſter / Hochgeborner Fürſt. Ewer F. G. ſind meine fleißwillige Dienſte nach allem vermügen jederzeit zuvoran bereit. Gnedigſter Herr / Ew. F. G. an mich under dato den 22. Maij nechſthin / auß jhrer Stadt und Veſtung Caſſel außgegangenes Schreiben / iſt mir nu erſt den 7. huius (dieſes Mon.) allhie auff Uraniburg zu handen kommen. Wo es ſo lange $3^1/_2$ Monat / under Wegen ſey auffgehalten / kann ich nicht wiſſen / ſonſt hette ichs zeitlicher zu beantworten nicht underlaſſen.

Was erſtlich meines fürhabenden Operis primum Tomum de Reccentioribus cœli Phænomenis belangt / in welchem Capite 2. Stellarum fixarum Restitutio fundamentaliter tractirt wird / deſſen Ew. F. G. in jhrem Schreiben gedenkt / darauff kann Ew. F. G. ich dienſtlich nicht verhalten / daß daſſelb Opus noch nicht vollends durch den Druck verfertigt iſt / Denn ich habe dieſen Sommer anderer nothwendiger auffliegender Geſchefften halben nicht weyl gehabt / ſolchem auffzuwarten. Wenn aber Gott Gnad und gelegenheit verleihen wirdt / daß es dieſen Winter möchte fertig werden / alß denn wil ichs Ew. F. G. jhrem begeren nach / mittheilen.

Daß Ew. F. G. Mathematikus, Rothmannus, noch nicht zu Ew. F. G. wider ankommen geweſen / ſolchs thut mich nicht wenig verwundern / denn er hat ſich bey mir nicht anders merken laſſen / denn daß er von ſtunden wider zurück gen Caſſel ſich begeben wollte / welches nu eben ein Jahr verlitten iſt. Wofern der Morbus (Krankheit) / deſſen Ew. F. G. meldung thut in causa were (die Urſache) daß er ſo lange außbleibt / ſo hette er je mitler zeit ſich können curiren laſſen. Er ließ ſich ſolchs mangels allhie gar nicht vernemen / ſonſt were vielleicht hie ſo gut Paracelsisch Remedium dagegen zu finden / alß anderßwo / welches jhnen auch ohn zweiffel wolbewuſt iſt. Ich gedenke aber / ſo er noch nicht widerumb zu Ew. F. G. ankommen iſt / er werde ſich mit dem erſten wider einſtellen. Es were gut / daß er das Opus Stellarum Fixarum mit erſter gelegenheit verfertigte / auff daß die langweylung und groß angewandte mühe und fleiß nicht hinder bliebe / ſondern andern / und Posteritati (Nachwelt) zu nutz kommen möchte.

(Auslassung: von den für des Landgrafen Thiergarten bestimmten Thieren.)

Ferner / da Ew. F. G. in jhrem Schreiben mention (Erwähnung) thut vom Papiermacher / daß Ew. F. G. nach einem oder zween zu Franckfurt wollte umbhören laſſen / kan Ew. F. G. ich nicht bergen / daß ich ſelber ſchon einen bekommen hab / der deß Handtwerks gnugſam erfaren / und nu mit einem Geſellen im Wercke iſt / umb Druckpapier zu machen. Thu mich gleichwol gegen Ew. F. G. dienſtlich und zum höchſten bedanken / daß dieſelbige gnedigen willens geweſen / und ſich nicht beſchweret / ſolch ungemach meinet halben auff ſich zu nehmen. Wo Ew. F. G. ich hinwiderumb nach meinem geringen euſſerſten vermügen zu dienſt und gefallen ſeyn kann / darzu erbiete ich mich ganz willig / und ſoll Ew. F. G. mir ohn das zu gebieten haben. Wil Ew. F. G. in Schirm deß Allerhöchſten zu langwirlger glücklicher Geſundtheit und Landsregierung hiemit dienſtfleiſſig befolen haben. Datum Uraniburg, den 8. Sept. Anno 1591.

Ewer F. G. dienſtwilliger

Tycho Brahe.

Poſtſcripta. Auff daß aber diß mein Schreiben nicht alleine von den Irdiſchen Thieren / ſondern etwas de coelestibus (von den himmlischen) inhalte / wolte ich nicht underlaſſen / Ew. F. G. zu ſignificiren, daß Martis Stella (der Stern Mars), der ſonſten mehr alß die andern Planeten / den Calculum Astronomicum eludirt (die

astronom. Rechnung verspottet), ist im letzten Acronycho situ (Aufgang des Sterns bei Sonnenuntergang) welches geschehen ist im anfange deß 9. Tags Junij, circa Perigaeum solare (gegen die Erdnähe der Sonne), mit dem Calculo Copernicaeo (Kopernikan. Rechnung) gar nahe übereingestimmet / also / daß kaum 1/3 Grads gefehlet hat / so doch den Numeris Alphonsinis (den alphonsinischen Zahlen) nach bey 4 1/2 Grad zuviel gewesen / welches sonsten in andern Oppositionibus Solis & Martis (Gegenstellung der Sonne und des Mars), deren ich etliche observirt, nicht geschieht. Und hab Martem zuvor / wenn er ist pernox (über Nacht sichtbar) gewesen / circa Arietis & Librae initia, in medio quasi loco inter Apogaeum et Perigaeum solare, considerirt, (gegen den Anfang des Zeichens des Widders und der Wage, sozusagen in der Mitte zwischen der Erdferne und der Erdnähe der Sonne, betrachtet) daß er alßdan von deß Copernici Calculo bey 2 oder 3 Grad abgewichen ist / und das in partes contrarias, prout ferebat Eccentricitatis solaris ratio (nach entgegengesetzten Seiten, in dem Masse, als es die Mittelpunktsabweichung der Sonne mit sich brachte). Es hat auch die Alphonsina Supputatio (Nachrechnung) allda nicht bestehen können. Auß diesem ist leichtlich apud rem penitius introspicientes (bei genauerem Hineinsehen) abzumerken / daß da noch ein ander inaequalitas (Ungleichheit) fürhanden sey / è solari Eccentricitate proveniens (die von der Mittelpunktsabweichung der Sonne herrührt), die sich in den apparentem motum Planetarum insinuirt (die sich in den scheinbaren Bewegungen der Planeten einschleicht). Und wird in Marte, quoad tres superiores, am meisten gespürt / dieweyl er seinen Circuitum ad Solem (Kreis um die Sonne) nicht so groß hat / alß die andern / daß darumb Eccentricitas Solis respectu ambitus, quem is designat, ein sensibilem proportionem hat (dass darum die Mittelpunktsabweichung der Sonne auf den Umlauf, den derselbe beschreibt, einen merklichen Einfluss hat), die doch in Jove (Jupiter) geringer / und in Saturno gar wenig gespürt wird. Hierauß ist zu schliessen / daß unsere Invention in Hypothesibus coelestibus (Erfindung eines Weltsystems), welche ich lib. 2 de aethereis Phaenomensis cap. 8 generaliter et lato modo indicirt hab (im 2. Buch der Lufterscheinungen Kap. 8 allgemein und ausführlich angezeigt habe) / alleine mit den Apparentijs (Erscheinungen) übereinzustimmen vermag. Und daß weder die alte Ptolemeische / noch die newe Copernicische hierin nicht bestehen / denn

ſie können dieſe inaequalitatem (Ungleichheit) nicht gebührlich excusiren (entschuldigen, erklären). Ich hab auch von dieſem in geheim mit Ew. F. G. Mathematico, alß er hier war / geredt / der ſich denn nicht wenig darob verwundert hat / und bekandt / daß er zuvor darhin nicht hab gedenken können / ſonſt hette er ſein Indicium de meis Hypothesibus (Urtheil über meine Hypothesen) nicht alſo praecipitirt (gefällt). Und iſt viel anders hierneben zu mercken / welches zu weitleufftig wer / allhin zu erkleren. Diß hab ich nu allein zum Beſchluß / und umb einige Aſtronomiſche Collation (Erfrischung) halben / Ew. F. G. anzeigen wollen. Bittendt Ew. F. G. wolle dieſem / nach jhrem hohen in hac scientia (in dieser Wissenschaft) Verſtande / nachdencken / und mir jhre Meinung davon gnedigſt zukommen laſſen. Datum ut suprà.

Aus der Nachschrift dieses Briefes geht hervor, dass Tycho an seine Weltordnung glaubte. Es geht dies auch besonders daraus hervor, dass er noch auf seinem Sterbebett seinem Mitarbeiter Joh. Kepler die Vertretung seines Systems ganz besonders ans Herz legte.

Auf der Uranienburg wurde Tycho von seinem Gönner König Friedrich II. durch Geschenke, Gehaltserhöhung, Belehnung und Ehrenbezeugungen belohnt und die Freigebigkeit seines Fürsten vergalt er durch das Stellen von Horoskopen, denn in jener Zeit stand die Astrologie oder Sterndeutung, die Kunst, aus der Stellung der Sterne zukünftige Ereignisse und besonders die Schicksale der Menschen vorauszusagen, noch in hohem Ansehen; sogar der grosse Astronome Kepler war nicht frei von diesem Aberglauben.

Nach dem Tode Friedrich II. (5. April 1588) gelang es Tychos vielen Feinden, im Laufe der nächsten Jahre ihm die königliche Gunst des Nachfolgers, Christian IV., zu rauben. Man entzog ihm schliesslich den Jahrgehalt und verbot ihm seine astronomischnn und chemischen Arbeiten. Tycho verliess nun die Uranienburg auf der Insel Hven und begab sich nach Kopenhagen, wo er aber seine Beobachtungen nicht fortsetzen durfte. Einen Teil der Instrumente der Uranienburg hatte er mitgenommen, die grösseren liess er einstweilen dort zurück. Als Tycho auch hier verfolgt wurde, besonders von dem einflussreichen Reichshofmeister Christof von Walkendorf, verliess er im Jahr 1597 mit seiner Familie sein Vaterland für immer und wandte sich nach Rostock und, durch die Pest vertrieben, von da zu seinem Freunde und Verwandten Heinrich Ranzow, dem königlichen Statthalter in Holstein, auf Schloss Wandsbeck bei Hamburg,

wo er seine Beobachtungen wieder aufnahm und wo er 1598 eine illustrierte Beschreibung seiner sämtlichen astronomischen Instrumente herausgab, die «Astronomiæ instauratæ mechanica». Von hier aus wusste er den deutschen Kaiser Rudolf II. für seine astronomischen und besonders auch astrologischen Studien einzunehmen, so dass dieser ihn im J. 1599 als kaiserlichen Astronomen in seine Dienste nahm. Es wurde ihm das kaiserliche Schloss Benatki (arx Benatika) in der Nähe von Prag eingeräumt, wo ihm auf Kosten des Kaisers eine Sternwarte mit Laboratorium gebaut wurde. In dieser stellte Tycho seine Instrumente auf, die auf der Uranienburg zurückgelassenen wurden herbeigeholt, und die Arbeit begann. Bald aber siedelte er in die Stadt Prag selbst über, wo ihm ein grosses Haus auf dem Hradschin überlassen wurde, das er in eine neue Uranienburg umzuwandeln gedachte.

Tycho Brahe suchte nun Mitarbeiter, und fand diese in Longomontanus, einem Jüten (1562—1667), der als der vertrauteste und vorzüglichste Gehilfe Tychos bezeichnet wird und in dem damals eben von Graz als Protestant vertriebenen, nachmals berühmten Johannes Kepler, aus Weil in Württemberg, geb. am 27. Dez. 1571, der sich schon früher durch ein astronomisches Werk «Mysterium cosmographicum» bekannt gemacht hatte. Kepler war Tycho von Baron Hoffmann, einer angesehenen Persönlichkeit am kaiserlichen Hofe, empfohlen und vorgestellt worden. Der Empfehlungsbrief, vom 3. Februar 1600 datiert, befindet sich im Original in der Universitätsbibliothek in Basel, er wurde 1887, zusammen mit andern Briefen, von Prof. Fr. Burckhardt in Basel im Drucke herausgegeben.

Noch im Februar 1600 trat Kepler neben Tycho Brahe in kaiserliche Dienste. Beide Männer waren aber so unähnlich in ihrem Wesen, dass Kepler sich anfangs gar nicht an den stolzen, dänischen Edelmann gewöhnen konnte; zudem war Kepler ein begeisterter Anhänger der Kopernikanischen Weltordnung, während Tycho dieselbe bekämpfte. Wäre nicht Keplers Freund, Baron Hoffmann, dazwischen getreten, so wäre schon im April desselben Jahres ein Bruch zwischen Tycho und seinem neuen Assistenten erfolgt. Darauf schrieb Kepler, der auch nicht ganz ohne Schuld an den Streitigkeiten war, einen Entschuldigungsbrief, und von da an durfte sich Kepler für geborgen halten. Im Juni 1600 reiste er nach Graz, um seine Angelegenheiten zu ordnen, wobei er seinen Hausrat einstweilen nach Linz überführte;

nach seiner Rückkehr wurde emsig weiter gearbeitet. Tycho hatte gleich anfangs einen Arbeitsplan aufgestellt; diesem zufolge sollte sein Sohn das chemische Laboratorium leiten, Longomontanus den Mond, Franz Tengnagel die Venus und Kepler den Mars bearbeiten, wobei Tycho die Oberleitung in den Händen behalten sollte. Tengnagel, ein adeliger Böhme, war auf der Uranienburg Tychos Schüler gewesen; er wurde im Frühjahr 1601, kurze Zeit vor Tychos Tod, dessen Schwiegersohn, indem er seine Tochter Elisabeth Brahe heiratete. Tycho hielt grosse Stücke auf ihn; später wurde derselbe kaiserlicher Bibliothekar und Rat.

Tychos Arbeitsplan kam aber nie zur rechten Ausführung, trotzdem Kepler es nicht an sich fehlen liess. Im Mai 1601 war Kepler nochmals in Geschäften nach Graz gereist. Nach seiner Rückkehr kam es zwischen ihm und Tycho wieder zu neuen Streitigkeiten; aber nur zu bald wurde das vielfach unangenehme Verhältnis zwischen den beiden Männern durch den Tod gelöst. An einem Gastmahl in Prag zog Tycho sich ein schweres Blasenleiden zu, infolge dessen er von furchtbaren Delirien befallen wurde. In einem lichten Augenblicke rief der Sterbende seinen Mitarbeiter Kepler an das Krankenlager und bat ihn, er möge, trotz seiner Hinneigung zum kopernikanischen Weltsystem, die planetarischen Erscheinungen im Geiste seines eigenen, des tychonischen Systems darzustellen versuchen. Wenige Stunden nachher, am 24. Oktober 1601, verschied der grosse Astronome mit dem Ausrufe: „Ich habe nicht umsonst gelebt."

Unter den astronomischen Werken Tychos, die er alle in lateinischer Sprache herausgegeben hat, ist neben seinem Prachtwerk „Astronomiæ instauratæ mechanica", welches eine Beschreibung und Gebrauchsanweisung seiner astronomischen Instrumente enthielt, und welches er 1598 dem Kaiser Rudolf II. gewidmet hatte, noch besonders die „Astronomiæ instauratæ progymnasmata" (2 Tle. Kopenhagen 1589, Prag 1603, Frankfurt 1610) zu erwähnen.

Der I. Teil dieses Buches: «*De nova stella anni 1572*». enthält insbesondere die ausführlichen Beobachtungen und Ortsverzeichnisse des neuen Sterns in der Kassiopeia vom J. 1572, daneben noch die Darstellung der Bewegung der Sonne, des Mondes und der Gestirne. Der II. Teil: «*De cometa anni 1577*» behandelt die neuen Erscheinungen in den obern Luftregionen der Erde, die Kometen und besonders den Kometen des J. 1577. Im 8. Kapitel dieses Buches

findet sich die Einführung und ausführliche Entwicklung seines, des Tychonischen Weltsystems.

Die nicht gedruckten Briefe Tychos wurden nach seinem Tode zerstreut, es befinden sich Sammlungen davon in der k. k. Hof-Bibliothek in Wien, in der Bibliothek in Pulkowa, in Kopenhagen und in Basel. In der Universitätsbibliothek in Basel befindet sich ein Band mit 90 Briefen von Tycho und ein zweiter Band mit 40 Briefen an Tycho, unter diesen der früher erwähnte des Barons Hoffmann. Wie und wann diese Briefe nach Basel kamen, weiss man nicht. Gesammelt wurden dieselben um die Mitte des 18. Jahrhunderts von Dr. jur. Werner Huber. Die Briefe stammen alle aus Tychos letzten Lebensjahren. Ein Teil derselben wurde 1887 von Prof. Fr. Burkhardt herausgegeben. (Wissenschaftl. Beilage zum Bericht über das Gymnasium Basel. Schulj. 1886/87).

Die kostbare Sammlung seiner astronomischen und übrigen Instrumente kaufte Kaiser Rudolf II.; sie wurden nach der Schlacht am weissen Berge grösstenteils vernichtet, nur noch 2 seiner Sextanten befinden sich, wie schon früher erwähnt, im astronomischen Museum in Prag. Ein grosser Himmelsglobus aus Messing, der 5000 Thaler gekostet hatte, kam nach mancherlei Irrfahrten wieder nach Kopenhagen, wo er beim Brand des königlichen Schlosses im Jahre 1728 zerstört wurde. In Kopenhagen wurde im Jahre 1876 dem berühmten Astronomen ein Standbild errichtet.

Fünfzig Jahre nach Tycho Brahes Tode besuchte der französische Bischof Daniel Huet die Insel Hven, er fand aber von der einst so prächtigen Uranienburg nichts mehr übrig, kaum eine Spur der Mauern. Weder der Pfarrer, noch die Einwohner wussten etwas von Tycho, sogar der Name war ihnen fremd; nur ein Greis erinnerte sich dunkel, die Sternwarte gesehen zu haben.

Schon 2 Tage nach Tychos Tod wurde Kepler von Kaiser Rudolf zu dessen Nachfolger als kaiserl. Mathematicus und Astronome gewählt. Aber den letzten Wunsch Tychos zu erfüllen, vermochte Kepler in seiner Wahrheitsliebe nicht. Er war vollkommen überzeugt von der Richtigkeit des Kopernikanischen Systems, auf dessen Grund allein ein Fortschritt der Astronomie möglich war, und so sank das Tychonische Vermittlungssystem zugleich mit seinem Schöpfer ins Grab. Wie hoch aber Kepler, trotz aller vorübergehender Irrungen, seinen Meister, Tycho Brahe, zu schätzen wusste, geht aus dem

schönen Gedicht „Elegia in obitum D. Tychonis Brahe“ hervor, welches er ihm nach seinem Tode gewidmet hat. Es war dies um so begreiflicher, als auch sein eigener Ruhm mit demjenigen Tychos auf das innigste verkettet war.

Wahrlich Tycho Brahes Leben war nicht umsonst gewesen. Einundzwanzig Jahre lang hatte er Material gesammelt für eine Neubearbeitung der sog. Rudolfinischen Tafeln (von Tycho zu Ehren von Kaiser Rudolf II. so benannt), welche die veralteten und unbrauchbar gewordenen alfonsinischen und die prutenischen Tafeln (von Erasmus Reinhold im 16. Jahrhundert unter Herzog Albrecht von Preussen erstellt) ersetzen sollten. Diese Tafeln dienten dazu, den Lauf eines Planeten für jede beliebige Zeit zu berechnen. Schon Tycho hatte mit der Ausarbeitung derselben begonnen, Keplers Aufgabe war es nun, dieselben zu Ende zu führen.

Weitaus wichtiger aber als diese Berechnung war, dass auf Grund von Tychos grossartigen, mit grösster Sorgfalt und Genauigkeit ausgeführten Beobachtungen des Planeten Mars, Kepler seine berühmten, im Jahre 1609 bekannt gemachten 3 Gesetze fand, nämlich:

1. Alle Planeten bewegen sich in Ellipsen um die Sonne, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

2. Die vom Leitstrahl des Planeten in gleichen Zeiten überstrichenen Flächenräume sind einander gleich.

3. Die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer mittleren Sonnenabstände.

Durch diese Fundamentalsätze wurde die Kopernikanische Ansicht von der Einrichtung unseres Sonnensystems vervollkommnet und bewiesen, so dass seine Gegner verstummen mussten. Diese Errungenschaft war nur möglich mit Hilfe des Tychonischen Beobachtungsmaterials. Ohne dieses hätte auch ein Kepler die Rätsel der Bewegung der Himmelskörper unseres Sonnensystems nicht auflösen können; denn Keplers Augenlicht war zu schwach, als dass er alle notwendigen Beobachtungen hätte selbst anstellen können.

Es ist ein merkwürdiges Zusammentreffen, dass mit der Neugeburt der beobachtenden und wissenschaftlichen Astronomie, innerhalb eines verhältnismässig eng begrenzten Zeitraumes, die grossen Bahnbrecher sich unmittelbar aneinanderreihen. Auf Kopernikus (1473—1543) folgt Tycho Brahe (1546—1601), auf diesen und noch teilweise mit ihm zusammenwirkend, einerseits in Deutschland

Johannes Kepler (1571—1630), anderseits in Italien Galileo Galilei (1564—1642), welch letzterer durch Verbindung der Astronomie und der Physik der physischen Astronomie oder Astrophysik den Weg bahnte, und im Todesjahr Galileis (1642) erblickte in England einer der grössten Geister der Menschheit, Isaak Newton, das Licht der Welt. Dieser setzte den Schlusstein zu dem Gebäude, das seine grossen Vorgänger errichtet hatten, durch die Entdeckung des Gravitationsgesetzes, nach welchem alle Körper unseres Sonnensystems von der Sonne mit einer Kraft angezogen werden, welche ihrer Masse direkt und dem Quadrat ihrer Entfernung von der Sonne umgekehrt proportional ist. Damit waren die Ursachen der Bewegung der Himmelskörper und die treibenden Kräfte, auf welche sich keiner von Newtons Vorgängern eingelassen hatte, erklärt. Die Keplerschen Gesetze und somit das Kopernikanische System ergaben sich nun als notwendige Folge dieses Gravitationsgesetzes. Die Beobachtung und Bahnbestimmung der Doppel- und mehrfachen Sterne hat gezeigt, dass nach diesem Gesetze nicht nur dunkle Körper, Planeten um Sonnen, sondern auch Sonnen um Sonnen kreisen, so dass das Newton'sche Gravitationsgesetz nicht nur in unserm Sonnensystem gilt, sondern auch in den unermesslich weit entfernten Regionen der Fixsternwelt.

E. Kissling.

1. Meeresmolasse im Emmenthal.

(Eingereicht den 5. Dez. 1901.)

Bis dahin wurden die mächtigen Nagelfluhmassen des Napfgebiets ausschliesslich als obere Süsswassermolasse gedeutet und als solche auch auf Blatt 13 der geologischen Karte eingetragen, obschon diese Altersbestimmung einzig auf zwei weit von einander entfernte Fundpunkte (Blapbach und Huttwyl) von Land- resp. Süsswasserconchylien sich stützte und die Hauptmasse der Napfschichten als fossilleer galt.

Nachdem ich einen weit verbreiteten, fossilreichen, der oberen Süsswassermolasse angehörenden Mergel- und Sandsteinhorizont im ganzen Napfgebiet nachgewiesen, ist es mir gelungen, auch die Meeresmolasse in das Ilfisthal hinein bis in die Gegend zwischen Langnau und Trubschachen zu verfolgen. Die betreffenden Profile sind aufgeschlossen in zwei Seitengräben der Ilfis, nämlich im Golgraben und im Ilfisgraben.

1. Der Golgraben mündet von der rechten Seite her, bei der Bärau, ins Hauptthal ein. In seinem untersten Teile treffen wir, etwas nördlich von Kammershaushüsli und auf dem rechten Ufer der Gol, einen Nagelfluhabsturz an. In die oberen Nagelfluhbänke schieben sich grobkörnige Sandsteinlagen ein, die in grosser Zahl Steinkerne von **Cardium multicostatum** Brocc. enthalten.

Weiter oben im Graben, beim Weiler Vogelsang, kommt der kleinere Neumattgraben zwischen den Höfen Vorder- und Hinter-Neumatt ins Thal hinunter. Von Quote 790 an aufwärts sind hier sichtbar:

1. weiche, graue, mergelige Molasse mit einzelnen Nagelfluhbänken.
2. harte, hellgraue, grobkörnige Molasse.
3. Nagelfluh.

Die Schicht No. 2 enthält einige Geröllschnüre und zahlreiche in Reihen angeordnete Knollen von roten und gelben Mergeln. Ich sammelte:

Lamna cuspidata Ag. 12 Ex.
Fischschuppen.
Steinkern einer ? Tapes.

Die tiefsten, im Golgraben anstehenden Schichten gehören also unzweifelhaft der **Meeresmolasse** an.

Als Hangendes der marinen Schichten folgen im 250 m weiter nördlich gelegenen Federbachgraben die Schichten der **obern Süsswassermolasse.**

? Vegetation.
1. 0.27 Sandsteinbank.
2. 0.20 braune Mergel.
3. 3.20 grünl. Mergel.
4. 0.10 kohlige Mergel mit **Helix inflexa** Klein.
5. 1.50 helle, plattige Mergel mit Pflanzenresten.
6. Nagelfluhdach.

Noch weiter nördlich, im Mattenbach, nehmen die Süsswasserschichten Kohlenflözchen auf. Sie streichen unter dem Hochgrat durch und erscheinen wieder im obern Frittenbach, wo sie im Kohlerengraben, der bei Moosacker in den Hauptgraben ausläuft, sehr schön aufgeschlossen sind. Im obern Teil des Seitengrabens steht Nagelfluh an; dann folgen:

1. 0.90 m blau grauer Sandstein.
2. 0.15 graue kalkige Mergel.
3. 0.10 grünl. Mergel.
4. 0.40 blaugraue mergelige Sandsteine.
5. 3.50 grauer Sandstein.
6. 0.60 blaue Mergel mit Kohlenschmitzen.
7. 1.90 graue Mergel.
8. 0.50 bläuliche und bräunliche, sandige Mergel.
9. 0.02 Kohle.
10. 0.10 dunkle fette Mergel.
11. 0.01 Kohle.
12. 0.03 blaue Mergel.
13. 0.21 harte Sandsteinbank mit Planorben.
14. 4.00 Sandstein.

Schicht Nr. 3 und 4 enthalten:

Glandina inflata var. porrecta Gob. — häufig.
Patula euglyphoides Sandb.

Helix inflexa Klein.
Pupa Schübleri Klein.
Cyclostoma consobrinum Mayer — sehr häufig.
Melanopsis Kleini Kurr.
Carpolithes spec.

In der Schicht 10 kommen vor:

Patula euglyphoides Sandb.
Helix Leymeriana Noul. — häufig.
Pupa Schübleri Klein.
Ancylus deperditus Desm.
Planorbis declivis Sandb.

2. Der Ilfis- oder Aspigraben öffnet sich Langnau gegenüber bei Ilfis. Von Quote 800 an finden wir eine Sandstein- und Mergelzone in zahleichen Abrissen zu beiden Seiten des Bachbettes. Bemerkenswert ist eine Bank von hellgrauem, grobkörnigem Sandstein mit zahlreichen Mergelknauern. Sie enthält:

Lamna cuspidata Ag. sehr häufig.
Fischschuppen.

Darüber folgen dünnplattige, graue Sandsteine mit

Mactra triangula Ren. sehr häufig.
Tapes spec.

Die marine Molasse schliesst nach oben ab mit einer Nagelfluhbank. Ihr Hangendes wird gebildet aus blaugrauen Mergeln, in denen ein kohliges Band mit dünnen Streifen von Pechkohle sich hinzieht und die bereits der oberen Süsswassermolasse angehören. Sie streichen hinüber in den Hühnerbachgraben, wo sie Kohlenflözchen führen und Land- und Süsswasserconchylien nebst unbestimmbaren Pflanzenresten enthalten. Ich habe im Hühnerbachgraben gesammelt:

Patula cf. lunula Thomae.
Clausilia Escheri Mayer.
Pupa Schübleri Klein.
Helix inflexa Klein.
Helix Leymeriana Noulet.
Ancylus deperditus Desm.
Lymnaea dilatata Noul.
Planorbis solidus Thomae.

Die zwei mitgeteilten Profile haben einige stratigraphische Bedeutung. Bekanntlich stellt Kaufmann in seinem bathrologischen Schema der Molasse[1]) die sog. Aargauerschichten (Meeresmolasse des Bantiger, von Signau, Burgdorf etc.) in das Niveau der Oeningerschichten (Süsswassermolasse von Langnau, des Napf etc.). «Die

[1]) Beiträge zur geol. Karte der Schweiz. XXIV. 564.

letzteren sind auf Blatt XIII repräsentiert durch die an Nagelfluh sehr reichen Napfschichten. Es ist das Gebiet der Fontane, der Trub, der Gol und der beiden Frittenbäche, teilweise auch die Gebirgspartie der Hochwacht zwischen Langnau und Eggiwyl. Zur Linken der Emme, um Signau und Lauperswyl, nimmt die Nagelfluh bedeutend ab, der Sandstein zu und es stellen sich die ersten marinen Petrefakten ein.» [1]) «Im Bernbiet, gegen den Westrand der Karte, ist das Ober-Miocän nicht mehr limnisch (ob. Süsswassermolasse), sondern diese vorher limnische Schichtmasse wird in immer zahlreicher werdenden Niveaux marin (obere Meeresmolasse = Berner- und Aargauerschichten).» [2]) Gerade für einen Teil des Gebiets am Westrande der Karte (Blatt XIII) aber habe ich nachgewiesen, dass die obere Süsswassermolasse nicht in die marine Molasse übergeht, sondern dass sie von der letzteren unterteuft wird. Die Meeresmolasse des Ilfisthales hängt zusammen mit den marinen Schichten des Schwendlenbads, von Häutligen etc. Eine ausführliche Darstellung der bezüglichen Verhältnisse wird in einer späteren, grösseren Arbeit erfolgen.

2. Stachel eines Rochen aus der Meeresmolasse des Belpberges.

Reste von Rochen gehören nicht gerade zu den häufigen Vorkommnissen der bernischen Meeresmolasse. Von der bekannten Fundstelle im Marbachgraben am Belpberg z. B. kennen wir nur einige Mahlzähne von *Zygobates Studeri* Ag. und eine Hautplatte von *Trygon*. Um so erfreulicher ist ein Fund, den neulich Herr stud. med. Tièche an der genannten Lokalität machte; es betrifft dies den Stachel eines Rochen.

Der sich langsam und gleichmässig verschmälernde Stachel, an dem leider Spitze und Basis fehlen, besitzt eine Länge von 8 cm; unten ist er stark abgeplattet (Durchmesser $^{11}/_{6}$ mm), oben fast kreisrund (Durchmesser 4,5 mm).

Die Oberseite ist unregelmässig gerieft. Doch vereinigen sich die einzelnen Furchen nach und nach in ihrem Verlaufe, so dass nach der Spitze hin deren nur noch 2 vorhanden sind.

Die Unterseite des Stachels zeigt feine Längsstreifung.

[1]) Beiträge zur geol. Karte der Schweiz. XXIV. 563.

[2]) Beiträge zur geol. Karte der Schweiz. XXIV. 561.

Auf eine Länge von 6 cm. ist er beidseitig mit schwachen, nur wenig gebogenen Zähnchen besetzt. Diese nehmen in der unteren Partie des Stachels rasch an Grösse ab und verschwinden endlich vollständig.

Der Stachel besitzt am meisten Aehnlichkeit mit dem von Agassiz abgebildeten *Myliobates Owenii.*

3. Neue Fundstelle fossiler Pflanzen aus der Molasse der Bäuchlen (Entlebuch).

Auf der Westseite der Bäuchlen, zwischen Höchhofarneli und Rothenfluhspitz ist in einer Runse, die bei Vorder-Dorbach in die Hilferen mündet, folgendes Profil sichtbar:

1. Graue Molasse mit Kohlenschmitzen, die unregelmässig, wurzelartig im Gestein verlaufen.
2. 0.45 m graue, sandige Mergel.
3. 0.02 Kohlenschiefer.
4. 0.15 dunkle, kohlige Mergel.
5. 1.20 bräunl. Kalkmergel.

Ich sammelte in kurzer Zeit

aus Schicht 4: *Sabal major* Ung. Ein vollständiger Fächer mit 8 cm langem Stiel und 4 cm. langer Rhachis. Ein zweites Exemplar mit 14 cm. langen Strahlen.

aus Schicht 5: *Cinnamomum spectabile* Heer — sehr häufig.
polymorphum Br.
Unio Lavateri Münst. in schönen Schalenexemplaren.
Unio spec. nov.
Melania spec.
Flügeldecke eines Rüsselkäfers. Die Skulptur ist dieselbe wie bei **Rhina**. (*Rh. barbirostris* Fab.)

Der Fundort verdient besser ausgebeutet zu werden.

Von der Bäuchlen citiert Kaufmann eine einzige Fundstelle im Graben bei Oberlammberg[1]), von wo er erhielt:

Myrica dryandraefolia Brongn.
Salix macrophylla Heer.
Taxodium distichum Rich.

---

[1]) Beiträge zur geol. Karte der Schweiz. XXIV. 395.

4. Weitere Funde von Arctomysresten aus dem bernischen Diluvium.

Zu den 1897[1]) beschriebenen neuen Fundstellen von Arctomysüberresten aus der Umgegend von Bern (Sommerwohnung bei Stettlen, Winterwohnung im Steinibach bei Belp) können heute einige weitere hinzugefügt werden.

1. *Krauchthal.* Nordwestlich vom Dorfe erhebt sich der Mooshubel 681 m, aus fluvioglacialem Material bestehend, welches in 2 grossen Kiesgruben abgebaut wird. In der Grube auf der Südseite des Hügels wechseln Kiesbänke mehrfach ab mit Sandschichten, die von einigen wenigen Lehmbändern durchzogen sind.

An der untern Grenze einer Sandschicht von 0.5 m Mächtigkeit, aber noch im Sande, bemerkt man die Oeffnung eines Ganges von 2 m Länge und 0.20 m. Durchmesser, und 2.20 m. davon entfernt. einen zweiten, etwas höher gelegenen Gang von 1.20 m Länge.

Im ersten Gang lag ein Murmelthierskelett, von dem leider wegen der geringen Aufmerksamkeit, welche die Arbeiter in der Regel derartigen Vorkommnissen schenken, nur einige wenige Teile erhalten geblieben sind, nämlich ein paar Wirbel, Tibia und Fibula und ein Radius.

Immerhin ist der Umstand beachtenswert, dass das Skelett in einer Röhre aufgefunden wurde, die man wohl als Fluchtröhre deuten darf.

2. *Biglen.* Während des Baues der Linie Burgdorf—Thun wurde in der Riedhalde südwestlich von Biglen, am Abhange eines flachen Hügels eine Kiesgrube geöffnet. 2.50 m unter dem Kamm des Hügels und von dessen nordöstlicher Flanke circa 6 m einwärts gerechnet, stiessen die Arbeiter auf eine Höhlung, «wie etwa Kaninchen sie machen». Sie führte wagrecht in den Hügel hinein und war etwas gebogen. Darin lagen Knochen theilweise geordnet beisammen, wurden aber durch das Ausgraben stark beschädigt und gingen z. T. verloren. Durch die Vermittlung von Herrn Sekundarlehrer Gammeter in Biglen kamen die sorgfältig gesammelten Reste ins hiesige Museum. Die Knochen gehören mindestens 3 Individuen von *Arctomys Marmotta* an; es finden sich noch vor:

[1]) Kissling: Neue Funde von diluvialen Arctomysresten aus der Umgegend vor Bern. Mitteilungen d. nat. Ges. Bern 1897.

Von ausgewachsenen Exemplaren:

Ein vollständiger Schädel.
Ein rechter Oberarmknochen.
Ein rechter und ein linker Femur.
Eine linke und zwei rechte Beckenhälften.
Eine rechte Tibia.
Das Kreuzbein und eine Anzahl Wirbel.

Von einem jungen Tiere ein rechter und ein linker Femur.

In derselben Kiesgrube, 30 m von der eben genannten Stelle entfernt, wurde kürzlich ein weiterer Fund gemacht.

$2^1/_2$ m unter dem Moränenkamm gewahrte man eine aufsteigende, kleine Höhlung, die mit faustgrossen Geröllen angefüllt war. Indem man diesen Gang weiter verfolgte, stiess man auf das vollständige intakt gebliebene Skelett eines Murmeltiers, das leider bei der ersten Berührung zusammenfiel. Das Ende des 1 m 50 cm langen Ganges war wiederum mit Steinen verstopft und lag $1^1/_2$ m unter der Oberfläche, an der Grenze von Kies und der auflagernden lehmigen Grundmoräne.

Ohne Zweifel haben wir hier ein neues typisches Beispiel einer Murmeltier-Fluchtröhre in einer alten Moräne des Aargletschers vor uns.

Die mir durch Herrn Gammeter übermittelten Knochen stammen von einem sehr grossen Individuum her. Es sind vorhanden:

Der etwas defekte Schädel.
Die Schulterblätter, Oberarm- und Vorderarmknochen.
Beide Beckenhälften und Oberschenkelknochen, die linke *Tibia*.
Das Kreuzbein, zahlreiche Wirbel und Rippen.

3. *Jensberg.* Am östlichen Ende des Jensberges liegen auf den Schichtköpfen des Nord fallenden Muschelsandsteins fluvioglaciale Schotter, aufgeschlossen in einer mächtigen Kiesgrube, die sich nördl. vom Dorfe Studen, am Fusse der sog. Bergäcker befindet.

Von dort erhielt die Museumssammlung einen Schädel, den rechten Oberarmknochen, den rechten Oberschenkelknochen und die beiden Beckenhälften eines ausgewachsenen Tieres; ferner 2 rechte Oberschenkelknochen und eine Unterkieferhälfte, welche einem jungen Tiere angehörten.

4. *Heimberg.* Beim Abtrag des Waldstrassenstücks der in Ausführung begriffenen Spitalheimberg-Schnittweierstrasse fand man in einer Tiefe von 3 m in einer Sand- und Kiesschicht die obere

Schädelhälfte eines Murmeltiers. Das Stück wurde in verdankenswerter Weise von den Burgerbehörden von Thun dem hiesigen Museum übermittelt.

5. Lehmgerölle in fluvioglacialem Sand.

Bei Anlass der Erstellung eines neuen Anstaltsgebäudes für die landwirtschaftliche Schule auf der Rütti bei Zollikofen wurde ein interessantes Profil blossgelegt.

In einem Anschnitt auf der Nordseite des Neubaues waren sichtbar:

1. 0.20 m Humus.
2. 0.20 heller Sand.
3. 0.40 brauner, gebänderter, sandiger Lehm.
4. 0.20 heller Sand.
5. 0.50 brauner, gebänderter, sandiger Lehm.
6. 0.70 heller Sand. Darin Lehmbänder mit kleinen Geschieben.
7. 0.40 grober Sand mit einzelnen grösseren Geschieben.

An mehreren Geschieben aus Schicht No. 6 waren deutliche Kritzen bemerkbar, woraus der glaciale, resp. fluvioglaciale Charakter der ganzen Ablagerung unzweideutig hervorgeht.

In der Schicht No. 7 nun lagen zu Hunderten Lehmgerölle der verschiedensten Grösse und Gestalt. Die kleinsten erreichen kaum die Grösse einer Haselnuss; es giebt aber auch solche von einem Durchmesser von 15 cm. Einige sind vollkommen rund, eigentliche Lehmkugeln; andere besitzen mehr abgeplattete oder ellipsoidische Gestalt, oder sie zeigen die bekannte Geschossform mit beidseitig zugespitzten Enden. Alle bestehen aus dem gelben Lehm, wie er die Bänder der Schicht No. 6 zusammensetzt, und sind umkrustet von einer dünnen Sandschicht.

Die Bildung dieser Lehmgerölle erklärt sich ungezwungen durch die Annahme eines Wasserlaufes, welcher Stücke von Lehmbändern abgerissen, auf dem Transport gerollt und dann deponiert hat, ein Vorgang, der heute noch in gewissen Wildbachgebieten beobachtet werden kann. Im untern Teil des Sammelkanals, zum Teil auch im Schuttkegel des Lammbachs z. B. waren grosse Kugeln bis zu 30 cm. Durchmesser, aus dem blauen Verwitterungslehm der Berriasschiefer bestehend, nicht selten anzutreffen.

Für die fluvioglacialen Ablagerungen der Schweiz ist, wie ich glaube, das oben beschriebene Vorkommnis neu.

O. Spiess.

Die Grundbegriffe
der
Iterationsrechnung.

Einleitung.

Die erste mathematische Operation, die der Mensch ausführte, war die *Addition*.

Indem die Addition wiederholt auf dieselbe Grösse angewandt wurde, entstand ein neuer Begriff, die *Multiplikation*.

Die Wiederholung oder «Iteration» der Multiplikation führte weiter zur *Exponentialfunktion*, der einfachsten Transzendenten.

Von da an verliess man den Weg, durch Iteration einer bekannten Funktion zu «höheren» Funktionen aufzusteigen, indem man in der Summen- und Integralrechnung eine ergiebige Quelle zur Auffindung neuer Funktionen entdeckte. In der That, die einfache Operation des Integrierens auf einen algebraischen Ausdruck angewandt, hat die Entstehung einer ganz neuen Funktion von merkwürdigen Eigenschaften zur Folge. Indem man dieses Prinzip auf alle bekannten und die neu gefundenen Funktionen anwandte, wurde die Analysis durch eine ungeahnte Menge neuer Funktionen bevölkert.

Nun liegt aber der Gedanke nahe, auch den alten Weg von neuem zu betreten, und zu versuchen, ob nicht die *Iteration* ganz allgemein ein Mittel zur Auffindung neuer Funktionen abgeben könne. Die Untersuchung lehrt, dass diese Operation der Integration an Fruchtbarkeit völlig ebenbürtig ist.

Wenden wir nämlich eine beliebige Funktion n-mal auf sich selbst an, so stellt der erhaltene Ausdruck in seiner Abhängigkeit von n eine neue Funktion dar, die ich die *Iteralfunktion* der ursprünglichen Funktion heisse. Diese ist allerdings zunächst nur für ganzzahlige Werte von n bestimmt. Um zu für alle Werte ihres Arguments definierten Funktionen zu gelangen, bieten sich dann zwei Wege dar.

Der erste Weg ist der historische. Man geht von der nur für ganzzahliges n abgeleiteten Formel aus und sucht an Hand einer geeigneten Definition ihre Bedeutung für den Fall, dass n negativ oder gebrochen wird. Auf diese Weise erhielt man z. B. aus der ganzzahligen Potenz die Exponentialfunktion.

Die andere Methode zieht es vor, das Unendlichkleine gleich am Anfang einzuführen. Iteriert man nämlich einen Ausdruck von der Form $\xi + \delta f(\xi)$, worin δ unendlich klein ist, n mal, und lässt dann n so ins Unendliche wachsen, dass $n \cdot \delta$ endlich bleibt, so konvergiert der erhaltene Ausdruck im allgemeinen gegen eine Funktion von $n \cdot \delta = x$, welche eben die Iteralfunktion ist. So führt z. B. die Iteration von $\xi + \delta \cdot \xi$ direkt auf

$$\lim_{n = \frac{x}{\delta}} (1 + \delta)^n \cdot \xi = \xi \cdot e^x.$$

Durch diese beiden Methoden zerfällt der Iterationscalcül in zwei ziemlich selbständige Zweige. Der eine hat mehr algebraischen, der andere mehr funktionen-theoretischen Charakter.

Es ist von Nutzen, die durch Iteration gefundenen Funktionen nach ihrer Entstehung in *Stufen* verschiedener Ordnung einzuteilen. Kennen wir bereits sämtliche Funktionen der n^{ten} Stufe, so wird der Umfang der nächst höheren Stufe folgendermassen festgelegt. Zunächst bestimmen wir zu allen Funktionen n^{ter} Stufe ihre Iteralfunktionen. Wenden wir dann diese (und ihre Inversen) auf sich selbst und auf sämtliche Funktionen der unteren Stufen in endlicher Anzahl und in allen möglichen Kombinationen an, so erhalten wir eine Gesamtheit von Funktionen, die wir in Erweiterung des bekannten, für die Algebra aufgestellten Begriffs, füglich einen «*Körper*» heissen dürfen.

Dieser Körper heisst «zur $(n+1)^{ten}$ Stufe gehörig» und enthält offenbar sämtliche zu den unteren Stufen gehörigen Körper. Nehmen wir diese letzteren alle weg, so bleiben die Funktionen der $(n+1)^{ten}$ Stufe übrig.

Die bisher bekannten Funktionen gehören höchstens den 4 ersten Stufen an.

Die erste Stufe enthält nur eine einzige Funktion von einer Variablen, nämlich $f(\xi) = \xi + a$, die Addition. Ich heisse sie hier «*Protofunktion*».

Die zweite Stufe enthält zunächst die durch Anwendung von Multiplikation und Division gebildeten rationalen Funktionen, sodann

deren Inverse, die algebraischen Funktionen. Sie heissen hier zusammen *Deuterofunktionen.*

Die dritte Stufe der *Tritofunktionen* entspringt durch Iterieren der Deutero-Stufe. Dahin gehören vor allem die Abel'schen Funktionen.

Die nächst folgende *Tetra-Stufe* ist beinahe noch gar nicht untersucht. Hieher sind wohl die aus Iteration von a^{ξ} entspringende Funktion, ferner Funktionen wie $\int \frac{dx}{\log x}$, $\int e^{-x^2} dx$ etc. zu rechnen, doch existiert wohl noch kein Beweis, dass sie nicht doch noch am Ende dem Körper der Tritofunktionen angehören.

Es zeigt sich nämlich sofort eine Schwierigkeit. Gleichwie nicht jedes Integral einer algebraischen Funktion notwendig transzendent sein muss, sondern algebraisch bleiben kann, so führt auch nicht die Iteration einer jeden Funktion immer zu einer höheren Stufe. So z. B. liefert $\frac{\xi}{1+\xi}$ die Iteralfunktion $\frac{\xi}{\xi+n}$, die in Bezug auf n wiederum linear ist.

Es ist daher bei jeder Iteration zu prüfen, ob die erhaltene neue Funktion nicht etwa zur selben Stufe zurückführt. Daher ist auch gar nicht vorauszusehen, ob *Pentafunktionen* existieren oder nicht, und wir stehen so vor der interessanten Möglichkeit, dass die Mannigfaltigkeit analytischer Verhältnisse einer ähnlichen Beschränkung unterliegt, wie sie bei räumlichen Beziehungen durch den Mangel einer vierten Dimension eintritt.

Man sieht nun bald, dass die Funktionen, die wir durch Iteration erhalten können, im wesentlichen zusammenfallen mit denen, die das Integralprinzip liefert. Man findet weiter, dass der Grund dazu in einer merkwürdigen Analogie liegt, die zwischen der Summen- und Integralrechnung einerseits und dem Iterationscalcül anderseits herrscht, eine Analogie, die man füglich als *Dualismus* bezeichnen darf.

Schon äusserlich entspricht der Summenrechnung eine endliche Iterationsrechnung, dem Integrationscalcül eine infinitesimale «Iteralrechnung». Wie das Integrieren durch das Differenzieren aufgehoben wird, so steht dem Iterieren eine inverse Operation gegenüber, die ich *Revertieren* heisse. Deutlicher wird der Dualismus im Lauf dieser Arbeit hervortreten. Am klarsten tritt er bei der infinitesimalen Iteration (die hier nicht mehr behandelt werden konnte) zu

Tage. Dort lässt sich nämlich beweisen, dass die Funktion von $n \cdot \delta = x$, die man durch Iterieren von

$$\xi + \delta \cdot f(\xi)$$

in der oben geschilderten Weise erhält, genau die Inverse ist, von der Funktion, die durch Integrieren von

$$\frac{\delta x}{f(x)}$$ entsteht.

So führt z. B. die Funktion $f(\xi) = \sqrt{1 - \xi^2}$ beim ersten Verfahren auf den Sinus, beim zweiten auf den Arcussinus. Beide Rechnungsarten unterstützen und ergänzen sich also.

Die Iteration behandelt also die Fragen der Summen- und Integralrechnung von einer andern Seite. Indem die bekannten Probleme vom Standpunkt der Iteration aus neu zu beleuchten sind, eröffnet sich ein weites Arbeitsfeld. Es schien mir nun angemessen, vor der Behandlung der höheren Teile der Theorie die einfachen Begriffe und formalen Operationen der gewöhnlichen Iterationsrechnung in elementarer Weise darzulegen und an leichten Beispielen zu erläutern. Dies ist in vorliegender Arbeit geschehen. Da es sich hier vorläufig nur um die formalen Beziehungen handelt, so ist auf Schwierigkeiten, wie sie bei der wirklichen Ausführung durch Mehrdeutigkeit, Unstetigkeit etc. eintreten können, keine Rücksicht genommen. Dabei verbot der notwendige Rahmen der Arbeit auf einzelne Probleme näher einzugehen. Aus demselben Grunde musste auch die infinitesimale Iteration, die einer strengeren Behandlung bedarf, weggelassen werden.

Bevor ich beginne, will ich einige Bezeichnungen, die ich beständig brauchen werde, schon hier auseinandersetzen.

Sind $\varphi(\xi)$, $f(\xi)$ Funktionen, so bezeichne ich ihre Inversen durch einen über das Funktionszeichen gesetzten Strich, also mit $\overline{\varphi}(\xi), \overline{f}(\xi)$. Es ist also immer $f\overline{f}(\xi) = \overline{f}f(\xi) = \xi$. Ebenso, wenn n simultane, unabhängige Funktionen der n Variablen $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$ vorgelegt sind

$$y_k = f_k(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n) \qquad (k = 1, 2, \cdots n), \qquad (A)$$

so bezeichne ich die n Funktionen, die durch Auflösung dieses Systems nach den ξ entstehen, mit $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \cdots \overline{f}_n$, so dass also

$$f_1(\overline{f}_1(y_1 \cdots y_n), \overline{f}_2, \cdots \overline{f}_n) = y_1, \cdots f_k(\overline{f}_1, \cdots \overline{f}_n) = y_k \qquad \text{ist.}$$

Ein solches System von n unabhängigen Funktionen von n Variablen nenne ich kurz ein «*n-System*», und verwende für dasselbe statt der Schreibweise (A) oft auch die folgende:

$$(y_1, \cdots y_n) = (f_1 \cdots f_n)\,(\xi_1 \cdots \xi_n), \qquad \textbf{(B)}$$

wo der letzte eingeklammerte Ausdruck $(\xi_1 \cdots \xi_n)$ meist weggelassen wird. Soll in dieses System ein zweites

$$(\varphi_1 \cdots \varphi_n)\,(\xi_1 \cdots \xi_n)$$

substituiert werden, so deute ich dies durch einen dazwischen gestellten Strich | an, also in diesem Fall durch

$$(f_1 \cdots f_n)\,(\xi_1 \cdots \xi_n) \mid (\varphi_1 \cdots \varphi_n)\,(\xi_1 \cdots \xi_n)$$

oder kürzer $\qquad (f_1 \cdots f_n) \mid (\varphi_1 \cdots \varphi_n).$

Die Substitution ist so auszuführen, dass an Stelle von ξ_k im ersten System $\varphi_k(\xi_1 \cdots \xi_n)$ gesetzt wird. Das Resultat der Substitution wird geschrieben:

$$(f_1 \cdots f_n)\;(\varphi_1 \cdots \varphi_n)\,(\xi_1 \cdots \xi_n).$$

Diese Schreibweise ermöglicht, mehrfache Substitutionen von Funktionensystemen durch blosses Aneinanderreihen von Klammern auszudrücken. Die Grössen, in welche substituiert wird, bezeichne ich durchweg durch die Buchstaben ξ, η, ζ, so dass, wenn die f noch andere Variable enthalten, nie ein Zweifel über den Ort, wo substituiert werden soll, eintritt.

§ 1.

Es sei $f(\xi)$ eine Funktion von ξ. Indem wir $f(\xi)$ an Stelle von ξ setzen und dies n mal wiederholen, d. h. $f(\xi)$ iterieren, so erhalten wir einen Ausdruck, der den *Substituenten* ξ und die *Iterationsvariable n* enthält. Ich bezeichne ihn mit

$$J^n f(\xi).$$

Dieser Ausdruck, als Funktion von ξ betrachtet, heisst «*iterierte Funktion n^ter Ordnung*», als Funktion von n betrachtet aber «*Iteralfunktion*» oder kurz «*die Iterale*» von $f(\xi)$.

Beide Begriffe verhalten sich zueinander wie Potenz und Exponentialfunktion, in welche sie übergehen, wenn $f(\xi) = a \cdot \xi$ ist.

Sind allgemein ν unabhängige Funktionen $f_1, f_2, \cdots f_\nu$ der Variablen $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_\nu$ gegeben, oder kurz ein «ν-System», und setzen wir hierin wiederholt $f_k(\xi_1 \cdots \xi_\nu)$ für ξ_k ein, so erhalten wir ν Iteralfunktionen, die ich mit

$$J_1^n(f_1 \cdots f_\nu), \quad J_2^n(f_1 \cdots f_\nu), \cdots \quad J_\nu^n(f_1 \cdots f_\nu)$$

bezeichne. Die Funktionen f selbst heissen in Bezug auf ihre Iterale «*Stammfunktionen*».

Für das Iterationszeichen J gelten die Regeln

$$J_k^a(f_1 \cdots f_n) \mid J_k^b(f_1 \cdots f_n) = J_k^{a+b}(f_1 \cdots f_n) \qquad 1.$$

$$J_k^a \mid \left(J_k^b \mid J_k^c\right) = \left(J_k^a \mid J_k^b\right) \mid J_k^c. \qquad 2.$$

Es gilt also für das Iterieren wie für das Addieren das *commutative* und das *associative* Gesetz.

Zunächst ist das Symbol J^n nur für ganzzahlige Werte von n definiert. Wir können aber die Bedeutung sofort auf beliebiges n erweitern, wenn wir $J^n f(\xi)$ als diejenige Funktion von n und ξ definieren, für welche die Beziehungen 1. und 2. gelten und welche für ganzzahlige n die n^{te} Iterierte von $f(\xi)$ ist.

Nach dieser Feststellung, die für Funktionensysteme ganz entsprechend ist, ergiebt sich leicht die Bedeutung von J^n für negative und gebrochene n. Es ist nämlich

$$J^0 f(\xi) = \xi, \quad J_k^0(f_1 \cdots f_\nu) = \xi_k, \quad J_k^{-1}(f_1 \cdots f_\nu) = \bar{f}_k, \cdots J^{-n} f(\xi) = J^n \bar{f}(\xi).$$

Weiter bedeutet $J^{\frac{1}{n}} f(\xi)$ diejenige Funktion, deren n^{te} Iterierte die gegebene Funktion $f(\xi)$ ist. Speziell für $f(\xi) = \xi$ ist $J^{\frac{1}{n}}(\xi)$ eine cyclische Funktion. So ist

$$J^{\frac{1}{3}} \frac{\xi}{1+\xi} = \frac{3\xi}{\xi+3}, \qquad J^{-\frac{1}{2}}(\xi^2) = \xi^{\pm\sqrt{\frac{1}{2}}}.$$

Für die Iterale von $f(\xi)$ gilt offenbar die Relation

$$J^{n+1} f(\xi) = f[J^n f(\xi)]$$

oder, wenn wir von nun an statt n x als Iterationsvariable wählen, und dieselbe nach Obigem als beliebig reelle Grösse ansehen, — falls wir noch $J^x f(\xi) = \varphi(x)$ setzen

$$\varphi(x+1) = f\varphi(x). \qquad 3.$$

Ebenso genügt $J_k^x(f_1 \cdots f_\nu) = \varphi_k(x)$ der Relation

$$\varphi_k(x) = f_k[\varphi_1(x-1),\ \varphi_2(x-1), \cdots \varphi_\nu(x-1)], \quad (k = 1 \cdots n). \qquad 4.$$

Umgekehrt, sind $(\varphi_1 \cdots \varphi_\nu)$ Lösungen der Gleichung (4), so sind sie zugleich die Iteralfunktionen der $(f_1 \cdots f_\nu)$. Setzen wir nämlich auf den rechten Seiten von (4) für $\varphi_k(x-1)$ den Wert ein, der aus (4) folgt, wenn x—1 für x gesetzt wird, und fahren so fort, so folgt wirklich

$$\varphi_k(x) = J_k^x(f_1 \cdots f_\nu)(\xi_1 \cdots \xi_\nu) \qquad (k = 1, 2 \cdots \nu).$$

wenn die willkürlichen Grössen $\varphi_1(0), \varphi_2(0), \cdots \varphi_\nu(0)$ resp. gleich $\xi_1, \cdots \xi_\nu$ gesetzt werden. Diese letzteren kann man als Konstanten oder allgemeiner als Funktionen von x mit der Periode 1 ansehen. Da aber die letztere Annahme in den wenigsten Fällen auf die weitere Rechnung einen Einfluss übt, so können wir hier davon abstrahieren und sagen:

Satz I. Die Iteralfunktionen eines ν-Systems $(f_1 \cdots f_\nu)$ sind durch dasselbe völlig bestimmt bis auf die Anfangswerte $\varphi_1(0), \cdots \varphi_\nu(0)$. Letztere können beliebigen Konstanten gleichgesetzt werden.

Das System (4) kann übrigens auch als Differenzengleichung aufgefasst werden, woraus sich ergiebt, dass die Lösung von (4) sowohl als Problem der Summen- wie der Iterationsrechnung aufgefasst werden kann. Nun kann man aber jede beliebige Differenzengleichung auf ein simultanes System von Gleichungen erster Ordnung zurückführen. *Es kann daher jedes Problem der Summenrechnung auch als Problem der Iterationsrechnung aufgefasst werden.*

Eine Gleichung $G[\varphi(x+k), \varphi(x+k-1), \cdots \varphi(x)] = 0$ (5) wird man allerdings hauptsächlich in der Differenzenrechnung behandeln. Man kann ihr aber, dem in der Einleitung erwähnten Dualismus gemäss, eine andere Gestalt geben, in der sie speziell zu einer Aufgabe der Iterationsrechnung wird.

Wir setzen nämlich in (5) $x = \bar{\varphi}(\xi)$, wo $\bar{\varphi}$ die Inverse von φ ist. Dann wird also $\varphi\bar{\varphi}(\xi) = \xi$. Setzen wir ferner

$$\varphi(1+\bar{\varphi}\xi) = f(\xi), \tag{6}$$

so folgt sofort:

$$ff(\xi) = \varphi(1+\bar{\varphi}\varphi(1+\bar{\varphi}\xi)) = \varphi(2+\bar{\varphi}\xi).$$
$$fff(\xi) = \varphi(3+\bar{\varphi}\xi).$$

Schreiben wir noch zur Bequemlichkeit $J^k f(\xi) = f^{(k)}(\xi)$, so wird unsere Gleichung (5) transformiert in

$$G[f^{(k)}(\xi), f^{(k-1)}(\xi), \cdots f(\xi), \xi]. \tag{7}$$

Diese Gleichung stellt die *Aufgabe, aus einer Relation zwischen den verschiedenen Iterierten einer Funktion diese Funktion selbst zu finden.* Aus der Gleichung (6), die man auch schreiben kann

$$\varphi(x+1) = f\varphi(x),$$

sieht man, dass $\varphi(x)$ einfach die Iteralfunktion von $f(\xi)$ ist.

Analog können wir auch simultane Differenzengleichungen, z. B.

$$\begin{aligned} G[\varphi(x+k_1),\ \psi(x+h_1),\cdots\varphi(x),\ \psi(x)] &= 0 \\ H[\varphi(x+k_2),\ \psi(x+h_2),\cdots\varphi(x),\ \psi(x)] &= 0 \end{aligned} \tag{7a}$$

umformen. Wir setzen nämlich $\varphi(x)=\xi$, $\psi(x)=\eta$ und bestimmen zwei Funktionen $f(\xi,\eta)$, $g(\xi,\eta)$ so, dass

$$\varphi(x+1)=f[\varphi(x),\ \psi(x)], \qquad \psi(x+1)=g[\varphi(x),\ \psi(x)],$$

was, wie wir sehen werden (Satz VII), auf unendlich viele Arten möglich ist. Dann ergiebt sich offenbar wieder, dass φ, ψ die Iteralen von f und g sind, d. h. es wird

$$\varphi(x+k)=J_1^k(f,g)\,(\xi,\eta)=f^{(k)}(\xi,\eta)$$
$$\psi(x+h)=J_2^h(f,g)\,(\xi,\eta)=g^{(h)}(\xi,\eta),$$

wodurch die Gleichungen 7a eine (7) analoge Gestalt annehmen.

Ist endlich eine partielle Differenzengleichung vorgelegt

$$G[\varphi(x+k,\ y+h),\cdots\varphi(x,y)]=0, \tag{8}$$

so wählen wir eine beliebige Funktion $\psi(x,y)$, die etwa einer Gleichung genügt

$$H[\psi(x+k_0,\ y+h_0),\cdots\psi(x,y)]=0, \tag{9}$$

setzen alsdann $\varphi(x,y)=\xi$, $\psi(x,y)=\eta$, also $x=\bar{\varphi}(\xi,\eta)$, $y=\bar{\psi}(\xi,\eta)$ und bestimmen zwei Funktionen f, g, so dass

$$\varphi(1+\bar{\varphi},\ \bar{\psi})=f(\xi,\eta) \qquad \varphi(\bar{\varphi},\ 1+\bar{\psi})=f_0(\xi,\eta)$$
$$\psi(1+\bar{\varphi},\ \bar{\psi})=g(\xi,\eta) \qquad \psi(\bar{\varphi},\ 1+\bar{\psi})=g_0(\xi,\eta).$$

Dann ergiebt sich ohne weiteres

$$\varphi(2+\bar{\varphi},\ \bar{\psi})=f(f,g); \qquad f_0(f_0,\ g_0)=\varphi(\bar{\varphi},\ 2+\bar{\psi})$$
$$\psi(2+\bar{\varphi},\ \bar{\psi})=g(f,g); \qquad g_0(f_0,\ g_0)=\psi(\bar{\varphi},\ 2+\bar{\psi}).$$

Allgemein erhält man für die Iterierten von (f,g), (f_0,g_0)

$$\varphi(k+\bar{\varphi},\ \bar{\psi})=J_1^k(f,g)\,(\xi,\eta)=f^{(k)};\quad \varphi(\bar{\varphi},\ h+\bar{\psi})=J_1^h(f_0\,g_0)\,(\xi\,\eta)=f_0^{(h)}$$
$$\psi(k_0+\bar{\varphi},\ \bar{\psi})=J_2^{k_0}(f,g)(\xi,\eta)=g^{(k_0)};\quad \psi(\bar{\varphi},h_0+\bar{\psi})=J_2^{h_0}(f_0g_0)\,(\xi\eta)=g_0^{(h_0)},$$

worin natürlich k, h, k_0, h_0 ganze Zahlen bedeuten. Es wird dann z. B.

$$\varphi(k+x,\ h+y)=\varphi(k+\bar{\varphi},\ h+\bar{\psi})=f^{(k)}[f_0^{(h)}(\xi,\eta),\ g_0^{(h)}(\xi,\eta)]\ \text{etc.}$$

Setzen wir diese Werte in (8), (9) ein, so verwandeln sich diese Differenzengleichungen in Relationen zwischen den Iterierten von (f,g), $(f_0\,g_0)$, und umgekehrt kann jede solche Relation durch Einführung der Funktionen φ, ψ in eine Differenzengleichung verwandelt werden.

Alle solche Relationen zwischen Iterierten verschiedener Ordnung fasse ich unter dem Namen *Iteralgleichungen* zusammen. Das Problem,

das eine Iteralgleichung stellt, ist von hohem Interesse. Da die Lösungen eine oder mehrere willkürliche Konstanten involvieren, so sind die Funktionen f oft ganz verschiedener Natur, besitzen aber trotzdem ein und dieselbe Iteralfunktion $\varphi(x)$. Sind algebraische Lösungen vorhanden, so gehören diese meistens zu einer merkwürdigen Klasse von algebraischen Funktionen, für die ich den Namen «körpertreue Funktionen» gebrauche. Ich begnüge mich, ein einfaches Beispiel zu rechnen.

Beispiel. Die Funktion $f(\xi)$ soll aus der Gleichung

$$f f(\xi) = \frac{1}{2} f(\xi)^2 - \xi^2 \cdot f(\xi) + \frac{1}{2} \xi^4 \tag{10}$$

bestimmt werden.

Statt (10) können wir auch schreiben

$$2 f f - f^2 = \xi^2 (2 f - \xi^2), \qquad \text{woraus}$$

$$\sqrt{2 f f - f^2} = \xi \sqrt{2 f - \xi^2}.$$

Hiernach erkennt man sofort die Richtigkeit der beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{f + \sqrt{2 f f - f^2}}{2} &= \left[\frac{(\xi + \sqrt{2 f - \xi^2})}{2} \right]^2 \\ \frac{f - \sqrt{2 f f - f^2}}{2} &= \left[\frac{(\xi - \sqrt{2 f - \xi^2})}{2} \right]^2 \end{aligned} \tag{11}$$

Nimmt man beiderseits die Logarithmen, so erkennt man, dass der Ausdruck

$$\frac{\log\left(\frac{\xi + \sqrt{2 f - \xi^2}}{2}\right)}{\log\left(\frac{\xi - \sqrt{2 f - \xi^2}}{2}\right)}$$

sich nicht ändert, wenn $f(\xi)$ an die Stelle von ξ gesetzt wird. Definiert man daher $f(\xi)$ durch die Gleichung

$$\frac{\log\left(\frac{\xi + \sqrt{2 f - \xi^2}}{2}\right)}{\log\left(\frac{\xi - \sqrt{2 f - \xi^2}}{2}\right)} = \text{Const.} = C. \tag{12}$$

so ist diese Bedingung offenbar erfüllt, d. h. es gilt dann

$$\frac{\log\left(\frac{f + \sqrt{2 f f - f^2}}{2}\right)}{\log\left(\frac{f - \sqrt{2 f f - f^2}}{2}\right)} = \frac{\log\left(\frac{\xi + \sqrt{2 f - \xi^2}}{2}\right)}{\log\left(\frac{\xi - \sqrt{2 f - \xi^2}}{2}\right)}. \tag{13}$$

Wir haben dann in f eine Lösung unserer Iteralgleichung (10), sobald wir noch zeigen können, dass aus (12) rückwärts wieder (10) sich als notwendige Folge ergiebt.

Die Gleichung (12) für f wird einfacher, wenn wir die Exponenten nehmen und setzen

$$\frac{\xi-\sqrt{2f-\xi^2}}{2}=y, \text{ also } f(\xi)=(\xi-y)^2+y^2. \tag{14}$$

Es ergiebt sich dann y aus der Gleichung

$$y^C=\xi-y. \tag{15}$$

Nehmen wir $\frac{1}{C}$ statt C, so folgt $(\xi-y)^C=y$, d. h. es vertauscht sich einfach y mit $(\xi-y)$. Da aber $f(\xi)$ nach (14) in beiden symmetrisch ist, so sieht man, dass zu reciproken Werten von C dasselbe $f(\xi)$ gehört.

Für rationale Werte von C wird $f(\xi)$ algebraisch. Z. B. wird für

$C=\infty$,	$y=1$	$f(\xi)=1+(\xi-1)^2$
	$y=0$	$f(\xi)=\xi^2$
$C=1$	$y=\frac{\xi}{2}$	$f(\xi)=\frac{\xi^2}{2}$ (15a)
$C=-1$	$y=\frac{\xi\pm\sqrt{\xi^2-4}}{2}$	$f(\xi)=\xi^2-2$
$C=2$	$y=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\xi}}{2}$	$f(\xi)=\xi^2+3\xi+1\mp(\xi+1)\sqrt{1+4\xi}$

Man überzeugt sich leicht, dass diese Funktionen die Gleichung (10) befriedigen.

Es bleibt nun noch der Nachweis zu leisten, dass die Gleichung (12) oder die beiden Gleichungen (13), (15) zusammen wieder auf die Relationen (11) und somit (10) zurückführen. Aus (13) zieht man zunächst die beiden Gleichungen

$$\frac{f+\sqrt{2ff-f^2}}{2}=\left(\frac{\xi+\sqrt{2f-\xi^2}}{2}\right)^{\gamma(\xi)};$$

$$\frac{f-\sqrt{2ff-f^2}}{2}=\left(\frac{\xi-\sqrt{2f-\xi^2}}{2}\right)^{\gamma(\xi)},$$

wo $\gamma(\xi)$ konstant oder von ξ abhängig sein kann. Es ist also zu zeigen, dass $\gamma=2$ ist. Addieren wir beide Gleichungen, führen y ein und für f seinen Wert aus (14), so erhalten wir:

$$(\xi-y)^2+y^2=(\xi-y)^{\gamma'}+y^{\gamma'}. \qquad (16)$$

Diese Gleichung muss für y dieselben Werte liefern wie (15). Eliminieren wir $(\xi-y)$ mit Hilfe von (15), so resultiert:

$$y^2+y^{2C}=y^{\gamma(\xi)}+y^{\gamma(\xi)\cdot C}. \qquad (16a)$$

Diese Gleichung wird erfüllt für $y=0$, $y=1$, d. h. für $f=\xi^2$ und $f=1+(\xi-1)^2$, welches beides Lösungen von (10) sind. Schliessen wir diese Werte von y aus und setzen $y^2+y^{2C}=\psi(y)$, so folgt

$$\psi(y)=\psi\left(y^{\frac{\gamma(\xi)}{2}}\right)=\psi\left(y^{\left[\frac{\gamma(\xi)}{2}\right]^2}\right)=\ldots\ldots\psi\left(y^{\left[\frac{\gamma(\xi)}{2}\right]^{\pm\infty}}\right).$$

Diese Gleichung kann dann nur bestehen, wenn $\gamma(\xi)=2$ ist.

Bestimmen wir endlich noch die gemeinsame Iteralfunktion $\varphi(x)$ aller der $f(\xi)$. Sie ist die vollständige Lösung der, (10) entsprechenden, Differenzengleichung

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\varphi(x-1)^2-\varphi(x-2)\cdot\varphi(x-1)+\frac{1}{2}\varphi(x-2)^2.$$

Man findet ohne Mühe

$$\varphi(x)=\alpha^{2^x}+\beta^{2^x}, \qquad (17)$$

worin α, β willkürliche Konstanten bedeuten. Indem wir diese aus $\varphi(x)$, $\varphi(x+1)$, $\varphi(x+2)$ eliminieren, sodann $x=0$, $\varphi(0)=\xi$, $\varphi(1)=f(\xi)$, $\varphi(2)=ff(\xi)$ setzen, erhalten wir wieder die Gleichungen (11). Zugleich ergiebt sich

$$\frac{\log\alpha}{\log\beta}=C.$$

Alle die aus (14) und (15) folgenden Funktionen $f(\xi)$ führen also durch Iteration auf dieselbe Funktion (17), wobei nur die Werte der Konstanten α, β wechseln.

Wir kehren nun zu unserer allgemeinen Theorie zurück.

§ 2.

Die Theorie der Iteration stützt sich wesentlich auf das folgende *Fundamentaltheorem.*

Ist $F(\xi)=\varphi f\bar{\varphi}(\xi)$, so folgt $J^x F(\xi)=\varphi(J^x f)\bar{\varphi}(\xi)$,

d. h. wenn die Iterale von f bekannt ist, so ist es auch die von F. Auf Funktionen mehrerer Variablen angewandt, lautet das Princip:

Satz II.

Ist $(F_1, F_2 \dots F_n) = (\varphi_1 \dots \varphi_n)(f_1 \dots f_n)(\bar{\varphi}_1 \dots \bar{\varphi}_n)$ *und bezeichnen wir das Iteralsystem von* $(f_1 \dots f_n)$ $(\xi_1 \dots \xi_n)$ *kurz mit* $(f_1 \dots f_n)^x$, *so gilt*

$$(F_1 \dots F_n)^x = (\varphi_1 \dots \varphi_n)(f_1 \dots f_n)^x (\bar{\varphi}_1 \dots \bar{\varphi}_n).$$

Die Iteration von $(F_1 \dots F_n)$ ist dadurch auf die von $(f_1 \dots f_n)$ zurückgeführt. Der Beweis des Satzes ergiebt sich durch den blossen Anblick.

In dem einfachsten Fall, in dem $f_1 = \xi_1 + 1$, $f_2 = \xi_2, \dots f_n = \xi_n$ ist, lautet der Satz II speziell:

«Ist $F_k = \varphi_k\{1 + \bar{\varphi}_1(\xi_1 \cdots \xi_n), \bar{\varphi}_2 \cdots \bar{\varphi}_n\}$ $(k = 1, \cdots n)$.
so ist das Iteralsystem der F_k (A)

$$J_k^x(F_1 \cdots F_n) = \varphi_k\{x + \bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2 \cdots \bar{\varphi}_n\} \qquad (k = 1, \cdots n)».$$

Im Fall einer einzigen Funktion F heisst dies:

«aus $F(\xi) = \varphi(1 + \bar{\varphi}(\xi))$ folgt $J^x F(\xi) = \varphi[x + \bar{\varphi}(\xi)]$».

Der Satz II nimmt im Fall der infinitesimalen Iteration eine besonders einfache Gestalt an und hat alsdann ein duales Gegenstück in einem bekannten Satz der Integralrechnung, der im Fall einer einzigen Variablen so lautet:

«Ist das Integral von $f(\xi) \cdot d\xi$ bekannt, so ist es auch das von

$$f\varphi(\xi) \cdot d\varphi(\xi) = F(\xi) \cdot d\xi.»$$

In der That spielt dieser Satz in der Integralrechnung die gleiche Rolle wie der obige Satz II im Iterationscalcül.

Die Spezialisierung (A) führt uns nun zu einem neuen wichtigen Begriff.

Ist nämlich ein n-System gegeben $(\varphi_1 \cdots \varphi_n)(\xi_1 \cdots \xi_n)$, so bilden wir die folgenden n^2 Funktionen.

$$\begin{aligned}
&\varphi_1\{1 + \bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2 \cdots \bar{\varphi}_n\} = f_1^{(1)}, \quad \varphi_1\{\bar{\varphi}_1, 1 + \bar{\varphi}_2 \cdots \bar{\varphi}_n\} = f_1^{(2)}, \\
&\qquad\qquad \cdots \varphi_1\{\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \cdots 1 + \bar{\varphi}_n\} = f_1^{(n)} \\
&\varphi_2\{1 + \bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \cdots \bar{\varphi}_n\} = f_2^{(1)}, \quad \varphi_2\{\bar{\varphi}_1, 1 + \bar{\varphi}_2, \cdots \bar{\varphi}_n\} = f_2^{(2)}, \\
&\qquad\qquad \cdots \varphi_2\{\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \cdots 1 + \bar{\varphi}_n\} = f_2^{(n)} \qquad (21) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&{}_n\{1 + \bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \cdots \bar{\varphi}_n\} = f_n^{(1)}, \quad \varphi_n\{\varphi_1, 1 + \bar{\varphi}_2, \cdots \varphi_n\} = f_n^{(2)} \\
&\qquad\qquad \cdots \varphi_n\{\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \cdots 1 + \bar{\varphi}_n\} = f_n^{(n)}.
\end{aligned}$$

Alsdann liefert die Iteration der Systeme $(f_1^{(1)} \dots f_n^{(1)})$, $(f_1^{(2)} \dots f_n^{(2)})$ .. die n^2 neuen Funktionen

$$\varphi_k\{x+\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots \bar{\varphi}_n\}, \quad \varphi_k\{\bar{\varphi}_1, x+\bar{\varphi}_2, \dots \bar{\varphi}_n\},$$
$$\dots \varphi_k\{\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots x+\bar{\varphi}_n\} \qquad (k = 1 \dots n), \qquad (22)$$

von denen je n mit dem Index k Spezialwerte der einen Funktion von n Variablen

$$\varphi_k(x_1, x_2, \dots x_n) \qquad \text{sind.} \qquad (23)$$

Die Gleichungen (21) lehren also eine Operation, durch welche man von den gegebenen $(\varphi_1 \dots \varphi_n)(x_1 \dots x_n)$ zu neuen Funktionen f gelangt, durch deren Iteration Spezialwerte der φ wieder erzeugt werden.

Im Fall einer einzigen Funktion $\varphi(x)$ giebt es nur eine solche Funktion

$$f(\xi) = \varphi(1+\bar{\varphi}\xi), \qquad (24)$$

deren Iterale offenbar $\varphi(x+\bar{\varphi}\xi)$, also wieder $\varphi(x)$ selbst ist.

Diese Operation ist also der Iteration gerade entgegengesetzt und verhält sich zu ihr, wie das Differenzenbilden zum Summieren. Ich nenne sie daher *Reversion* und das Resultat der Reversionen nach den verschiedenen Variablen, die Funktionen f, *partielle Reverse*.

Es ist von Vorteil, hier einige Bezeichnungen einzuführen.

Ich nenne die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ eines n-Systems *homolog*, und dem entsprechend die partiellen Reverse nach derselben Variablen, also z. B.

$$f_1^{(1)} = \varphi_1(1+\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots), \quad f_2^{(1)} = \varphi_2(1+\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots) \dots$$
$$f_n^{(1)} = \varphi_n(1+\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots .)$$

homologe Reverse

und ihre Iteralfunktionen

$$\varphi_1(x+\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2 \dots) \dots . \qquad \varphi_n(x+\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2 \dots)$$

homologe Iteralfunktionen.

Dagegen sollen die Reverse ein und derselben Funktion nach den verschiedenen Variablen, als z. B.

$$f_k^{(1)} = \varphi_k(1+\bar{\varphi}_1, \varphi_2 \dots). \quad f_k^{(2)} = \varphi_k(\bar{\varphi}_1, 1+\varphi_2, \dots), \dots$$
$$f_k^{(n)} = \varphi_k(\bar{\varphi}_1, \dots 1+\bar{\varphi}_n)$$

associerte Reverse heissen.

Alle die n^2 lteralfunktionen in (22) heissen übrigens noch *partiell*, da sie sämtlich Spezialwerte der n Funktionen $(\varphi_1 \ldots \varphi_n)$ $(x_1 \ldots x_n)$ in (23) sind. Diese letztern bilden das *totale Iteralsystem* zu dem *totalen Reverssystem* (21).

Ausser den in (21) definierten Funktionen f werden wir aber auch die folgenden Ausdrücke

$\varphi_k(1+\bar{\varphi}_1, 1+\bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_3, \ldots.)$, $\varphi_k(1+\bar{\varphi}_1, 1+\bar{\varphi}_2, 1+\bar{\varphi}_3, \ldots \bar{\varphi}_n$ etc.

als partielle Reverse bezeichnen, dieselben aber von den bisher besprochenen einfachen Reversen durch das Beiwort «*gemischt*» unterscheiden. Demgemäss werden auch die Funktionen

$\varphi_k(x_1+\bar{\varphi}_1, x_2+\bar{\varphi}_2, \ldots)$, $\varphi_k(x_1+\bar{\varphi}_1, x_2+\bar{\varphi}_2, x_3+\bar{\varphi}_3, \ldots)$ etc.

gemischte Iteralfunktionen heissen.

Endlich werden wir gelegentlich auch Ausdrücke wie $\varphi(\bar{\varphi}+a)$ $\varphi_k(\bar{\varphi}_1+a, \bar{\varphi}_2+b, \ldots.)$, worin a, b Konstanten sind, als Reverse von φ in etwas allgemeinerem Sinn bezeichnen, da sie von den oben definierten nicht wesentlich verschieden sind.

Nach diesen notwendigen Feststellungen wollen wir nun die Eigenschaften unseres neuen Begriffs näher untersuchen.

§ 3.

Substituieren wir von 2 associerten Revers-Systemen

$$(f_1 \ldots f_n) = (\varphi_1 \ldots \varphi_n)\,(a+\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \ldots \bar{\varphi}_n);$$

$$(g_1 \ldots g_n) = (\varphi_1 \ldots \varphi_n)\,(\bar{\varphi}_1, b+\bar{\varphi}_2, \ldots \bar{\varphi}_n)$$

das erste in das zweite, oder das zweite in das erste, so ist das Resultat beidemal dasselbe, nämlich

$$(\varphi_1 \ldots \varphi_n)\,(a+\bar{\varphi}_1,\ b+\bar{\varphi}_2, \ldots \bar{\varphi}_n).$$

Zwei Funktionen oder Funktionensysteme, die bei der Substitution ineinander das commutative Gesetz befolgen, heisse ich *commutativ*. Da nun also

$$f_k(g_1, \ldots g_n) = g_k(f_1 \ldots f_n) \qquad (k = 1, \ldots n), \tag{25}$$

so haben wir den

Satz III. Associerte partielle Revers-Systeme sind commutativ.

Dieser Satz entspricht dualistisch der bekannten Relation

$$\Delta_\xi \Delta_\eta F(\xi, \eta) = \Delta_\eta \Delta_\xi F(\xi, \eta).$$

Es gilt nun aber auch der umgekehrte Satz, nämlich

Satz IV. *Sind zwei n-Systeme* $(f_1 \dots f_n)$, $(g_1 \dots g_n)$ *kommutativ, so sind sie associerte, partielle Reverse eines und desselben Funktionensystems* $(\varphi_1 \dots \varphi_n)(x_1 \dots x_n)$.

Beweis. Sind die beiden Systeme commutativ, so gilt

$$(f_1 \dots f_n)\,(g_1 \dots g_n) = (g_1 \dots g_n)\,(f_1 \dots f_n).$$

Substituieren wir beide Seiten in $(f_1 \dots f_n)$ und bezeichnen allgemein ein n-fach iteriertes System mit $(f_1 \dots f_n)^n$, so folgt successive

$$(f_1 \dots f_n)^2\,(g_1 \dots g_n) = (f_1 \dots f_n)\,(g_1 \dots g_n)\,(f_1 \dots f_n) = (g_1 \dots g_n)\,(f_1 \dots f_n)^2$$
$$(f_1 \dots f_n)^3\,(g_1 \dots g_n) = (g_1 \dots g_n)\,(f_1 \dots f_n)^3$$

Allgemein haben wir für zwei ganze Zahlen x_1, x_2

$$(f_1 \dots f_n)^{x_1}\,(g_1 \dots g_n)^{x_2} = (g_1 \dots g_n)^{x_2}\,(f_1 \dots f_n)^{x_1}. \qquad (26)$$

Bezeichnen wir diese n Funktionen von x_1, x_2 und den ξ mit

$$\Phi_1(x_1, x_2; \xi_1 \dots \xi_n), \quad \Phi_2(x_1, x_2; \xi_1 \dots \xi_n), \dots \Phi_n(x_1, x_2; \xi_1 \dots \xi_n).$$

so gelten offenbar die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}(\Phi_1 \dots \Phi_n)\,(x_1+1, x_2; \xi_1 \dots \xi_n) &= (f_1 \dots f_n)\,(\Phi_1 \dots \Phi_n)(x_1, x_2; \xi_1 \dots \xi_n)\\ (\Phi_1 \dots \Phi_n)\,(x_1, x_2+1; \xi_1 \dots \xi_n) &= (g_1 \dots g_n)\,(\Phi_1 \dots \Phi_n)\,(x_1, x_2; \xi_1 \dots \xi_n).\end{aligned} \qquad (27)$$

Setzen wir nun für $\xi_1 \dots \xi_n$ willkürliche Funktionen von $n-2$ neuen Grössen $x_3, x_4, \dots x_n$, so gehen die Funktionen Φ über in Funktionen $(\varphi_1 \dots \varphi_n)$ der n Grössen $x_1, x_2, \dots x_n$ und die beiden obigen Gleichungen werden zu den folgenden:

$$(\varphi_1 \dots \varphi_n)\,(x_1+1, x_2, \dots x_n) = (f_1 \dots f_n)\,(\varphi_1 \dots \varphi_n)\,(x_1 \dots x_n)$$
$$(\varphi_1 \dots \varphi_n)\,(x_1, x_2+1, \dots x_n) = (g_1 \dots g_n)\,(\varphi_1 \dots \varphi_n)\,(x_1 \dots x_n).$$

Bei der Wahl der genannten willkürlichen Funktionen hat man nur darauf zu achten, dass die $\varphi_1 \dots \varphi_n$ von einander unabhängig werden, d. h., dass ihre Funktionaldeterminante nicht verschwindet. Dann kann man nämlich das System $(\varphi_1 \dots \varphi_n)\,(x_1 \dots x_n)$ umkehren und setzen:

$$x_1 = \bar{\varphi}_1(\xi_1 \dots \xi_n), \quad x_2 = \bar{\varphi}_2(\xi_1 \dots \xi_n), \dots \quad x_n = \bar{\varphi}_n(\xi_1 \dots \xi_n),$$

wodurch wir die Funktionen f und g in der That als partielle Reverse der φ dargestellt erhalten. Zugleich sieht man, dass infolge der Willkürlichkeit der in (27) eingeführten Funktionen von $x_3 \dots x_n$ unendlich viele solcher Funktionen φ existieren, sobald $n > 2$.

Satz V. *Sind n n-Systeme* $(f_1^{(1)} \dots f_n^{(1)}), (f_1^{(2)} \dots f_n^{(2)}), \dots (f_1^{(n)} \dots f_n^{(n)})$ *gegeben, von denen je zwei zueinander kommutativ sind, so bilden die* n^2 *Funktionen f ein totales Revers-System, d. h. es lässt sich dann ein bis auf n willkürliche Konstanten völlig bestimmtes System* $(\varphi_1 \dots \varphi_n)$ $(x_1 \dots x_n)$ *finden, für welches die Gleichungen (21) gelten.*

Beweis. Wir bestimmen zunächst die n partiellen Iteralsysteme

$$(f'_1 \dots f'_n)^{x_1}, \quad (f_1^{(2)} \dots f_n^{(2)})^{x_2}, \dots \dots \quad (f_1^{(n)} \dots f_n^{(n)})^{x_n}.$$

Bilden wir von diesen n Systemen das Substitutionsprodukt, so ist dieses nach der Annahme wenigstens für ganzzahlige $x_1 \dots x_n$ von der Reihenfolge der Faktoren unabhängig und stellt also ein ganz bestimmtes System von n Funktionen der n Variablen $x_1 \dots x_n$ vor, das wir schreiben

$$(\varphi_1 \dots \varphi_n)\,(x_1 \dots x_n) = (f'_1 \dots f'_n)^{x_1}\,(f_1^{(2)} \dots f_n^{(2)})^{x_2} \dots (f_1^{(n)} \dots f_n^{(n)})^{x_n}. \quad (28)$$

Diese Funktionen enthalten noch die Substituenten $\xi_1 \dots \xi_n$, welche als willkürliche Konstanten betrachtet werden können. Da allgemein $(f_1 \dots f_n)^0 = (\xi_1 \dots \xi_n)$ ist, so sieht man sofort, dass

$$(\varphi_1 \dots \varphi_n)\,(0, 0, \dots 0) = (\xi_1 \dots \xi_n) \text{ wird, d. h.}$$

$$\xi_1 = \varphi_1(0 \dots 0), \quad \xi_2 = \varphi_2(0, \dots 0), \dots \quad \xi_n = \varphi_n(0, \dots 0). \quad (29)$$

Es bleiben also die Anfangswerte der Funktionen φ beliebig.

Aus der Formel (28) zieht man noch die beiden folgenden

$$(\varphi_1 \dots \varphi_n)\,(x_1\, 0 \dots 0) = (f'_1 \dots f'_n)^{x_1};$$

$$\dots (\varphi_1 \dots \varphi_n)\,(0 \dots 0\, x_n) = (f_1^{(n)} \dots f_n^{(n)})^{x_n} \quad (30)$$

$$(\varphi_1 \dots \varphi_n)\,(x_1 x_2 \dots x_n)$$

$$= (\varphi_1 \dots \varphi_n)\,(x_1 \dots 0_n) \mid (\varphi_1 \dots \varphi_n)\,(0\, x_2 \dots 0) \dots \mid (\varphi_1 \dots \varphi_n)(0 \dots x_n). \quad (31)$$

Es ist also das totale Iteralsystem das Substitutionsprodukt der n associerten partiellen Iteralsysteme.

Satz VI. *Zu jedem n-System* $(f_1 \dots f_n)$ *können (falls* $n > 1$*) unendlich viele Systeme* $(\varphi_1 \dots \varphi_n)$ *so bestimmt werden, dass* $f_1, f_2, \dots f_n$ *homologe partielle Reverse eines jeden sind.*

Beweis. Bezeichnen wir für den Augenblick das Iteralsystem der $(f_1 \ldots f_n)$ mit $(\Phi_1 \ldots \Phi_n)(x_1; \xi_1 \ldots \xi_n)$, so gilt

$$(\Phi_1 \ldots \Phi_n)(x_1 + 1; \xi_1 \ldots \xi_n) = (f_1 \ldots f_n)(\Phi_1 \ldots \Phi_n)(x_1; \xi_1 \ldots \xi_n).$$

Setzen wir hierin für $\xi_1 \ldots \xi_n$ beliebige Funktionen der neuen Variablen $x_2 \ldots x_n$ ein und bezeichnen die so transformierten $(\Phi_1 \ldots \Phi_n)$ mit

$$(\varphi_1 \ldots \varphi_n)(x_1 \ldots x_n),$$

so geht das obige Gleichungssystem über in

$$(\varphi_1 \ldots \varphi_n)(x_1 + 1, x_2 \ldots x_n) = (f_1 \ldots f_n)(\varphi_1 \ldots \varphi_n)(x_1 \ldots x_n),$$

womit der Satz bewiesen ist. — Der Nutzen dieses Satzes ergiebt sich aus folgender Bemerkung. Bilden wir nämlich von den so gefundenen Funktionen φ die Reverse nach den Variablen $x_2, \ldots x_n$, so erhalten wir nach Satz III lauter zu $(f_1 \ldots f_n)$ kommutative Systeme. Das giebt das

Corollar: Zu jedem gegebenen n-System $(f_1 \ldots f_n)$ kann, falls $n > 1$ ist, eine unendliche Anzahl kommutativer Systeme $(g_1 \ldots g_n)$ gefunden werden.

Wir wollen nach dieser Methode ein *Beispiel* rechnen, indem wir die *Aufgabe* lösen, *zu den beiden linearen Funktionen*

$$f_1 = a\xi + b\eta \qquad f_2 = c\xi + d\eta \tag{32}$$

die allgemeine Form der zu ihnen kommutativen Funktionen g_1, g_2 zu bestimmen.

Wir suchen Grössen λ, μ, ω der Art, dass die Gleichung besteht

$$\lambda f_1 + \mu f_2 = \omega(\lambda\xi + \mu\eta)$$

und zwar findet man leicht

$$\lambda = c, \quad \mu = \omega - a; \quad \omega^2 - (a + d)\omega + (ad - bc) = 0.$$

Nehmen wir die beiden Werte ω_1, ω_2 von ω für verschieden an, bezeichnen wir ferner die partiellen Iteralfunktionen von f_1, f_2 mit $\Phi(x)$, $\Psi(x)$, so hat man die Beziehungen

$$\begin{aligned} c\Phi(x) + (\omega_1 - a)\Psi(x) &= \omega_1^x (c\xi + (\omega_1 - a)\eta) \\ c\Phi(x) + (\omega_2 - a)\Psi(x) &= \omega_2^x (c\xi + (\omega_2 - a)\eta). \end{aligned} \tag{33}$$

Wir setzen nun für ξ, η willkürliche Funktionen einer neuen Variablen y ein, setzen also etwa

$$c\xi+(\omega_1-a)\eta=P(y), \qquad c\xi+(\omega_2-a)\eta=Q(y)$$

und schreiben für Φ, Ψ jetzt $\varphi(x,y)$ und $\psi(x,y)$, so gilt:

$$\begin{aligned} c\varphi(x,y)+(\omega_1-a)\psi(x,y)&=\omega_1^x\cdot P(y)\\ c\varphi(x,y)+(\omega_2-a)\psi(x,y)&=\omega_2^x Q(y). \end{aligned} \tag{34}$$

Wir berechnen nun die Ausdrücke

$$g_1=\varphi(\bar{\varphi},\,1+\bar{\psi}) \qquad g_2=\psi(\bar{\varphi},\,1+\bar{\psi}), \tag{35}$$

welches die gesuchten Funktionen sind. Zunächst bemerken wir durch Elimination von x aus (33), dass der Ausdruck

$$C(\varphi,\psi)=\frac{[c\varphi(x,y)+(\omega_1-a)\psi(x,y)]^{\frac{1}{\log\omega_1}}}{[c\varphi(x,y)+(\omega_2-a)\psi(x,y)]^{\frac{1}{\log\omega_2}}}$$

bloss Funktion von y ist, so dass wir umgekehrt y gleich einer willkürlichen Funktion $\Omega(C(\varphi,\psi))$ setzen können. Aus (34) ziehen wir dann

$$\begin{aligned} &c\psi(x,y+1)+(\omega_1-a)\psi(x,y+1)\\ &\quad=\omega_1^x Py\cdot\frac{P(y+1)}{Py}=\{c\psi(x,y)+(\omega_1-a)\psi(x,y)\}\frac{P(y+1)}{Py}. \end{aligned}$$

Setzen wir in dieser und der analogen Gleichung für $\omega_2 Fy$, $G(y)$ an Stelle von $\frac{P(y+1)}{P(y)}$, $\frac{Q(y+1)}{Q(y)}$, machen wir ferner

$$x=\bar{\varphi}(\xi,\eta), \qquad y=\Omega C(\xi,\eta)=\bar{\psi}(\xi,\eta)$$

und bedenken die Gleichungen (35), so erhalten wir

$$\begin{aligned} cg_1+(\omega_1-a)g_2&=\{c\xi+(\omega_1-a)\eta\}F(\bar{\psi})\\ cg_1+(\omega_2-a)g_2&=\{c\xi+(\omega_2-a)\eta\}G(\bar{\psi}). \end{aligned}$$

Berechnen wir hieraus g_1, g_2, und schreiben für $\frac{F\Omega(t)}{c(\omega_2-\omega_1)}$, $\frac{G\Omega(t)}{c(\omega_2-\omega_1)}$ wieder $F(t)$, $G(t)$, so erhalten wir endlich:

$$\begin{aligned} g_1(\xi,\eta)&=(\omega_2-a)\{c\xi+(\omega_1-a)\eta\}FC(\xi\eta)\\ &\quad-(\omega_1-a)\{c\xi+(\omega_2-a)\eta\}GC(\xi\eta)\\ g_2(\xi,\eta)&=-c\{c\xi+(\omega_1-a)\eta\}FC(\xi_1\eta)\\ &\quad+c\{c\xi+(\omega_2-a)\eta\}GC(\xi\eta), \end{aligned} \tag{36}$$

worin $C(\xi,\eta)=\frac{[c\xi+(\omega_1-a)\eta]^{\frac{1}{\log\omega_1}}}{[c\xi+(\omega_2-a)\eta]^{\frac{1}{\log\omega_2}}}$ bedeutet.

F, G sind völlig willkürliche Funktionen. Die Formeln (36) enthalten die vollständige Lösung unserer Aufgabe für den Fall ungleicher Wurzeln ω.

Die Funktionen f_1, f_2, g_1, g_2, bilden zusammen ein totales Reverssystem, das die totalen Iteralen $\varphi(xy)$, $\psi(xy)$ hat.

Setzt man für F, G beliebige Konstanten A, B, so erhält man eine partikulare Lösung des Problems, aus der man also die allgemeine findet, indem man die Konstanten durch willkürliche Funktionen des Ausdrucks $C(\xi, \eta,)$ ersetzt. Diese Funktion $C(\xi\eta)$ hat die Eigenschaft, sich nicht zu ändern, wenn man an Stelle von ξ, η resp. $f_1(\xi\eta)$. $f_2(\xi\eta)$ setzt. Da sie demnach für alle Iterierten von (f_1, f_2) sich gleich bleibt, nenne ich sie eine *Coiterante* von (f_1, f_2).

Solche Coiteranten gibt es zu jedem System $(f_1 \cdots f_n)$. Man kann sie in der angegebenen Weise erhalten, indem man aus je zwei Iteralfunktionen die Iterationsvariable eliminiert. Sie spielen in dem Problem, die kommutativen Funktionen zu finden, eine Hauptrolle, indem sie dazu dienen, aus partikularen Lösungen mit willkürlichen Konstanten allgemeinere Lösungen herzustellen.

Zum Schluss dieses Paragraphen folge noch eine Bemerkung zur Theorie der Reverse. Es gelte nämlich zwischen den Funktionen $(f_1 \cdots f_n)$ eines n-Systems und den n Funktionen $\varphi_1 \cdots \varphi_n$ der r Variablen $x_1 \cdots x_r$ ein Gleichungssystem der Form

$$(\varphi_1 \ldots \varphi_n)(x_1 + 1, x_2, \ldots x_r) = (f_1 \ldots f_n)(\varphi_1 \ldots \varphi_n)(x_1 \ldots x_r) \quad (37)$$

Ist nun $r = n$, so sind, wie wir gesehen haben, $f_1 \cdots f_n$ durch diese Gleichungen als partielle Reverse der $\varphi_1 \cdots \varphi_n$ eindeutig bestimmt und können durch Einführung der Inversen der φ aus diesen leicht dargestellt werden.

Ist aber $r < n$, so sind die $\varphi_1 \cdots \varphi_n$ nicht von einander unabhängig, es existieren vielmehr $n - r$ Relationen zwischen ihnen. die wir etwa schreiben können

$$\varphi_1 = G_1(\varphi_1 \ldots \varphi_n), \quad \varphi_2 = G_2(\varphi_1 \ldots \varphi_n), \ldots \varphi_{n-r} = G_{n-r}(\varphi_1 \ldots \varphi_n).$$

Führen wir diese Ausdrücke für $\varphi_1 \cdots \varphi_{n-r}$ in die rechte Seite von (37) ein, so nimmt dieselbe die Gestalt an

$$(f'_1 \ldots f'_n)(\varphi_1 \ldots \varphi_n)(x_1 \ldots x_r).$$

Die Gleichung (37) bleibt also bestehen, wenn wir die f' durch die f ersetzen, d. h. es gilt der Satz:

Satz VII. Besteht ein Gleichungssystem der Form (36), worin die φ gegebene Funktionen von weniger Variablen, als ihre Anzahl beträgt, sind, so giebt es im Allgemeinen noch unendlich viele Funktionen $f'_1 \cdots f'_n$, die für $f_1 \cdots f_n$ eingesetzt, das Gleichungssystem befriedigen.

§ 4.

Mit den Reversen sind gewisse andere Funktionen von 2 n Variablen $\xi_1 \cdots \xi_n \; \eta_1 \cdots \eta_n$ nahe verwandt, die wir durch folgende Gleichungen definieren

$$\varphi\,(\bar{\varphi}\,(\xi) + \bar{\varphi}\,(\eta)) = \lambda\,(\xi, \eta) \tag{38}$$

$$\varphi_k\{\bar{\varphi}_1(\xi_1 \ldots \xi_n) + \bar{\varphi}_1(\eta_1 \ldots \eta_n);\ \ldots \bar{\varphi}_n(\xi_1 \ldots \xi_n) + \bar{\varphi}_n(\eta_1 \ldots \eta_n)\}$$
$$= \lambda_k \begin{Bmatrix} \xi_1, & \xi_2, \ldots \xi_n \\ \eta_1, & \eta_2, \ldots \eta_n \end{Bmatrix} \quad (k = 1 \ldots n) \tag{39}$$

Es folgen hieraus sofort die andern

$$\varphi(x+y) = \lambda(\varphi(x),\ \varphi(y)). \tag{40}$$

$$\varphi_k\{x_1 + y_1,\ x_2 + y_2, \ldots x_n + y_n\}$$
$$= \lambda_k \begin{Bmatrix} \varphi_1(x_1 \ldots x_n), \ldots \varphi_n(x_1 \ldots x_n) \\ \varphi_1(y_1 \ldots y_n), \ldots \varphi_n(y_1 \ldots y_n) \end{Bmatrix} \quad (k = 1 \ldots n). \tag{41}$$

Den Inhalt solcher Gleichungen nennt man bekanntlich ein *Additionstheorem*. Die Funktionen λ, λ_k, welche n Paare von Funktionen gewissermassen zu n Funktionen derselben Art (mit neuen Argumenten) zusammenbinden, heisse ich *Liganten*.

Die Liganten, nur als Funktionen der ξ betrachtet, sind partielle Reverse in weiterem Sinne, und als solche für jedes n-System völlig bestimmt. Wir haben so den Satz:

Satz VIII. Zu jedem n-System gehört ein bestimmtes Ligantensystem. Die ligierten Funktionen $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ sind die Iteralfunktionen ihrer Liganten.

Trotz der Analogie mit den Reversen spielen doch die Liganten eine besondere Rolle. Ein Revers kann z. B. algebraisch sein, während es die zugehörige Ligante nicht ist. So ist der Revers von b^{a^x} gleich ξ^a, hingegen die Ligante $e^{\log \xi \cdot \log \eta}$. Es kann daher eine Funktion Iterale einer algebraischen Funktion sein und doch kein algebraisches Additionstheorem besitzen.

Die Liganten zeichnen sich durch gewisse Eigenschaften aus, auf denen ihre Wichtigkeit beruht.

I. Setzen wir in (41) $y_1 = y_2 = \cdots y_n = 0$.

$$\varphi_1(0, \ldots 0) = \omega_1 \ldots \varphi_n(0, \ldots 0) = \omega_n$$
$$\varphi_1(x_1 \ldots x_n) = \xi_1 \ldots \varphi_n(x_1 \ldots x_n) = \xi_n,$$

so erhalten wir

$$\xi_k = \lambda_k \left| \begin{matrix} \xi_1 \cdots \xi_n \\ \omega_1 \ldots \omega_n \end{matrix} \right| \qquad (k = 1 \ldots n),$$

d. h. es giebt immer n von den ξ unabhängige Konstanten, $\omega_1 \ldots \omega_n$, welche, in $\lambda_k \left| \begin{matrix} \xi_1 \cdots \xi_n \\ \eta_1 \cdots \eta_n \end{matrix} \right|$ für $\eta_1 \ldots \eta_n$ eingesetzt, $\lambda_k = \xi_k$ machen.

II. Aus dem Anblick von (38), (39) ergiebt sich sofort

$$\lambda_k \left| \begin{matrix} \xi_1 \cdots \xi_n \\ \eta_1 \cdots \eta_n \end{matrix} \right| = \lambda_k \left| \begin{matrix} \eta_1 \cdots \eta_n \\ \xi_1 \cdots \xi_n \end{matrix} \right|.$$

III. Substituieren wir das System $(\lambda_1 \ldots \lambda_n) \begin{pmatrix} \xi_1 \cdots \xi_n \\ y_1 \ldots y_n \end{pmatrix}$ in das andere $(\lambda_1 \ldots \lambda_n) \begin{pmatrix} \xi_1 \cdots \xi_n \\ \eta_1 \cdots \eta_n \end{pmatrix}$ an Stelle der $\xi_1 \ldots \xi_n$, so resultiert

$$(\varphi_1 \cdots \varphi_n) \left| \bar{\varphi}_1 (\xi_1 \cdots \xi_n) + \bar{\varphi}_1 (\eta_1 \cdots \eta_n) + \bar{\varphi}_1 (y_1 \cdots y_n); \ldots \right|$$

d. h. ein in den 3 Wertsystemen $(\xi_1 \ldots \xi_n)$, $(\eta_1 \ldots \eta_n)$, $(y_1 \ldots y_n)$ symmetrisches Funktionsystem.

Infolge der obigen drei Eigenschaften ist es möglich, für die Liganten die folgende, handlichere Schreibweise einzuführen. Ich setze nämlich

$$\lambda_k \left| \begin{matrix} \xi_1 \cdots \xi_n \\ \eta_1 \cdots \eta_n \end{matrix} \right| = (\xi_1 \ldots \xi_n) \frown_k (\eta_1 \ldots \eta_n) \qquad (k = 1 \ldots n)$$

und fasse diese n Gleichungen in die eine symbolische zusammen:

$$(\lambda_1 \ldots \lambda_n) \left| \begin{matrix} \xi_1 \cdots \xi_n \\ \eta_1 \cdots \eta_n \end{matrix} \right| = (\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n).$$

Wenn also das Ligantenzeichen $\frown$ keinen Index hat, bedeutet es das ganze System. Die Relationen I, II, III lassen sich dann so darstellen.

I. $(\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (\omega_1 \ldots \omega_n) = (\xi_1 \ldots \xi_n)$.

II. $(\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n) = (\eta_1 \ldots \eta_n) \frown (\xi_1 \ldots \xi_n)$.

III. $$[(\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (y_1 \ldots y_n)] \frown (\eta_1 \ldots \eta_n) \qquad (42)$$
$$= (\xi_1 \ldots \xi_n) \frown [(y_1 \ldots y_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n)]$$
$$= (\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n) \frown (y_1 \ldots y_n).$$

Man sieht, dass man mit dem Zeichen $\frown$ gerade so operiert, wie mit dem Zeichen $+$ der Addition, die ja auch eine Ligante ist.

Die genannten drei Eigenschaften sind nun aber für die Liganten definitorisch und darin liegt auch ihre Wichtigkeit. Es gilt nämlich der folgende Satz:

Satz IX. *Alle Funktionen oder Funktionensysteme von 2 n Variablen, denen die Eigenschaften I, II, III zukommen, sind Liganten eines Systems von n Funktionen mit n Variablen.*

Beweis: Genügt das System $(\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n)$ den Gleichungen I, II, III, so findet man zunächst mit Hilfe von II, III

$$\mathfrak{J}^2(\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n) = (\xi_1 \ldots \xi_n) \frown \{(\eta_1 \ldots \eta_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n)\}$$
$$\mathfrak{J}^3(\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n)$$
$$= (\xi_1 \ldots \xi_n) \frown \{(\eta_1 \ldots \eta_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n)\}.$$

Bezeichnen wir allgemein den Ausdruck

$(\eta_1 \ldots \eta_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n) \frown \ldots \frown (\eta_1 \ldots \eta_n)$, worin $(\eta_1 \ldots \eta_n)$ k mal vorkommt, mit $(\eta_1 \ldots \eta_n)^{\frown k}$, so findet man für das Iteralsystem von $(\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n)$ den Ausdruck

$$\mathfrak{J}^x(\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n) = (\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n)^{\frown x}. \qquad (43)$$

Für $x = 0$ ergiebt sich daraus mit Hilfe von I die Bedeutung des Symbols $(\eta_1 \ldots \eta_n)^{\frown 0}$, nämlich

$$(\eta_1 \ldots \eta_n)^{\frown 0} = (\omega_1 \ldots \omega_n). \qquad (44)$$

Setzen wir nun in (43) $\xi_1 = \omega_1$, $\xi_2 = \omega_2, \ldots \xi_n = \omega_n$, so dass also $\mathfrak{J}^0 = (\omega_1 \ldots \omega_n)$, $\mathfrak{J}^1 = (\eta_1 \ldots \eta_n)$ wird. setzen dann für $(\eta_1 \ldots \eta_n)$ der Reihe nach die Wertsysteme

$$(\eta'_1 \dots \eta'_n), \quad (\eta_1^{(2)}, \dots \eta_n^{(2)}), \dots (\eta_1^{(n)} \dots \eta_n^{(n)})$$

ein und für x entsprechend $x_1, x_2, \dots x_n$, verbinden endlich die so erhaltenen n Iteralsysteme durch das Zeichen $\frown$, so ist das Resultat offenbar das n-System

$$(\eta_1 \dots \varphi_n)\ (x_1 \dots x_n)$$
$$= (\eta'_1 \dots \eta'_n)^{x_1} \frown (\eta_1^{(2)} \dots \eta_n^{(2)})^{x_2} \frown \dots (\eta_1^{(n)} \dots \eta_n^{(n)})^{x_n}. \qquad (45)$$

Setzt man hierin $x_k + y_k$ an Stelle von x_k, und ordnet die Glieder rechts passend um, was wegen II, III möglich ist, so erhält man sofort die Formel

$$(\varphi_1 \dots \varphi_n)\ (x_1 + y_1, \dots x_n + y_n)$$
$$= (\varphi_1 \dots \varphi_n)\ (x_1 \dots x_n) \frown (\varphi_1 \dots \varphi_n)\ (y_1 \dots y_n), \qquad (46)$$

welche von (41) nur durch die Schreibweise verschieden ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Eine genauere Betrachtung zeigt übrigens, dass die Relationen I, II, schon in der dritten enthalten sind, so dass also die Eigenschaft III allein zur Definition der Liganten ausreicht.

Für $n = 1$ hat Abel zuerst den obigen Satz (aus der Annahme III) auf anderm Wege hergeleitet.

Bedenkt man, dass aus (45) folgt

$$(\varphi_1 \cdots \varphi_n)\ (x_1\, 0 \cdots 0) = (\eta'_1 \cdots \eta'_n)^{x_1} \quad \text{etc.},$$

so sieht man, dass sich (45) auch in der Form schreiben lässt:

$$(\varphi_1 \cdots \varphi_n)\ (x_1 \cdots x_n)$$
$$= (\varphi_1 \cdots \varphi_n)\ (x_1 \cdots 0) \frown (\varphi_1 \cdots \varphi_n)\ (0\, x_2 \cdots 0) \frown \cdots \frown (\varphi_1 \cdots \varphi_n)\ (0 \cdots x_n), \qquad (47)$$

d. h. in Worten:

Satz X. Alle Funktionen eines n-Systems lassen sich mit Hilfe der Liganten durch die n^2 Funktionen $(\varphi_1 \cdots \varphi_n)$ $(x_1\, 0 \cdots 0)$ etc. von je nur einer Variablen ausdrücken.

Sind die Liganten algebraisch, so ist also auch diese Zurückführung algebraisch ausführbar. Den Satz X hat zuerst *Jacobi* am Beispiel der Abelschen Funktionen nachgewiesen.

Wir sind zu dem Begriff einer Ligante gelangt durch die Aufgabe, die Funktion einer Summe durch die Funktionen der einzelnen Sum-

manden auszudrücken. Diesem Problem steht offenbar dual das andere gegenüber, eine Summe von Funktionswerten durch einen einzigen Funktionswert darzustellen. Es ist bekannt, dass auch dieses Problem durch dieselben Liganten gelöst wird, und in diesem Umstand tritt der in der Einleitung erwähnte Dualismus besonders stark ans Licht.

Nimmt man nämlich auf beiden Seiten der Gleichungen (45) die Inversen $(\overline{\varphi}_1 \cdots \overline{\varphi}_n)$ und setzt $x_k = \overline{\varphi}_k(\xi_1 \cdots \xi_n)$, $y_k = \overline{\varphi}_k(\eta_1 \cdots \eta_n)$, so erhält man die gesuchte Darstellung

$$\overline{\varphi}_k(\xi_1 \cdots \xi_n) + \overline{\varphi}_k(\eta_1 \cdots \eta_n) = \overline{\varphi}_k(\lambda_1, \cdots \lambda_n) \qquad (k = 1 \cdots n),$$

worin der Kürze halber $(\lambda_1 \cdots \lambda_n) = (\xi_1 \cdots \xi_n) \frown (\eta_1 \cdots \eta_n)$ gesetzt ist.

Die Wichtigkeit der Liganten beruht nun zum grossen Teil darin, dass sie sich leichter iterieren lassen als andere, oft scheinbar einfachere Funktionen; wenigstens gilt dies von den bisher allein in Betracht gezogenen algebraischen Liganten. Da man durch ihre Iteration direkt die ligierten Funktionen erhält, wie dies bereits *Abel* bei den elliptischen Funktionen ausgeführt hat, so erklärt sich, weshalb die Funktionen, welche algebraische Additionstheoreme besitzen, verhältnismässig leicht zugänglich sind.

§ 5.

Nachdem im Vorhergehenden die Grundoperationen der Iterationsrechnung. die Transformation (Satz II), die Reversion und die Ligantenbildung, in formaler Weise besprochen worden sind, ohne Rücksicht auf die spezielle Natur der Funktionen, werfen wir nun zum Schluss einen kurzen Blick auf das Verhalten der einzelnen Funktionen gegenüber der Iteration.

Indem man sich an das in der Einleitung auseinandergesetzte Schema von 4 Stufen erinnert, leuchtet ein, dass wir uns auf die Untersuchung der (algebraischen) Deuterofunktionen beschränken müssen, indem ja erst aus diesen die Tritofunktionen erschlossen werden sollen, was bisher nur unvollständig gelungen ist. Dabei zeigt sich gleich, dass die algebraischen Funktionen sich in gewisse Klassen sondern lassen, die bei der Iteration ein wesentlich verschiedenes Verhalten aufweisen. Darauf soll im Folgenden etwas eingegangen werden.

Die einfachsten Deuterofunktionen sind offenbar die *linearen*, da sie am nächsten der Protofunktion verwandt sind. Jedes Gleichungssystem von der Form:

$$f_k = A_o^{(k)} + A_1^{(k)}\,\xi_1 + A_2^{(k)}\,\xi_2 + \cdots A_n^{(k)}\,\xi_n \qquad (k = 1 \cdots n)$$

führt bekanntlich im allgemeinen auf Exponentialfunktionen, in speziellen Fällen auf ganze rationale Funktionen. Setzt man $A_o^{(k)} = 0$ und führt ein

$$\frac{f_k}{f_n} = g_k \qquad \frac{\xi_k}{\xi_n} = \eta_k,$$

so liefert die Iteration des Systems gebrochener Funktionen mit gleichen Nennern:

$$g_k = \frac{A_1^{(k)}\eta_1 + A_2^{(k)}\eta_2 + \cdots A_n^{(k)}\eta_n}{A_1^{(n)}\eta_1 + A_2^{(n)}\eta_2 + \cdots A_n^{(n)}\cdot\eta_n} \qquad (k = 1, \cdots n) \qquad (49)$$

Quotienten solcher Exponentialfunktionen resp. gebrochene rationale Funktionen. Die Formeln für die Iteralfunktionen sind leicht herzuleiten, ich begnüge mich mit dem einfachsten, oft gebrauchten Fall einer einzigen Variablen. Es ist:

$$J^x\left(\frac{A\xi + B}{C\xi + D}\right) = \frac{[Q(x) + (A - D)P(x)]\,\xi + 2P(x)\cdot B}{2P(x)\cdot C\cdot\xi + [Q(x) - (A - D)P(x)]}. \qquad (50)$$

worin $P(x) = \dfrac{(u + w)^x - (u - w)^x}{2w}$, $\quad Q(x) = \dfrac{(u + w)^x + (u - w)^x}{2}$

$$u = \frac{A + D}{2}, \qquad w = \frac{1}{2}\sqrt{I} = \frac{1}{2}\sqrt{(A - D)^2 + 4BC}.$$

Spezielle Fälle, die häufig vorkommen, sind:

$(A = D)$ $\quad J^x\left(\dfrac{A\xi + B}{C\xi + A}\right) = \dfrac{Q(x)\cdot\xi + 2P(x)\cdot B}{2P(x)\cdot C\cdot\xi + Q(x)}$, z. B.:

$$J^x\left(\frac{\xi + a}{1 - a\xi}\right) = \frac{\dfrac{(1 + ia)^x + (1 - ia)^x}{2}\,\xi + \dfrac{(1 + ia)^x - (1 - ia)^x}{2}}{\dfrac{(1 + ia)^x + (1 - ia)^x}{2} - \dfrac{(1 - ia)^x - (1 - ia)^x}{2i}\cdot\xi}$$

$w = 0$ $\quad J^x\left(\dfrac{A\xi + B}{C\xi + D}\right) = \dfrac{[(x + 1)A - (x - 1)D]\,\xi + 2xB}{2xC\cdot\xi + [(x + 1)D - (x - 1)A]}$ (rational).

Für die Funktionen P(x), Q(x) und ihr Verhältnis T(x) gelten die Formeln

$$P(x+y) = P(x)\cdot Q(y) + P(y)Qx$$
$$Q(x+y) = Q(x)\cdot Q(y) + \Delta P(x)\cdot Py \qquad T(x+y) = \frac{T(x)+T(y)}{1+\Delta\cdot T(x)T(y)}$$

Je nach den verschiedenen Werten von $J^0 = \xi$ modifizieren sich die Formeln. Für die Liganten der Iteralfunktion (50) finden wir, falls $J^0 = \infty$ genommen wird

$$\text{Lig } J^x\left(\frac{A\xi+B}{C\xi+D}\right) = \frac{C\eta\xi+B}{C(\eta+\xi)-(A-D)}. \tag{51}$$

Wenn der Grad der rationalen Funktionen den ersten übertrifft, so stösst die allgemeine Iteration auf grosse Schwierigkeiten. Nur in speziellen Fällen lässt sich die Iteration ausführen und liefert dann die Exponentialfunktionen a^x oder a^{b^x}. Dazu gehört vor allen die bemerkenswerte Klasse der *isobaren* Funktionen. Ist nämlich $f_k = \varphi_k(1)$ eine isobare Funktion der Variablen $\xi_1 \cdots \xi_k$, wobei ξ_k das Gewicht k besitzt, so ist das System

$$\begin{aligned}
\varphi_1(1) &= A\cdot\xi_1 \\
\varphi_2(1) &= B\cdot\xi_1^2 + B_1\xi_2 \\
\varphi_3(1) &= C\cdot\xi_1^3 + C_1\xi_1\cdot\xi_2 + C_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi_k(1) &= \cdots M\xi_1^k + M_1\xi_1^{k-2}\cdot\xi_2 + M_2\cdot\xi_1^{k-3}\cdot\xi_3 + \cdots M_{r_k}
\end{aligned} \tag{52}$$

leicht zu iterieren. Ein solches isobares System hat die Eigenschaft, dass das inverse System wiederum isobar ist, ebenso alle Iterierten, wie man leicht einsieht. Man kann für die Iteralfunktionen $\varphi(x)$ daher ansetzen:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= A(x)\cdot\xi_1 \\
\varphi_2(x) &= B(x)\cdot\xi_1^2 + B_1(x) \\
\varphi_3(x) &= C(x)\cdot\xi_1^3 + C_1(x)\cdot\xi_1\cdot\xi_2 + C_2(x) \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Durch Rekursionsformeln erhält man so

$$A(x) = A^x; \quad B(x) = B\cdot\frac{B_1^x - A^{2x}}{B_1 - A^2}; \qquad B_1(x) = B_1^x$$

$$C(x) = \frac{CC_2 + A(BC_1 - B_1C)}{C_2 - A\cdot B_1}\cdot\frac{C_2^x - A^{3x}}{C_2 - A^3} - \frac{ABC_1}{C_2 - AB_1}\cdot\frac{(AB_1)^x - A^{3x}}{AB_1 - A^3}$$

$$C_1(x) = C_1 \frac{C_2^x - (AB_1)^x}{C_2 - AB_1}; \qquad C_2(x) = C_2^x \quad \text{etc.}$$

Man überzeugt sich leicht, dass allgemein $\varphi_k(x)$ aus Exponentialfunktionen, eventuell auch aus rationalen Funktionen zusammengesetzt ist.

Wenden wir uns zu den algebraischen Funktionen überhaupt, so ist klar, dass hier die Schwierigkeit der Iteration noch grösser ist, als bei den rationalen Funktionen. Indessen giebt es doch viele und allgemeine Fälle, in denen diese Schwierigkeiten zum Teil gehoben sind, so dass man zu Resultaten gelangen kann.

So giebt es z. B. unzählige Funktionen, die nach Art des Satzes II durch algebraische Transformation aus linearen oder isobaren Funktionen entstanden sind und natürlich durch Iteration auf Exponentialfunktionen führen. Dahin gehören ferner alle algebraischen Funktionen, die etwa einer linearen Iteralgleichung

$$f^{(k)} = a_1 f^{(k-1)} + a_2 f^{(k-2)} + \cdots a_{k-2} f f(\xi) + a_{k-1} f(\xi) + a_k \cdot \xi$$
$$(f^{(k)} = J^{(k)} f)$$

genügen, so z. B. die Funktionen f in dem Beispiel pag. 116, die rationalen Werten der Konstanten C entsprechen.

Zwei Klassen algebraischer Funktionen sind dadurch interessant, dass sich bei ihnen die Iteration durch *rationale* Rechnung bewältigen lässt.

Es seien $f_1, \cdots f_n$ n unabhängige algebraische Funktionen der Variablen $\xi_1 \cdots \xi_n$ und es sei Ω der Körper aller rationalen Funktionen der ξ. Der durch Adjunktion von $f_1, \cdots f_n$ entstandene Körper $\Omega(f_1 \cdots f_n)$ heisse dann kurz «der Körper von $(f_1 \cdots f_n)$».

Iterieren wir $f_1 \cdots f_n$, so werden die Ausdrücke $f_1(f_1 \cdots f_n)$, $\cdots f_n(f_1 \cdots f_n)$ im allgemeinen nicht mehr dem Körper $\Omega(f_1 \cdots f_n)$ angehören. Es giebt indes eine grosse Zahl von Funktionen, für welche dieser Fall eintritt, für welche also

$f_1(f_1 \cdots f_n), \cdots f_n(f_1 \cdots f_n) =$ rationalen Funktionen von $(f_1 \cdot \cdot f_n, \xi_1 \cdot \xi_n)$ sind. Ebenso sind dann auch die Iterierten höherer Ordnung Funktionen in $\Omega(f_1 \cdot \cdot f_n)$. Solche Funktionen $f_1 \cdot \cdot f_n$, die in ihrem eigenen Körper iterierbar sind, heisse ich «*körpertreu*».

Man kann die Aufgabe zu gegebenen Irrationalitäten $\varrho_1(\xi_1 \cdot \cdot \xi_n)$, $\varrho_2, \cdots \varrho_n$ alle körpertreuen Funktionen zu finden, leicht auf eine Aufgabe der Gleichungslehre zurückführen. Bezeichnen $R_1, \cdots R_n$ ratio-

nale Funktionen der Variablen $x_1 \cdots x_n$ mit vorläufig willkürlichen Koeffizienten und bilden wir von dem Ausdruck

$$\varrho_k(x_1, \cdots x_n) - R_k(x_1, \cdots x_n) \qquad (k = 1 \cdots n)$$

das Produkt über alle Konjugierten von ϱ_k, so erhalten wir das folgende System rationaler Gleichungen

$$G_k = \Pi \varrho_k(x_1, \cdots x_n) - R_k(x_1, \cdots x_n) = 0 \qquad k = 1, \cdot\cdot n), \quad (53)$$

wodurch $x_1, \cdot\cdot x_n$ als Funktionen der Koeffizienten der R bestimmt sind. Unsere Aufgabe läuft nun darauf hinaus, diese Koeffizienten der sonst willkürlichen rationalen Funktionen R als Grössen aus $\Omega(\varrho_1 \cdot\cdot \varrho_n)$ so zu bestimmen, dass das Gleichungssystem (53) ein System rationaler Lösungen erhält:

$$x_1 = f_1 = R_1(\varrho_1 \cdot\cdot \varrho_n, \xi_1 \cdot\cdot \xi_n), \cdots x_n = f_n = R_n(\varrho_1 \cdot\cdot \varrho_n \xi_1 \cdot\cdot \xi_n). \quad (54)$$

Dabei hat man noch zu achten, dass die f auch primitive Grössen des Körpers $\Omega(\varrho_1 \cdot\cdot \varrho_n)$ sind, d. h., dass sich auch die $\varrho_1 \cdot\cdot \varrho_n$ umgekehrt durch die $f_1 \cdot\cdot f_n$ ausdrücken lassen.

In jeder der Gleichungen (53) muss ferner ein Faktor verschwinden, also für jedes k gelten:

$$\varrho'_k(f_1 \cdot\cdot f_n) = R_k(f_1, \cdot\cdot f_n) \qquad (k = 1 \cdot\cdot n) \quad (55)$$

wo ϱ'_k irgend eine der Konjugierten von ϱ_k oder ϱ_k selbst vorstellen soll. Sind nun noch $\Omega(\varrho_1)$, $\Omega(\varrho_2)$, $\cdot\cdot \Omega(\varrho_n)$ lauter Galois'sche Körper, die mit ihren conjugierten Körpern zusammenfallen, so folgt aus (55), dass auch $\varrho_k(f_1 \cdot\cdot f_n)$ und somit auch $f_k(f_1 \cdot\cdot f_n)$ sich rational durch $\varrho_1 \cdots \varrho_n$ resp. $f_1 \cdots f_n$ darstellen lassen, *d. h. die Lösungen* $f_1 \cdots f_n$ *sind körpertreue Funktionen.*

Statt der n Funktionen $\varrho_1 \cdots \varrho_n$ kann man auch eine einzige primitive Grösse ϱ des Körpers $\Omega(\varrho_1 \cdots \varrho_n)$ einführen.

Hat man so ein körpertreues Funktionensystem gefunden, so kann man sich die Iterierten verschiedener Ordnung durch bloss rationale Rechnung successive darstellen. Damit bleibt allerdings die Schwierigkeit, die allgemeine Iteralfunktion zu finden, noch dieselbe, wie für die rationalen Funktionen. Indes ist die Lösung des obigen Problems auch so schon wichtig, zumal sie einer interessanten Anwendung auf die *Zahlentheorie* fähig ist.

Ist nämlich $F(x, x_1, \ldots x_n)$ eine rationale Form der Variabeln $x, x_1 \cdots x_n$ mit ganzzahligen Koeffizienten, so stellt die Zahlentheorie

die Aufgabe, solche *rationale* Werte der $x, x_1 \cdots x_n$ zu bestimmen, welche der Gleichung

$$F = 0$$

Genüge thun.

Angenommen nun, wir kennten ein Lösungssystem $x = a$, $x_1 = a_1, \cdots x_n = a_n$, so liefert das folgende Verfahren ein Mittel, um etwaige weitere Lösungen zu finden.

Lösen wir die Gleichung $F = 0$ nach einer der Variablen, z. B. nach x auf, so erhalten wir

$$x = \varrho(x_1, x_2, \cdots x_n),$$

wo ϱ algebraisch ist. Nun suchen wir, wenn dies überhaupt möglich ist, ein körpertreues System $f_1 \cdots f_n$ zu $\Omega(\varrho)$. Setzen wir alsdann

$$\begin{aligned} x_1 = f_1 &= R_1(\xi_1 \cdots \xi_n,\ \varrho(\xi_1 \cdots \xi_n)) \\ &\vdots \\ x_n = f_n &= R_n(\xi_1 \cdots \xi_n,\ \varrho(\xi_1 \cdots \xi_n)), \end{aligned} \tag{56}$$

so gilt auch wegen der Körpertreue der $f_1 \cdots f_n$

$$x = \varrho(f_1 \cdots f_n) = R(\xi_1 \cdots \xi_n,\ \varrho(\xi_1 \cdots \xi_n)).$$

Für $\xi_1 = a_1,\ \xi_2 = a_2, \ldots \xi_n = a_n$ geht dann $\varrho(\xi_1 \cdots \xi_n)$ in eine rationale Zahl a über, $x, x_1, \cdots x_n$ werden daher ebenfalls rational und stellen ein neues Lösungssystem vor. Iterieren wir successive das System $(f_1 \cdots f_n)$, so erhalten wir in den Iterierten beliebiger Ordnung

$$x_1^{(\nu)} = J_1^{\nu}(f_1 \cdots f_n),\ x_2^{(\nu)} = J_2^{\nu}(f_1 \cdots f_n), \cdots\cdots x_n^{(\nu)} = J_n^{(\nu)}(f_1 \cdots f_n)$$

verbunden mit $x^{(\nu)} = \varrho(J_1^{\nu}, J_2^{\nu}, \cdots J_n^{\nu})$ neue rationale Lösungssysteme, sobald nach der Iteration $\xi = a,\ \xi_1 = a_1, \cdots \xi_n = a_n$ gesetzt wird.

Die so erhaltenen Lösungen brauchen nicht alle von einander verschieden zu sein. Sobald das System $(f_1 \cdots f_n)$ für die speziellen Werte $\xi_1 = a_1, \cdots \xi_n = a_n$ cyclisch wird, wiederholen sich von einer gewissen Ordnung an die Lösungen wieder.

Ist also ein einziges Lösungssystem bekannt, so liefert uns die Iteration gewisser körpertreuer Funktionen eine endliche bis unendliche Anzahl neuer.

Diese Methode ist die Verallgemeinerung des bei der Pell'schen Gleichung längst bekannten Verfahrens.

Beispiel einer körpertreuen Funktion ist

$$f = \xi \cdot \frac{(\xi^4 - 6\xi^2 + 1) + 4(1-\xi^2)\sqrt{1-\xi^2}}{1+\xi^2};$$

$$\sqrt{1-f^2} = \frac{4\xi^2(1-\xi^2) - (\xi^4 - 6\xi^2 + 1)\sqrt{1-\xi^2}}{1+\xi^2}.$$

Von nicht geringerem Interesse als die körpertreuen Funktionen ist eine andere nah verwandte Klasse.

Die körpertreuen Funktionen sind dadurch charakterisiert, dass ihre Iterierten sämtlich dem gleichen Körper $\Omega(f_1 \cdots f_n) = \Omega(\varrho)$ angehören. Lassen wir diese Bedingung fallen, nehmen also an, dass die Funktionen $(f_1, \cdots f_n)$ und ihre Iterierten J^2, J^3, etc. der Reihe nach den verschiedenen Körpern $\Omega(\varrho_1)$, $\Omega(\varrho_2)$, $\Omega(\varrho_3)$ . . . angehören, so kann der Fall eintreten, dass diese Körper wenigstens alle den gleichen Grad ν besitzen. Genügt also etwa $f_k(\xi_1 \cdots \xi_n)$ einer rationalen Gleichung vom Grade ν_k

$$f_k^{\nu_k} + A_1 f_k^{\nu_k - 1} + A_2 f_k^{\nu_k - 2} + \cdots A_{\nu_k} = 0,$$

worin $A_1 \ldots A_{\nu_k}$ rationale Funktionen der ξ vorstellen, so erfüllt dann ihre erste Iterierte $f_k(f_1 \ldots f_n)$ eine analoge Gleichung vom selben Grade mit Koeffizienten, die rational aus den Grössen $A_1 \ldots A_{\nu_k}$ zusammengesetzt sind. Dasselbe gilt von den höheren Iterierten. Das Problem der Iteration von $(f_1 \ldots f_n)$ kann als gelöst betrachtet werden, wenn die Koeffizienten der Gleichungen für $J^x(f_1 \ldots f_n)$ allgemein bestimmt sind, was auf die Iteration eines bloss rationalen n-Systems herausläuft.

Solche Funktionen $f_1 \ldots f_n$, deren Iterierte sämtlich Körpern vom gleichen Grad angehören, heisse ich «*gradtreu*».

Beispiel einer solchen gradtreuen Funktion ist

$$f = \sqrt{\xi^2 - a^2 - 2a\sqrt{1-\xi^2}}, \qquad ff = \sqrt{\xi^2 - 4a^2 - 4a\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Die gradtreuen und körpertreuen Funktionen haben beide die Eigenschaft, dass der Grad der in ihnen vorkommenden Irrationalität bei der Iteration erhalten bleibt, oder dass die rationalen, irreduciblen Gleichungen, denen die verschiedenen Iterierten $J_k^x(f_1 \ldots f_n) = \varphi_k(x)$ für ganzzahlige x genügen

$R_0(\xi_1 \ldots \xi_n)^{(x)} \varphi_k^{\nu}(x) + R_1(\xi_1 \ldots \xi_n)^{(x)} \varphi_k^{\nu-1}(x) + \cdots R_n(\xi_1 \cdots \xi_n)^{(x)} = 0$

für alle diese Werte von x denselben Grad besitzen in Bezug auf $\varphi_k(x)$.

Indessen wird der Grad der ganzen rationalen Funktionen von $\xi_1 \ldots \xi_n$ im allgemeinen mit wachsendem x rasch zunehmen, wodurch der Iteration praktisch bald eine Grenze gesteckt wird.

Nun enthalten aber beide Klassen noch eine unendliche Anzahl algebraischer Funktionen, bei deren Iteration selbst die Funktionen $R(\xi_1 \ldots \xi_n)^{(x)}$ in Bezug auf alle ξ denselben Grad behalten. Diese Funktionen $f_1 \ldots f_n$ unterscheiden sich daher von ihren Iterierten nur durch die wechselnden Werte der in ihnen vorkommenden Konstanten, *d. h. die Form der Funktionen bleibt bei der Iteration erhalten.*

Solche Funktionen nenne ich nun «*formtreu*» und zwar «*eigentlich*» oder «*uneigentlich*», je nachdem sie zugleich körpertreu oder nur gradtreu sind.

Beispiel einer eigentlich formtreuen Funktion ist

$$f f = \frac{5\xi + 6\sqrt{1+2\xi^2-8\xi^4}}{9+32\xi^2} \qquad f f = \frac{12540\sqrt{1+2\xi^2-8\xi^4}-46031,\xi}{43681+28800\xi^2}$$

während die Funktion

$$f = \sqrt{a+\xi^2}$$

uneigentlich formtreu ist.

Zu den formtreuen Funktionen gehören auch vor allem die linearen und isobaren Funktionen, deren leichte Iterierbarkeit zumeist auf ihrer Formtreue beruht. Überhaupt erscheinen die formtreuen Funktionen gewissermassen als «algebraisch lineare» Funktionen und sind daher in Bezug auf Iteration als die einfachste Klasse der algebraischen Funktionen zu betrachten. Dies tritt auch zu Tag in ihrer nahen Beziehung zu den Funktionen von 2 n Variablen $\xi_1 \cdots \xi_n \ \eta_1 \cdots \eta_n$, die wir oben (§ 4) Liganten genannt haben.

Ist nämlich $(\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n)$ ein Ligantensystem, so ist das iterierte System gleich

$$\{(\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (\eta_1 \cdots \eta_n)\} \frown (\eta_1 \ldots \eta_n) = (\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n)^2.$$

Man erhält also die Iterierten der Liganten, indem man an Stelle von $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ resp. die Ausdrücke

$$(\eta_1 \ldots \eta_n) \frown_1 (\eta_1 \ldots \eta_n), \ldots\ldots (\eta_1 \ldots \eta_n) \frown_n (\eta_1 \ldots \eta_n)$$

setzt, *d. h. die Liganten sind formtreue Funktionen von* $\xi_1 \ldots \xi_n$.

Wir kommen somit wieder zur Erkenntnis, dass die nächste Aufgabe der endlichen Iterationsrechnung darin besteht, sämtliche algebraische Liganten etwa auf Grund der Definition in Satz IX mit

rein algebraischen Mitteln herzustellen und sodann ihre Iteralfunktionen zu untersuchen. In der That sind diese letzteren Funktionen (und die aus ihnen zusammengesetzten) die einzigen Tritofunktionen, die bisher erhalten worden sind, und es ist das grosse Abel'sche Theorem in seiner ursprünglichen Form nichts anderes, als die dualistische Behandlung und teilweise Lösung des soeben aufgestellten Problems.

Zum Schluss mag noch eine allgemeine Bemerkung folgen. Wir verstanden in dieser Arbeit unter Iterieren durchweg, dass eine Funktion oder ein Funktionensystem *unverändert* und fortgesetzt in sich selbst substituiert wird. Wir können nun aber den Begriff des Iterierens dadurch erweitern, dass wir die Funktionen bei jeder Substitution etwas abändern. Ist z. B. $f(\xi, \alpha)$ eine Funktion von ξ mit einem Parameter α, so bilden wir die Reihe

$$f(\xi, \alpha_1), \quad f(\xi, \alpha_2), \quad f(\xi, \alpha_3), \ldots\ldots f(\xi, \alpha_n), \ldots\ldots$$

und substituieren das zweite Glied in das erste, das dritte in das zweite u. s. f. Wir erhalten so einen Ausdruck, den ich eine *Funktionenkette* heisse. Unterliegen die Grössen α_n einem bekannten Gesetz, bilden sie z. B. eine arithmetische Reihe, so kann man nach der Funktion von n fragen, welche diese Kette allgemein als Funktion ihrer Gliederzahl darstellt. Eine solche «Iteralfunktion» ist z. B. die *Fakultät* $(a, +1)^n$ nach Crelles Bezeichnung.

Diese «erweiterte Iterationsrechnung» lässt sich formal zum Teil ganz ähnlich behandeln wie die gewöhnliche, spielt indes keine solche Rolle. Übrigens kann sie ganz auf die letztere zurückgeführt werden, so dass keine neuen Funktionen dadurch zustande kommen. Sie ist hier nur der Vollständigkeit wegen erwähnt worden, und weil es oft nützlich ist, gewisse Probleme unter diesem Gesichtspunkt zu betrachten.

J. H. Graf.

Notizen

zur

Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften in der Schweiz.

Nr. 59. Einige schweizerische Geographen:

a) *Joh. Graber,* geb. 27. Mai 1844 in Huttwyl, Sohn armer Eltern, der Vater war Weber, wurde unentgeltlich, weil er sehr begabt war, 1860 in das evangel. Seminar Muristalden aufgenommen, 1863 patentirt wurde er Lehrer in Eriswyl, 1865 am Seminar in Beuggen, 1867 an der Lorraineschule in Bern, 1868 Hülfslehrer am Seminar Muristalden für Rechnen und Geschichte, dann Lehrer an der Postgassschule, dann an der burgerlichen Mädchenschule, 1876 nach Basel an die Claraschule, 1877 an die Sekundarschule in dorten. Er war während seines Berner Aufenthalts Sekretär der geograph. Gesellschaft in Bern; von Basel aus bereiste er ganz Europa (Schweden, Ungarn, Stambul, Italien, Russland), dann Algier, Agypten und Palästina; er starb 1895 am 24. Februar in Basel an einer Herzlähmung. Graber war ein gewissenhafter, gewandter Lehrer, ein tüchtiger Geograph.

b) *Henry Bouthillier de Beaumont,* geb. 2. Juni 1819 in Genf, Gründer der Genfer Geograph. Gesellschaft anno 1858, von 1858—1884 Präsident derselben und während 13 Jahren einer ihrer Ehrenpräsidenten. Henry Bouthillier gehörte einer Familie französ. Ursprungs an, die 1711 sich in Genf einbürgerte; nachdem er die Genfer Schulen durchlaufen, verreiste er im Alter von 19 Jahren nach Südrussland, um einen grossen landwirthschaftlichen Betrieb zu dirigiren. 1847 nach Genf zurückgekehrt, bewirthschaftete er das Familiengut in Collonges-sous-Salève; nebstdem trieb er geograph. Studien. 1858 gründete er mit Georges Appia, Casimir de Candolle, Fr. Chappuis, Henry Dunant, Henry Peyrot und Henry de Saussure die geograph. Gesellschaft von Genf. Von 1860 an liess er einen Band «Mémoires et Bulletin» erscheinen, eine Publikation, die 1867 in der geographischen Zeitschrift «Le Globe» ihre Fortsetzung fand. Er publizirte 1860 «Essais d'agriculture dans le Kamtchatka», 1867 «Arcachon, son bassin et les landes». Dann verfertigte er eine Karte der europäischen Türkei und vertrat mit Geschick die Idee, den Meridian durch die Behringsstrasse als 1. Meridian zu wählen; damit hätte er vielleicht Erfolg gehabt, wenn nicht die Frage der Universalzeit dazwischen gekommen wäre, welche er mit Zähigkeit vertheidigte; vergl. seine Publikation «Le méridien initial et l'heure universelle», Genf, 1883 und «De la projection en cartographie et présentation d'une nouvelle projection de la sphère entière comme planisphère. Globe XXVII.» Er nahm den Meridian der mitteleuropäischen Zone als «Méridien médiateur» an und gab, gestützt darauf, einen «Atlas élémentaire pour la cartographie générale et usuelle», für welchen er 1896 eine silberne Medaille an der Landesausstellung in Genf erhielt, heraus. Er hat ferner bedeutende Verdienste um die Erforschung des Congostaates. Als verdienter Präsident und Ehrenpräsident nahm er

bis zu seinem am 4. Februar 1898 erfolgten Tode regen Antheil an der Gesellschaft. Er hatte das Kommandeurkreuz des belgischen Leopoldordens und die Palmen eines Offiziers de l'Instruction publique de France. Von ca. 12 geograph. Gesellschaften war er Ehrenmitglied.

c) *Paul Chaix,* geb 1. Oktober 1808 in Crest in der Dauphinée, war durch seine Mutter *Jeanne-F.-Dunant,* Genfer. 1816 folgte er seinem Vater *Georges Chaix,* der Maler war, nach Genf; derselbe wurde 1823 für geleistete Dienste Burger dieser Stadt. Der junge Chaix machte seine Studien unter *Heyer* und *Tœpffer,* wurde nachher Erzieher beim *Herzog von Richmond* in England 1829—1832; damals publizirte er die Karte von Savoyen. 1833—1835 war er Erzieher in der Familie *Gargarine* in Russland, 1836 wurde er Lehrer der Geographie und der Geschichte an der Industrieschule in Genf. 1839 publizirte er die erste Auflage seines «Précis de géographie élémentaire» und zwei Jahre nachher seinen «Atlas de géographie». Das erstere Werk erlebte 1900 die 14. Auflage. 1846 wurde er von der Revolution seines Amtes als Lehrer entsetzt und er erhielt eine Stelle erst wieder 1868, welche er bis 1882 behielt. 1872 wurde er Honorarprofessor der Universität Genf. Daneben publizirte er «Lettres des bords du Nil» (Bibl. universelle 1847); «Histoire de l'Amérique méridionale» 2 vol.; «Hydrographie de l'Arve» und viele kleinere Artikel in in- und ausländischen Zeitschriften. Er war Mitglied der «Royal geographical Society London» 1837, der «Société de géographie de Paris» 1852 etc. etc.; er besass den Orden Karls III. von Spanien, den preuss. Kronenorden und den Orden Albrecht des Bären von Anhalt. 1858 wurde die geograph. Gesellschaft von Genf gegründet; Chaix trat im gleichen Jahre ein; er war 43 Jahre lang Mitglied dieser Gesellschaft, zweimal ihr Präsident, seit 8 Jahren einer ihrer Ehrenpräsidenten. Er starb am 28. März 1901 in Genf. («Le Globe». Tome XL., p. 143 u. ff.)

Nr. 60. Fortsetzung der Briefe von Michéli du Crest an Joh. Jakob Huber von Basel.

Monsieur *Baviere* m'offre de votre part, Monsieur, un extrait sur le *Newton* que vous avez, Edition de Leide, je l'accepte copié par un copiste à mes frais et j'indique l'endroit, c'est au sujet de la comète de 1680 livr. 3. Prop. 41. Exemplum pag. 455 et sequent. 4 Amsterd. 1714, qui suit apparemment le même ordre que la vôtre, mais comme il y a eu correction dans la dernière Edition du livre des principes Mathématiques faite en 1726 par M. *Newton,* ainsy qu'il est observé à la page 78 de la théorie des comètes par M. *le Monnier* c'est pourquoi il faudroit savoir, si dans cette dernière édition M. *Newton* n'a rien changé aux reflexions ou observations physiques qu'il avoit faites là-dessus et que j'ai eu la hardiesse d'oser critiquer dans ma lettre à M. *Bernoully* que je désire de r'avoir pour la corriger.

J'ay l'honneur d'être votre, etc.

Folgt eine Abhandlung von *Michéli du Crest* in Briefform an *J. J. Huber* in Basel:

Nr. 61. Mémoire pour l'intelligence des calculs de correspondance du Mercure à l'esprit de vin de mon thermomètre.

d. m.	d. m.	min.
0— 97 . 33 32	9—26	34 33
88— 7		
88— 7	8—52	28
79—15		
79—15	8—24	25 24
70 . 51		
70 . 51	7—59	20 22
62 . 52 51	8 — 0	
62 . 52 37	7—39	19 18
55 . 13	38	
55 . 13	7—20	17 16
47 . 53		
47 . 53	7—3	14 15
40 . 50 49	4	
40 . 50 49	6—49	13 14
34 . 1 0		
34— 1 0	6—36	13 14
27 . 25	35	
27 . 25	6—23	10
21 . 2		
21 . 2	6—13	10
14 . 49		
14 . 49	6—3	10
8 . 46		
8 . 46	5—53	
2 . 53		
2 . 53		
0		

Degrez correspondans du thermomètre de M. de l'isle à mon thermomètre suivant le calcul de M. Huber formez par dizaines pour connoitre leur quotité, et l'excez de leur progression.

Quotité de chaque dixaine

Excez de la progression

Mon thermomètre de mercure également divisé par 100 degrés comme mon thermomètre d'esprit de vin jusqu'à l'eau bouillante afin d'accorder le 1er avec le second, il faut le diviser comme il suit:

Il faut donner au 1er degré sur le Temperé de sa 1ere division en montant *1 degré 15 minutes 50 secondes 24 tierces* au second au-dessus de moins 19 secondes, 12 tierces et par conséquent à ce second degré le premier compris.

2 degrez 31 minutes 21 secondes 36 tierces et toujours poursuivre de meme jusqu'au 99 degré qui doit se rencontrer au 99 degrez 15 minutes 50 secondes 24 tierces et *le 100 à l'un et à l'autre à 100.*

Au-dessous du Temperé pour le 1er de froid il faut donner 1 degré 16 minutes 9 secondes 36 tierces et continuer l'augmentation de 19 secondes 12 tierces à chaque degré jusques au 100me degré de froid de l'esprit de vin qui doit se rencontrer au 153 degré 29 minutes. Autrement en commencant tout le calcul depuis l'eau bouillante degré par degré jusqu'au plus bas et donnant au 1er degré pour la distance jusqu'au 99 = 44 minutes, 9 secondes, 36 tierces et augmentant à chaque degré en descendant 19 secondes, 12 tierces, tout le calcul se trouve juste.

Et si vous voulez calculer de 5 en 5, il faut donner au 1er quine 3 degrez, 44 minutes, et au second d'augmentation à 8 minutes et ajouter ainsy à chaque quine le calcul se trouvera de même.

Et si vous voulez calculer de 10 en 10, il faut donner à la 1ere dixaine depuis l'eau bouillante 7 degrés 36 minutes et à la seconde accroître celle suivante de 32 minutes et ainsy à chaque dizaine et le calcul se trouvera de même. Il me semble donc que se rencontrant dans la division de mon

thermomètre de mercure que je viens de dépeindre une exacte proportion arithmétique entre tous les excez de dizaines de degrez de quines et meme d'unité, elle devroit se rencontrer sinon en même proportion du moins en quelque façon entre les excez des dizaines tels qu'ils ont été calculéz, or, ce que je n'y trouve point n'y qui en approche et qui me fait par conséquent fort douter de la justesse du principe de leur calcul, car comme le mien est fondé sur une progression arithmétique toujours proportionnelle, celui-ci doit au moins l'être en quelque façon.

Si la division en avoit été faite par quine, c'est-à-dire de 5 en 5, on auroit pu voir si le 25e degré de *De l'isle* repond juste au 80e degré de chaleur de mon thermomètre de mercure également divisé suivant sa marche ou au 75e lorsqu'il est divisé suivant la marche du thermomètre d'esprit de vin qui est le point correspondant du thermomètre d'esprit de vin auquel ce 25e degré de *De l'isle* et le 182e degré de *Fahrenheit* doivent répondre, mais je n'ai pas pu le voir, ainsy je m'en rapporte étant toujours persuadé que pour pouvoir faire juste un pareil calcul, il faut trouver la clef de la progression et que toute autre méthode aura bien de la peine de résoudre la difficulté.

Les calculs sur l'huile de lin sont aussi fondéz sur le meme principe mais la règle de progression en est un peu différente.

Voici le principe de mon calcul pour le mercure qui n'est autre que des moyennes proportionnelles qui croissent en proportion arithmétique de dix en dix de 32 minutes, de 5 en 5 de 8 minutes et degré par degré de 19 secondes, 12 tierces en descendant. Si j'avois pu trouver la clef pour renverser ces progressions et regler conséquemment le thermomètre d'esprit de vin sur la marche du thermomètre de mercure, comme j'ai trouvé celle-ci qui règle exactement le thermomètre de mercure sur la marche du thermomètre d'esprit de vin, j'avois facilement trouvé ensuite la règle de proportion pour regler juste les thermomètres de *De l'isle* et de *Fahren-*

	d.	m.	
1ere dizaine	7	36	90
2e dizaine	8	8	80
3e dizaine	8	40	70
4e dizaine	9	12	60
5e dizaine	9	14	50
6e dizaine	10	16	40
7e dizaine	10	48	30
8e dizaine	11	20	20
9e dizaine	11	52	10
10e dizaine Te	12	24	0
	12	56	10
	13	28	20
	14	.	30

heit, parceque onze degrés de *De l'isle* en valent 8 degrés de mon thermomètre de mercure et par consequent 1 degré 3 minutes de *De l'isle*, un de mon dit thermomètre de mercure.

Et parceque dix degrés de mon thermomètre de mercure en valent 16 de *Fahrenheit* et par conséquent 1 degré 36 minutes de Fahrenheit un degré de mon dit thermomètre de mercure.

Mais je n'ai pas pu trouver jusqu'à présent cette règle de progression quoiqu'elle ne me semble pas introuvable.

Et cela me paroit devoir se trouver avec d'autant plus de facilité qu'aiant une table degré par degré du mercure reglé sur l'esprit de vin, on y trouve de distance en distance divers degrés sans fraction qui s'accordent avec ceux de l'esprit de vin.

Par exemple, outre ceux de l'eau bouillante à 10 et ceux du Tempéré à Zéro qui s'accordent ainsy, on trouve le 80e du mercure également divisé qui s'accorde avec le 75e degré de l'esprit de vin de façon qu'au mercure il faut à ce 80e degré compter seulement 75, ce qui s'accorde avec le calcul.

On trouve encore au-dessous le 30e du mercure également divisé qui s'accorde avec le 25e de l'esprit de vin sur le Tempéré, de façon qu'au lieu de 30 il faut seulement compter 25.

Ainsy voila quatre points qui s'accordent juste, et aiant de plus tous les intermédiaires avec des fractions, on voit aisement si le principe dont on se sert pour régler le calcul, le remplit parfaitement comme il doit le faire.

Ajoutez que dans les degréz de froid le 50e degré de l'esprit de vin répond juste au 70e degré du mercure, de façon qu'il faut dans la graduation artificielle et correspondante du mercure écrire 50 au degré 70 de sa marche d'égalité.

Voilà qui me paroît suffisant pour aider à trouver le principe du calcul dont il s'agit et quant à celui de l'huile de lin il n'y a de différence si ce n'est qu'au lieu que la progression par dizaine est au mercure de 32 minutes, elle n'est à l'huile de lin que de 26 minutes et 40 secondes par dizaine, 6 minutes 40 secondes par 5 degréz et degré par degré en descendant, d'accroissement de 16 secondes.

Arbourg, 28 novembre 1753.

A M. Huber le Fils à Bâle

Au Château d'Arbourg, le 12 décembre 1753.

Monsieur,

En réponse à l'honneur de votre lettre du 7 décembre j'aurai celui de vous dire sur le premier point.

Que lorsque je vous écrivis ou à M. *Batière* sur la question de la parfaite sphéricité du Globe de la Terre, ce fut en conséquence des observations de l'état moyen du baromètre, supposées faites bien exactement au niveau des mers, soit sous l'Equateur, soit au cercle polaire,

soit dans les espaces intermédiaires, et que par toutes ces observations déterminoient la hauteur de cet état moien du baromètre à 28 pouces du pied de Roy.

Or, je ne croiois point auparavant que ces observations fussent exactes parceque les Académiciens du Pérou me paroissoient avoir osé à cet égard de négligence et d'imprecaution, eux-memes avouant n'avoir portés avec eux que de mauvais baromètres et n'avoir pas meme de souffleur pour les rajuster, etc., de sorte que je ne trouvois pas qu'on pusse se fier à leurs observations. Je communiquai là-dessus meme une critique à M. *Jalabert à Geneve*,[1]) mais celui-ci, par sa réponse, me fit voir que je les censurois sans raison, et ses réflexions me parurent solides.

Dans ces entrefaites, M. *Bavière* me communiqua de votre part un memoire sur le baromètre où l'état moien du dit baromètre se trouvoit fixé par des observations à Berlin que je crus être faites sur le pied de Roy, puisque la langue françoise y etoit adoptée et il resultoit ainsy de cette fausse supposition de ma part, que j'avois eu beaucoup de raison dans ma critique précédemment mentionnée, de sorte que j'étois persuadé que l'état moyen du baromètre étoit au moins dans la mer baltique à 29 pouces du pied de Roy. Mais par votre réponse, Monsieur, vous me désabusates de mon erreur, et me fîtes voir que l'état moien du baromètre étoit égal partout au niveau des mers, soit sous l'Equateur, soit au cercle polaire et à 28 pouces du pied de Roy. Or, je conclus de là qu'il me paroissoit donc que le globe de la Terre devoit être parfaitement sphérique, telle fut alors ma réponse.

Je ne fondai pas je crois, Monsieur, cette proposition sur aucun raisonnement, parceque je n'avois pas eu le temps d'y bien réfléchir, vous jugeates de votre coté convenable de vous entretenir avec moi sur un tel sujet, j'acceptai votre proposition. Il est donc juste que je fonde aujourd'hui cette proposition que doit faire le sujet de notre entretien puisqu'elle me paroit fondée sur des raisons qui méritent de la consideration.

Je dis donc que par une multitude d'expériences du baromètre il résulte qu'à mesure que l'on s'éloigne ou que l'on s'approche du centre de la Terre seulement de 80 pieds de Roy, l'état moyen du baromètre varie d'une ligne, et par conséquent que c'est l'instrument le plus simple et le plus exact que l'on puisse emploier pour déterminer la distance du centre de la terre à sa superficie.

Or que le baromètre déterminant au niveau de toutes les mers, soit sous l'équateur soit au cercle polaire soit dans les espaces intermédiaires, niveau qui est partout le meme, la meme distance de la superficie de ces mers au centre de la Terre, puisqu'il y témoigne egalement partout le terme de 28 pouces du pied de Roy, il s'en suit clairement que le globe de la terre est parfaitement spherique, puisque tous les raisons qui partent de sa surface au niveau des mers en tout sens sont egaux partout,

[1]) *Jallabert, Louis*, geb. 12. VII. 1712 in Genf, gest. 11. III. 1768 in Beguin bei Genf. 1750 Professor der Mathematik und Philosophie an der Academie in Genf.

jusques au point de son centre et qu'il n'est pas possible de pouvoir decrire du meme centre avec meme raison par tout une autre figure que celle d'un cercle parfaite.

Vous m'objecterez peut-etre, Monsieur, 1° qu'on ne doit point ici considerer le centre de la Terre, mais seulement sa superficie au niveau des mers, comme etant le *non plus ultra* des observations du baromètre et 2° que ce n'est pas l'attraction du centre de la Terre qui agit pour lors sur le baromètre, mais bien la pression de la colonne d'air qui le fait hausser ou baisser et qui etant supposée egale par tout doit egalement presser sur un globe elliptique qu'elle qu'en soit la figure que sur un globe parfaitement spherique.

Sur le 1er point je reponds que les bornes de la gravité ne sont point à la superficie des mers, mais bien au centre de la Terre, puisque si vous jettez un boulet de canon ou une anchre dans la mer, elle va au fonds non pas avec la meme rapidité que dans l'air pur (parceque le fluide qu'il s'agit de traverser et peut-etre 900 fois plus dense) (A) mais avec les mêmes proportions, ainsy qu'il est aisé d'en faire les experiences, quoique j'avoue ne les avoir point faites ny meme vû faire, ny lû quelque part et cependant que je les crois ainsy, et de plus qu'il se trouve quantité de mines, dont ent'rautres une à Ardingnam proche de Calais, qui doit etre actuellement creusée au moins 4 à 500 pieds au dessous du niveau de la mer et où il est facile d'y faire faire les observations du barometre, de sorte qu'on en aiant deux egaux l'un à l'embouchure superieure et l'autre au fonds de la mine et les faisant observer dans le meme tems, on verra de combien celui du fonds sera plus haut que l'autre et consequemment que la pression de l'air suit la loy de la gravité qui augmente toujours à mesure qu'on s'approche du centre de la Terre. Cette experience a sans doute eté faite ailleurs.

Et quant au second point je reponds que l'attraction du centre de la Terre est la cause de la pression de la colonne d'air sur le barometre, laquelle colonne je suppose avec vous Monsieur, egale en hauteur dans toute l'atmosphere et suivre exactement la curvité du globe quelle qu'elle soit, et par consequent que cette attraction etant la cause immediate de cette pression de l'air sur le barometre elle est ainsy la cause primitive et originale du mouvement du mercure dans ce barometre, de sorte que partant toujours du centre de la Terre, elle temoigne ainsy sa distance par la force de son action. qui en fait la juste mesure et prouve que la Terre est un globe parfaitement spherique, puisqu'au meme niveau de toutes les mers, elle fait marquer au barometre le meme terme de 28 pouces, et que s'il s'en manquoit seulement 80 pieds, elle feroit marquer au barometre une ligne de plus. Or ce peut-il trouver un instrument plus simple et plus exact que le barometre pour determiner la vraie figure de la Terre par la mesure du raion jusques à son centre de gravité, puisqu'une erreur de 80 pieds seulement est facile à eviter avec tres peu d'attention, au lieu qu'avec tout l'attirail en ce cas prodigieux

de ces grands quarts de cercle, la multitude tres necessaire des divers triangles, le froid excessif, les vents, l'ennu, les diverses incommoditez, et peut etre memes les passions ou de certaines raisons particulieres des observateurs, la rapidité du passage et peutêtre des aberrations des étoiles ou du plomb dans la mesure de l'aire celeste, ont pu facilement faire commettre à M^rs^ les divers academiciens ou autres mathematiciens, des erreurs sur ce raison, je ne dis pas seulement de 80 pieds mais des erreurs de six à sept mille toises de plus ou de moins, sans qu'il soit possible de le leur prouver avec leurs instrumens, ou avec d'autres de même nature ny par consequent de les en convaincre. Il n'y a donc point de comparaison ny par consequent d'objection valable de ces instrumens contre les observations du barometre dont il s'agit.

Ainsy, Monsieur, je tiens fermement comme vous voiez pour la parfaite sphericité de la Terre, en attendant cependant de votre part quelques nouvelles objections auquelles je me rendrai, si je ne me sens pas la faculté de les resoudre et c'est pourquoi j'ajouterai à ce que j'ai dit sur le sentiment de l'academie Royale des sciences de Paris en faveur de ma these et que vous croiez être contre elle puisque vous dites dans votre lettre que la plupart des academiciens tiennent la Terre applatie, même Mrs *Cassini* et *Maraldi* qui s'y etoient le plus opposez autrefois que je juge de ce sentiment de l'academie par son enoncé dans la connoissance des tems qui dit d'abord en propres termes: *Les degrez de latitude sont tous egaux,* car en laissant ainsi ensuite malgré tous les doutes elevez et toutes les diverses mensurations faites, etabli debout un pareil principe, sous pretexte dites-vous de geografie, ne reste-t-il pas ainsy egalement debout pour l'astronomie, et puisque la connoissance des tems est plutôt publiée pour l'astronomie que pour la géografie.

Quels fonds peut-on faire d'ailleurs apres une pareille declaration de l'academie sur celles de quantité de ces membres lorsqu'ils parlent en particulier et suivant les lieux où ils sont et où leurs discours sont souvent arrangez suivant le goût de ceux d'où decoulent les graces et les faveurs et auquels ils tachent de plaire par la conformité de leurs sentimens et pour ce qui concerne Mrs *Cassini* et *Maraldi*, il faudroit savoir bien d'autres choses que vous ignorez, Monsieur, pour en bien juger.

Ajoutez s. v. p., Monsieur, cette consideration dans le cas particulier dont il s'agit c'est que si l'academie avoit jugé que la Terre etoit parfaitement spherique elle auroit ainsy jugé et prononcé que toutes les depenses faites pour un tel sujet etoient des depenses vaines: Elle ne pouvoit donc pas, ce me semble, s'expliquer plus precisément qu'elle ne l'a fait en faveur de la parfaite sphericité. *Les degrez de latitude sont tous egaux, supposé que la Terre soit spherique. Ils sont chacun de 57060 toises du chla*[1]) *de Paris et si la Terre n'est pas exactement spherique, la difference entre ces degrez est si petite qu'on peut la negliger sans scrupule par raport à la geographie.*

[1]) unlesbar im Manuscript.

En effet, n'est-ce pas ainsy donner à penser que malgré toutes les precautions prises en Laponie ou sous l'Equateur pour bien mesurer, on estimoit cependant que le plus scur etoit de laisser subsister l'ancien calcul de la sphericité parfaite et par consequent que les preuves de la Laponie et de l'Equateur n'etoient pas suffisantes pour le detruire.

2° Quant a l'article de Mr *de L'isle* dont vous me demandez, Monsieur, à voir le memoire, ce memoire appartient a Mr le Professeur *Jalabert* à Geneve et je lui ai demandé, il y a près de 15 jours, la permission d'en pouvoir disposer m'etant engager à le lui renvoier, je n'ai pas encore recu sa reponse et par consequent je ne puis pas vous le faire parvenir quant à present.

Voici les deux endroits en abrege du memoire dont il s'agit. Mr *de L'isle* a fait imprimer une pretendue lettre d'un amiral espagnol nommé *de Fonte*, qui en consequence des ordres du Roy d'Espagne avoit fait armer 4 vaisseaux de guerre en 1740 au port de Callas proche Lima et en etoit parti au mois d'Avril faisant route au nord le long des côtes de la Californie afin de decouvrir, s'il y avoit communication, ou avec le baye de Baffin ou avec celle d'Hudson dans la Mer du Nord. Or cet amiral apres etre entré dans l'archipel St Lazare et jusqu'à Conasset par un canal où il avoit laissé les deux vaisseaux et etant entré ensuite dans les barques avoit poussé son chemin jusqu'au lac ronquille et y etoit arrivé le 16 juillet a une ville indienne, dont il ne dit pas le nom, et de là etoit aller joindre sur ce lac un grand vaisseau Anglais qui y etoit arrivé de Boston dont le Sr *Shapny* etoit Capitaine et cependant sur la carte on ne voit point le chemin par eau où ce vaisseau Anglais aura pu passer pour arriver dans ce pretendu lac ny pris de cette pretendue Ville Indienne qu'il ne nomme point, on ne voit point non plus que cette revalation soit avoué par aucun acte espagnol, ainsy Mr *de L'isle* a bien dû sentir par l'arte de ce vaisseau anglais venu de Boston dans ce lac que cette piece etoit une piece fausse, puisque lui meme ne trace point sur sa carte la route par où il y a pu parvenir, pourquoi donc la publier et fonder la dessus sa carte non-seulement de ces divers lacs, mais encore celle du pretendu lac Velasco que cette relation dit decouvert par le Capitaine *Bernardo* detaché pour lors pour cet effet par l'Amiral *de Fonte* et appuyer encore cette fausse relation par divers autres raisonnemens et par le suivant.

L'autre endroit regarde la point de l'Est de la Siberie determinée par les observations du Capitaine *Beerings* où il vit la mer libre à l'Est et au Nord en 172? et revint au Kamchaka, Mr *de L'isle* ajoute qu'en 1731 des Russes s'embarquerent sur le meme vaisseau et trouverent à l'est de la pointe de Siberie une grande terre qu'il supposa par sa carte tenir au continent de l'Amerique et la meme que celle que le Capitaine Bernardo avoit decouverte.

Es cependant il suppose que cette decouverte des Russes ne parvint point à la connoissance de la cour de Petersbourg puisque le Capitaine Beering

eut l'ordre en 1741 d'aller chercher d'autres terres pour la latitude de 54 degrez et ensuite son Lieutenant *Tschirikon* joint avec Mr son frere de la Croyere qui n'a riguerent comme on le voit sur la carte jusqu'au pretendu archipel St Lazare en Amerique. C'est donc evidemment une fausseté que cette pretendue decouverte en 1731, puisque si elle eut eté reelle Beering et Tschirikon auroient eu ordre de la suivre et non pas d'aller chercher bien loin ce qu'ils avoient si proche.

Ainsy, c'est en imposer au public que fonder des cartes pareilles sur des relations qui portent avec elles des indices de fausseté et qui n'ont aucune preuve ny meme apparence de verité d'autant plus que l'on s'attendoit de la part d'un Academicien de reputation tel que lui a des decouvertes d'une toute autre nature.

Je tacherai cependant, Monsieur, de vous satisfaire plus amplement en vous envoiant le memoire original ou copie si je puis trouver un copiste.

3° A l'egard des deux termes de froid de *Kyringa 1738* et de *Jenisey 1735* marquez sur la planche de Mr *Baviere* et dont vous me demander raison. Kyringa repond au 242 de froid de *Del'isle* et au 55¼ du mien et *Jenisey* repondant au 262 degrez de froid de *Del'isle* et au 64¼ du mien, je l'ai fait en consequence d'un extrait de la bibliotheque raisonnée Edit. d'hollande chez les *Wetstein* novembre et decembre 1742 qui l'accuse ainsy relativement au thermometre de Del'isle et de Fahrenheit accusant le degré de *Kyringa* suivant Fahrenheit à 72 degrez sous Zero ce qui s'accorde à un degré pres avec celui de Del'isle sur ma de planche et *Jenisey* à 120 degrez ¾ sous zero, du dit Fahrenheit qui ne pouvant pas s'accorder avec les 262 de Del'isle puisqu'ils repondent à 285 me firent conclure qu'il y avoit necessairement de l'erreur dans l'un ou dans l'autre et profere l'accusation des 262 de Delisle.

Cependant je vois, Monsieur, par votre table que ce terme de *Jenisey* 1735 est au 281 degré de Del'isle et repond par consequent au 116 degré sous zero de Fahrenheit et au 72½ degré de froid du mien et que Kyringa *1738* repond au 275 de Del'isle qui repond à 108¾ sous zero de Fahrenheit et au 70 degré de froid du mien. Aussy voila des differentes accusations qui font voir qu'il y a eu de la variation dans les sources, j'auroi grand soin de votre table comme vous me le recommandez de même que de vos livres.

4° J'ay taché d'observer qu'elle pouvoit etre la difference de mon echelle de Newton gravée à Paris et de celle qui est sur la planche de Mr Baviere et j'y en ai trouvé si peu que je serois bien embarasser à present d'en rendre raison, je crois cependant que le dernier doit etre plus exacte que le premier, sans rien affirmer cela n'est d'ailleurs qu'une bagatelle dont je ne crois pas qu'il vaille la peine de se remettre dans tous les calculs necessaires pour l'approfondir, cependant je verrai lorsque le tems me permettra de me mettre a cette besogne.

5° A l'egard des calculs thermometriques de correspondance de Del'isle et de Fahrenheit et meme de mon thermometre de mercure (or je dis

mon thermometre de mercure à cause de sa disposition particuliere de 100 degrez artificiels ou egaux depuis ce tempere à l'eau bouillante) je souhaiterois fort pouvoir les faire autrement que mechaniquement parceque je n'ai point d'instrument avec moi, tous les miens sont dans mon equipage en partie pillé à Berne et quand j'en aurai j'aurai beaucoup de peine à pouvoir m'en servir tant à cause du faux jour que du peu de jour des fenetres de mon logement, mais je crois toujours de progression quoique difficile à trouver par le calcul n'est pas cependant impossible car quoique ce ne soit pas une progression arithmetique néantmoins celle en procede par renversement et doit faire une espece de courbe ou parabole que l'on peut surement trouver, il me semble encore qu'il ne vaudrait pas la peine pour une minute ou deux d'erreur d'entreprente de corriger les calculs dont il s'agit si l'on n'etoit assuré de les rendre parfaits de meme que les autres.

Si vous pouviez, Monsieur, me procurer l'emprunt du livre des experiences de Physique du Docteur *Desaguliers* je vous serois tres obligé.

Quant à l'exemplaire du livre *Maupertuisiana* je suis precisement à l'egard de son maitre dans le meme cas que je l'ai dit à l'egard du Memoire de Mr *Del'isle* et j'attend aussi sa reponse, en attendant donc j'ai cru devoir vous envoyer ci-joint la liste des pieces. On dit que l'on le trouve à vendre à Berne chez Godschall ou quelqu'autre, mais je croirois plus scur à Frankfort ou à Cologne ou à Leipzic. J'ay l'honneur d'etre tres parfaitement, Monsieur, votre tres humble et tres obeissant serviteur MICHELI DU CREST.

(A) Pour faire l'experience de la chute des corps graves dans l'air ou dans la mer de maniere a pouvoir observer aisément et sensiblement la proportion de l'accélération de leur chute dans les espaces egaux avec une montre ou pendule à secondes je voudrais emploier pour cet effet dans l'air une petite bombe remplie de plomb fondu et dans la mer une plus grosse remplie de plomb de meme et la faire tomber sùr terre dans quelque prodigieusement grand principe partant d'un tourniquet qui pivoteroit aisement et tourneroit de meme avec beaucoup de facilité et attachée par ses deux anneaux à une corde au moins de 800 toises de long que l'on diviseroit en un paquet de dix ou de 20 toises et tellement disposez sur le tillac du vaisseau ou sur le sommet du precipice que ces paquets se developperoient sans peine pour fournir à la chute et qu'on s'apercevroit aisement ainsy combien de secondes il faudroit au developpement et depart de chaque paquet soit que la bombe tombat dans l'air soit qu'elle tombat dans la mer. On pourrait ensuite evaluer la valeur du frottement du tourniquet et du developement des paquets par la comparaison que l'on pourroit faire du tems de la chute simple pour toute la distance, avec celui que le corps grave emploieroit de cette façon.

TITRE DU LIVRE IN 8°

MAUPERTUISIANA*)

A HAMBOURG

1753

Avertissement.

Pieces contenues dans ce recueil, dont l'enumeration commence par le jugement de l'academie, mais au bas de la page il accuse lettres et ainsy ce recueil commence par 48 pages de petit Romain contenant diverses lettres tirées du magazin françois, apres cela vient le jugement de l'academie de Berlin imprimé en St Augustin precedé d'un avertissement contenant en tout 26 pages.

Apres vient l'apel au public 2me edition en St Augustin *à Leide chez Elie Luzac Junior 1753*, il est precedé d'un avertissement et contient 124 pays et avec l'appendix qui contient diverses copies de lettres et memoires 192 pages.

Defense de l'apel meme impression et *chez Luzac à Leide* pag. 65.

Lettre de M^r^ le Marquis de .... impression différente à Londres 1752 où le mot d'*academie Royale* de Berlin en imprimé en gros caractères gothiques 42 pages.

Diatribe du Docteur Akakda imprimé à Rome 1753. 32 pages.

Extrait d'une lettre de Berlin 12 novembre 1752, d'un savant à M^r^ le Marquis 16 pag.

Seance memorable 8 pag.

Extrait d'une lettre d'un academicien de Berlin à un membre de la Societé Royale de Londres, imprimé en Cicero 8 pages.

Lettres concernant le jugement de l'academie ecrites à Bâle à Mr Merian par Mr Euler, de Mr de Maupertuis à Mr Euler et Mr Merian à Mr Euler, 56 pages St Augustin.

Eloges de 3 philosophes *à Londres 1753*, y compris sous ce nom une lettre d'un academicien de Berlin à un de Paris. 74 pages en Augustin.

Reponse de l'academicien de Paris à l'academicien de Berlin à *Londres 1753* en Augustin 41 pag.

L'acte de bien argumenter à *Hambourg 1753* de Mr de Maupertuis à Voltaire et reponse de Voltaire avec avertissement 8 pag.

Proeve over de Ware Grond Watten, der Oeweging en rust .... door anlond Brugmans. *A Leyden chez Luzac 1753*, en Augustin 77 pages avec fig.

Dissertation de Mr Euler. *Leide chez Luzac 1753* suivi de l'examen de la dissertation de M^r^ Kœnig avec addition 88 pag. en Augustin.

La bartue remarquable *Vittenberg 1753* 16 pages. en Augustin.

Traite de paix *Berlin* 1753 1er juin pag. 19.

---

*) Bezieht sich auf den wissenschaftlichen Streit zwischen S. König in Frameqner und Maupertuis über das Princip der kleinsten Aktion. Siehe Graf, Gesch. der Math. u. Naturw. in bernischen Landen. III. 1. Heft.

Inhalts-Verzeichnis.

	Seite der Sitzungsberichte	Seite der Abhandlungen
Jahresbericht pro 1900/1901	III	
Mitgliederverzeichnis pro 1901	X	
Jahres-Rechnung pro 1900	XIV	
Antenen, Fried., Dr. phil., Sekundarlehrer in Biel, Die Vereisungen der Emmenthäler (mit Figuren im Text und 1 Karte)		18
Baltzer, A., Prof. Dr., Die Entstehung der Berneroberländer-Marmore .	V	
Demonstration von Photographien	V	
Nachlese zur Geologie des Aarmassivs . . .		67
Benteli, A., Rektor und Docent, Ueber Föhn	VIII	
Brückner, E., Prof. Dr., Die Eiszeiten der Schweiz	VI	
Fischer, E., Prof. Dr., Ueber die neuern Untersuchungen von Norwaschin und Guignard	VI	
Ueber den Weisstannen-Hexenbesen und dessen Urheber, das Accidium elatinum	VII	
Graf, J. H., Prof. Dr., Demonstration von Werken Tycho's de Brahe .	VII	
Die Vermessung des Kantons Basel von Professor Daniel Huber	VIII	
Notizen zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften in der Schweiz . . .		138
Gruner, P., Dr. phil. und Privatdocent, Neuere Beziehungen zwischen Licht und Magnetismus (Zeemanns Phänomen)	V	
Guillebeau, A., Prof. Dr., Die Bakterien der Euterentzündung bei Kühen .	VII	

	Seite der Sitzungsberichte	Seite der Abhandlungen
Heffter, A., Prof. Dr.,		
Ueber Pfeilgifte	V	
Huber, G., Prof. Dr.,		
Der grosse Astronom Tycho de Brahe	VII	
Der Astronom Tycho Brahe (mit Figuren im Text und Bildnis)		73
Huber, R., Dr. phil., und Gymnasiallehrer,		
Demonstration des botanischen Atlas von Dr. J. Huber am Museum Göldi in Pará	VII	
Kissling, E., Dr. phil., Sekundarlehrer und Docent,		
Ueber die Gliederung der Molasse im Napfgebiet	VII	
1. Meeresmolasse im Emmenthal		98
2. Stachel eines Rochen aus der Meeresmolasse des Belpbergs		101
3. Neue Fundstelle fossiler Pflanzen aus der Molasse der Bäuchlen (Entlebuch)		102
4. Weitere Funde von Arctomysresten aus dem bernischen Diluvium		103
5. Lehmgerölle im fluvioglacialen Sand		105
König, E., Dr. phil., Gymnasiallehrer,		
Demonstration der Lampen von Nernst	VI	
Demonstrationen aus dem Gebiete der Elektrizität	VI	
v. Kostanecki, St., Prof. Dr.,		
Ueber den «Wau»	VI	
Machacek, Fritz, Dr. phil. in Wien,		
Beiträge zur Kenntnis der lokalen Gletscher des schweizer. und französ. Jura		9
Mœbus, B., Dr. phil. in Jena,		
Der diluviale Oglioglетscher. (Mit Figuren im Text, Profilen und 1 Karte)		44
Ris, F., Gymnasiallehrer, Direktor der eidg. Eichstätte,		
Ueber einen neuen Masstab	VIII	
Schaffer, A., Prof. Dr.,		
Ueber die Prüfung von Defraudationen an Wertzeichen	VIII	
Sidler, G., Prof. Dr.,		
Die Schale Vivianis (mit Figuren)		1
Spiess, O., Dr. phil. in Tarbes,		
Die Grundbegriffe der Iterationsrechnung		106

	Seite der Sitzungsberichte	Seite der Abhandlungen
Steck, Th., Dr. phil., Konservator,		
Ueber den Bestand der vereinigten Bibliotheken der schweizerischen und der bernischen Naturforsch. Gesellschaft	VII	
Streun, G., Dr. phil., Sekundarlehrer,		
Ueber die Nebelverhältnisse der Schweiz . . .	VIII	
Studer, Th., Prof. Dr.,		
Demonstration zoologischer Objekte aus Sumatra .	V	
Neue Entdeckungen aus der Urgeschichte des Menschen	VI	
Ueber die Veräusserung der Bibliothek der schweizer. naturf. Gesellschaft	VII	
Ueber die neu entdeckte Samoterium-Art: Okapia .	VIII	
Tschirch, A., Prof. Dr.,		
Neueres über Kautschuk und Guttapercha . .	V	

Verlag von K. J. WYSS in Bern.

Beiträge zur Kryptogamenflora der Schweiz.

I. Band. Heft I: *Entwicklungsgeschichtliche Untersuchungen über Rostpilze.* Von Prof. Dr. Ed. Fischer Fr. 4. —

I. Band. Heft II: *Die Farnkräuter der Schweiz.* Von Dr. Hermann Christ . . . . . Fr. 4. —

I. Band. Heft III: *Algues vertes de la Suisse. Pleurococcoïdes-Chroolépoïdes.* Par E. Chodat . . Fr. 10. —

Graf, J. H., Prof., Dr. *Einleitung in die Theorie der Gammafunktion und der Euler'schen Integrale.* Fr. 2. —

— — *Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften in bernischen Landen* vom Wiederaufblühen der Wissenschaften bis in die neuere Zeit. Heft 1—3. Fr. 7. 20

— — *Leben und Wirken des Physikers und Geodäten Jacques Barthélmy Micheli du Crest* aus Genf, Staatsgefangener des alten Bern 1746—1766. Mit Porträt Micheli's, einer Ansicht seines Gefängnisses in Aarburg und Facsimile seines Panorama der Alpen Fr. 3. —

— — *Das Leben und Wirken des Physikers und Astronomen Joh. Jac. Huber* aus Basel, 1733—1798. Mit dem Bildnisse Huber's und einer Tafel, seine freie Uhrhemmung darstellend . . . . Fr. 1. —

— — *Professor Dr. Rudolf Wolf, 1816—1893* » 1. —

— — *Professor Ludwig Schläfli. 1814—1895* . » 1. 20

— — *Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schläfli* . . . . . Fr. 3. —

— — *Die Exhumierung Jakob Steiner's* und Einweihung des Grabdenkmals Ludwig Schläfli's anlässlich des 100. Geburtstages Steiner's. Mit 2 Lichtdrucken Fr. 1. —

— — *Der Mathematiker Jakob Steiner von Utzenstorf.* Ein Lebensbild und zugleich eine Würdigung seiner Leistungen . . . . . Fr. 1. 50

— — *Wann beginnt das XX. Jahrhundert?* Vortrag. Fr. —. 50

Graf J. H., Prof. Dr. und **Gubler Ed., Dr.** *Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Funktionen.* 2 Hefte: Die Bessel'schen Funktionen erster und zweiter Art . . . . . à Fr. 4.—

Huber, G., Prof. Dr. *Sternschnuppen. Feuerkugeln. Meteorite und Meteorschwärme* . . . . Fr. 1. —

— — *Forschungen auf dem Gebiete der Spektralanalyse* —. 80

— — *Die kleinen Planeten des Asteroidenringes* . —. 60

Fischer, Prof., L., *Zweiter Nachtrag z. Verzeichnis der Gefässpflanzen des Berner-Oberlandes, mit Berücksichtigung der Standortsverhältnisse, der horizontalen und vertikalen Verbreitung* . . . . Fr. —. 25

Durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Verlag von K. J. WYSS in Bern.

(Fortsetzung von Seite 2 des Umschlags.)

Fascikel IV6: *Fauna helvetica.* Heft 5: Reptilien und Amphibien. Zusammengestellt von Dr. H. Fischer. 39 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

Fascikel IV6: *Fauna helvetica.* Heft 5δ: Fische. Zusammengestellt von Dr. H. Fischer-Sigwart. Bern 1900. 99 Seiten. Preis Fr. 1.50

Fascikel IV6: *Fauna helvetica.* Heft 6: Mollusken. Zusammengestellt von Prof. Dr. Th. Studer, Dr. G. Amstein und Dr. A. Brot. Preis 60 Cts.

Fascikel IV6: *Fauna helvetica.* Heft 9: Crustacea. Von Dr. J. Heuscher etc. 35 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

Fascikel V4: *Heraldik und Genealogie.* Bearbeitet von Jean Grellet und Maurice Tripet. Bern 1895. 68 Seiten 8°. Preis Fr. 1.50.

Fascikel V6 a—c: *Architektur, Plastik, Malerei.* Zusammengestellt von Dr. B. Haendcke. Bern 1892. 100 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel V6c: *Leibesübungen.* Turnen, Fechten, Reiten, Wassersport etc. Zusammengestellt von Alois Landtwing. 165 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel V9ab: *Landwirthschaft.* Zusammengestellt v. Prof. F. Anderegg u. Dr. E. Anderegg. Bern 1893. Heft 1—3. 258 S. 8° à Fr. 3.—
id. „ 4 „ —.60
id. „ 5 und 6 „ 2.—

Fascikel V9c: *Forstwesen, Jagd und Fischerei.* Forstwesen. Zusammengestellt durch das eidgen. Oberforstinspektorat. Bern 1894, 160 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel V9c: *Forstwesen, Jagd und Fischerei.* Jagd. Zusammengestellt durch das eidgen. Oberforstinspektorat. 77 Seiten 8°. Preis Fr. 1.50

Fascikel V9c: *Forstwesen, Jagd und Fischerei.* Fischerei. Zusammengestellt durch das eidgen. Oberforstinspektorat. Bern 1898, 65 Seiten 8°. Preis Fr. 1.50

Fascikel V9d: *Schutzbauten.* Zusammengestellt durch das eidgen. Oberforstinspektorat. Bern 1895. 136 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel V9gβ: *Mass und Gewicht.* Bearbeitet von F. Ris, Direktor der eidgen. Eichstätte. Bern 1894. 36 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

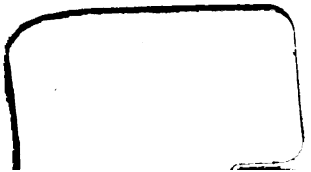
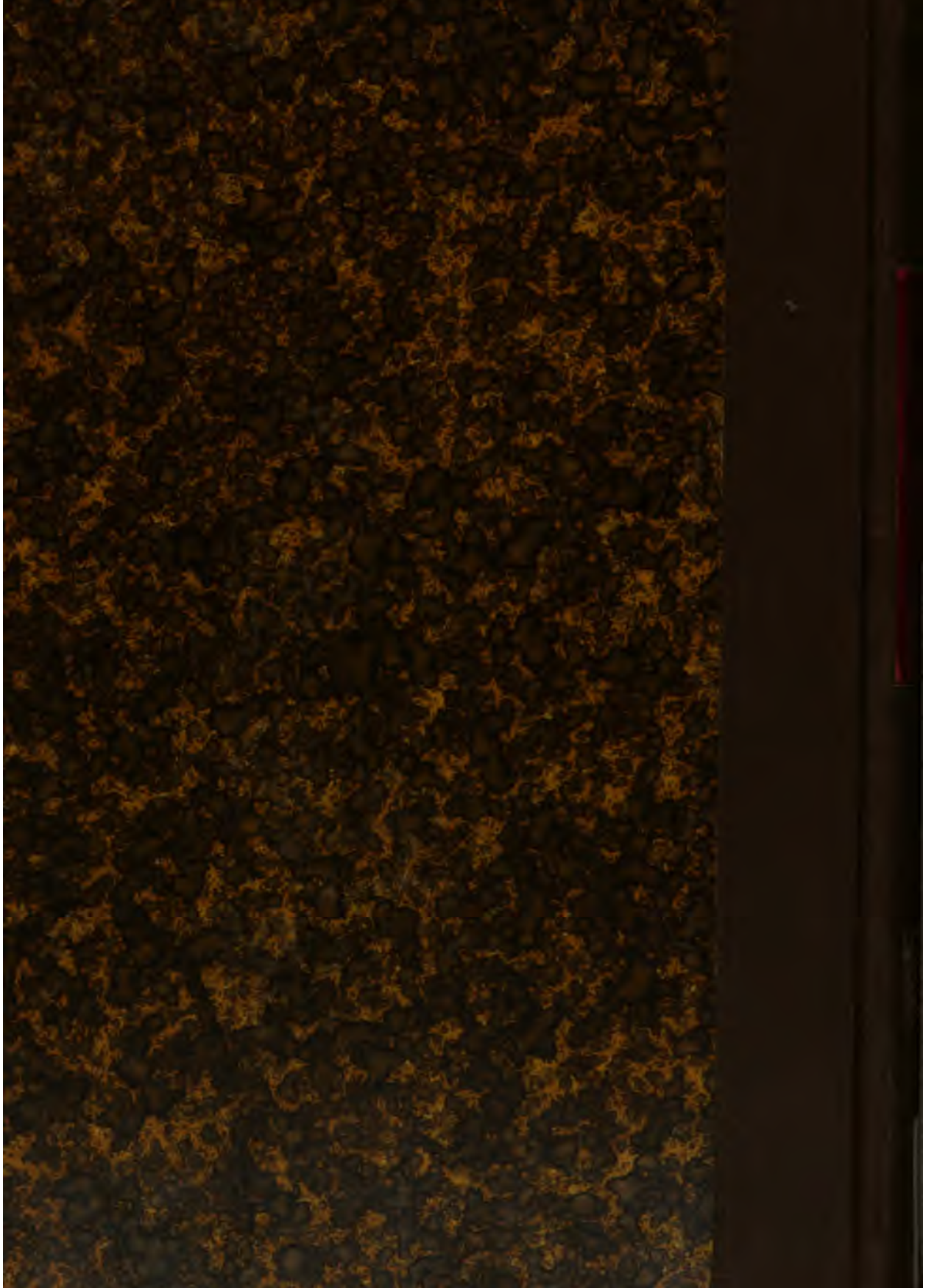
Fascikel V9gγ: *Post- und Telegraphenwesen.*
Postwesen. Zusammengestellt von der Schweizer. Oberpost-Direktion.
Telegraphenwesen. Zusammengestellt von E. Abrezol, Inspektor der Central-Telegraphenverwaltung. Bern 1895. 113 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel V9gε: *Bankwesen, Handelsstatistik, Versicherungswesen.* Zusammengestellt von W. Speiser, Basel, Dr. Geering und Dr. J. J. Kummer. Bern 1893. 207 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel V9j: *Alkohol und Alkoholismus.* Zusammengestellt von Otto Lauterburg, Pfarrer in Neuenegg, E. W. Milliet. Direktor der eidgen. Alkoholverwaltung, und Antony Rochat, Pfarrer in Satigny. Bern 1895. 183 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel V10eγ: *Die christkatholische Litteratur der Schweiz.* Zusammengestellt v. Dr. F. Lauchert. Bern 1893. 32 Seiten 8°. 60 Cts.

Fascikel V10eα; *Bibliographie der evangelisch-reformirten Kirche in der Schweiz.* Heft 1: Die deutschen Kantone. Zusammengestellt von Dr. G. Finsler. Preis Fr. 2.—

Fascikel V10e: *Die katholisch-theologische und kirchliche Litteratur des Bisthums Basel* vom Jahre 1750 bis zum Jahre 1893. Zusammengestellt von Pfr. Ludwig R. Schmidlin in Biberist.
Heft 1 und 2 à Fr. 3.—

3 2044 106 306 327